Roteiro de Integração Numérica (Método de Euler)
Análise de Experimentos Virtuais

Quando uma partícula se move sob influência de forças com resultante constante, sua aceleração também é constante, e podemos encontrar sua velocidade e posição a cada instante a partir de fórmulas bem conhecidas. Considere, porém, uma partícula que se move em um espaço onde a força resultante e, portanto, sua aceleração, dependem da posição e da velocidade. Nesse caso, a posição, a velocidade e a aceleração da partícula em um instante determinam a posição e a velocidade em um instante seguinte, que por sua vez, determinam a aceleração neste instante. Portanto, todas as três grandezas: posição, velocidade e aceleração do corpo variam *continuamente* no tempo. Uma das formas de resolver numericamente o problema consiste em substituir a variação contínua do tempo por uma sequência de pequenos intervalos de duração Δt. A aproximação mais simples é a que supõe que a aceleração seja *constante* durante cada intervalo, que dá origem ao **método de Euler**. Se o intervalo de tempo for suficientemente pequeno, a variação da aceleração durante o intervalo será pequena e poderá ser desconsiderada.

Sejam x_0, v_{0x} e a_{0x} respectivamente a posição, velocidade e aceleração na direção x da partícula no instante inicial t_0. Quando ignoramos a variação da velocidade durante o intervalo de tempo, a nova posição é dada por:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t \tag{1}$$

De maneira similar, se a aceleração durante Δt for constante, a velocidade no instante $t_1 = t_0 + \Delta t$ será dada por

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}\Delta t \tag{2}$$

Podemos usar os valores de x_1 e v_{1x} para calcular a nova aceleração a_{1x} usando a equação de movimento e depois calcular x_2 e v_{2x} usando x_1, v_{1x} e a_{1x}:

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\Delta t \tag{3}$$

$$v_{2x} = v_{1x} + a_{1x}\Delta t \tag{4}$$

As relações entre a posição e a velocidade nos tempos t_n e $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ são dadas por

$$x_{n+1} = x_n + v_{nx}\Delta t \tag{5}$$

$$v_{(n+1)x} = v_{nx} + a_{nx}\Delta t \tag{6}$$

que são generalizações das fórmulas (1) e (2).

Para encontrar a velocidade e a posição em algum tempo t, dividimos, portanto, o intervalo de tempo $t - t_0$ em um grande número de intervalos menores Δt e aplicamos repetidamente as equações (5) e (6), começando no tempo inicial t_0. Isso envolve um grande número de cálculos repetitivos que são realizados mais facilmente em um computador. A técnica de dividir o intervalo de tempo em pequenos trechos e calcular a aceleração, velocidade e posição a cada novo passo usando os valores do passo anterior é chamada de *integração numérica*.

A fim de ilustrar essa técnica, vamos considerar um problema no qual um paraquedista em repouso se larga de uma certa altura, quando ele passa a ser influenciado tanto pela gravidade quanto pela força de arrasto, que é proporcional ao quadrado da rapidez. Encontraremos a velocidade v_y e a distância percorrida y como funções do tempo por meio da integração numérica. A equação que descreve o movimento de um objeto de massa m largado do repouso, quando se ignora o empuxo, é

$$mg - bv^2 = ma_y \tag{7}$$

em que se adotou um referencial Oy orientado no sentido da força da gravidade. A aceleração é, portanto,

$$a_y = g - \frac{b}{m}v^2 \tag{8}$$

É conveniente escrever a constante $\frac{b}{m}$ em termos da rapidez terminal v_T. Colocando $a_y = 0$ na equação (8), obtemos

$$0 = g - \frac{b}{m}v_T^2 \tag{9}$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_T^2} \tag{10}$$

Substituindo (10) em (8), fica

$$a_y = g\left(1 - \frac{v^2}{v_T^2}\right) \tag{11}$$

Para resolver numericamente a equação (11), precisamos usar valores numéricos para g e para v_T. Em *Física para cientistas e engenheiros*[1], Paul Tipler sugere que uma rapidez terminal razoável para um paraquedista seja de 60 m/s. Escolhendo-se $y_0 = 0$ para a posição inicial, $v_{0y} = 0$ para a velocidade inicial e $a_{0y} = g = 9{,}81$ m/s² para a aceleração da gravidade, encontra-se a velocidade v_y e a posição y em algum tempo posterior, digamos para um instante de tempo $t = 20$ s, divide-se o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 20$ s em muitos intervalos pequenos Δt e aplicamos as equações (5), (6) e (11). Faz-se isso usando uma planilha eletrônica de cálculo, como mostrado no Apêndice, em que escolhemos $\Delta t = 0{,}5$ s e obtivemos os gráficos das **Figuras 1** e **2**. Para $t = 20$ s, teremos os resultados $v = 59{,}9$ m/s e $y = 939{,}9$ m.

Podemos esperar que seja melhor adotar intervalos de tempo muito pequenos, digamos $\Delta t = 0{,}000.000.001$ s. Mas existem pelo menos duas razões para não se adotar intervalos de tempo extremamente pequenos. Primeiro, quanto menor o intervalo de tempo, maior será o número de cálculos necessários e mais tempo o programa levará para rodar. Segundo, o computador guarda apenas um número fixo de algarismos em cada passo do cálculo, de forma que em cada passo existe um erro de arredondamento, que vai se acumulando conforme o tempo aumenta. Quanto maior o número de cálculos, mais importante fica o erro de arredondamento. Segundo Tipler[1], uma boa regra é não usar mais do que cerca de 10^5 intervalos de tempo para cada integração numérica típica.

<u>Obs. 1</u>: *Este método tem finalidade didática e dá uma boa aproximação em casos simples, como o do movimento de uma moeda num plano inclinado, mas normalmente se usa o método de Runge-Kutta[2], que é acessível ao estudante que entendeu o método de Euler.*

<u>Obs. 2</u>: *A equação (7) não leva em conta o ar carregado pelo paraquedas, o que depende da situação analisada e pode não ser uma boa aproximação. Para a solução completa, veja referência [3].*

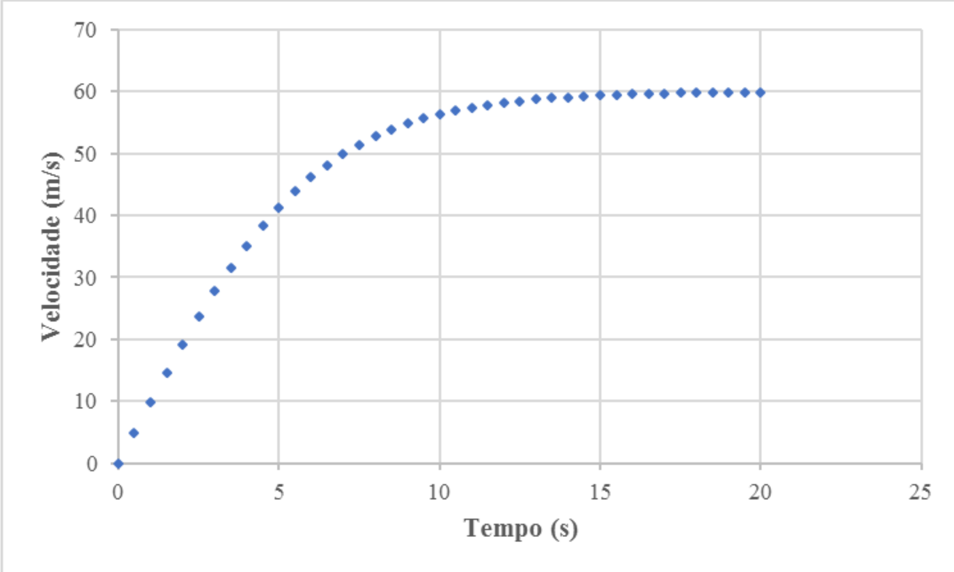

Figura 1. Velocidade adquirida pelo paraquedista em função do tempo, calculado conforme modelo discutido no texto.

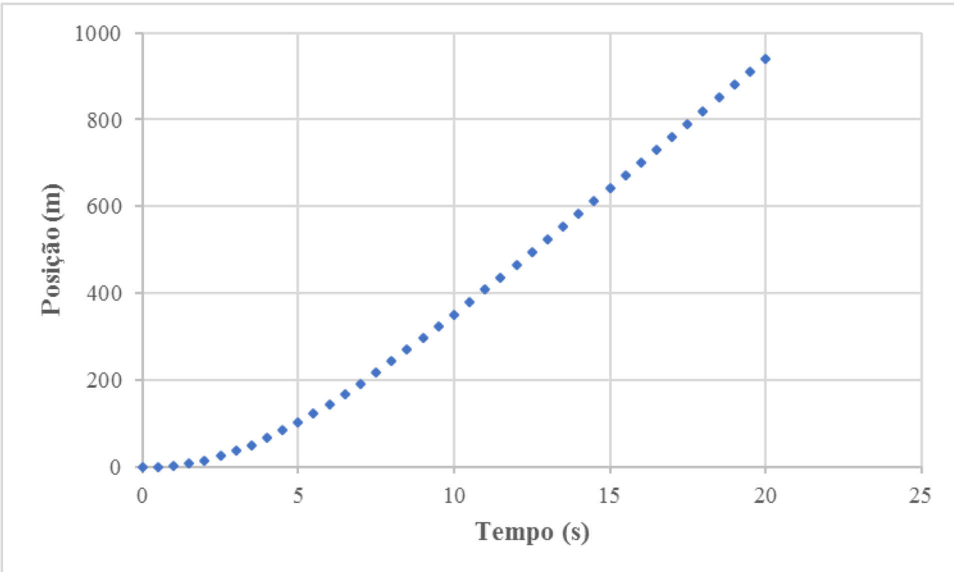

Figura 2. Posição vertical do pára-quedista em função do tempo, calculado conforme modelo discutido no texto.

Exercício. Você está praticando balonismo e atira diretamente para baixo uma bola de tênis com uma rapidez inicial v_0. A bola cai com uma rapidez terminal de 150 km/h. Suponha que o arraste do ar seja proporcional ao quadrado da rapidez da bola. Use o método de Euler para responder às questões abaixo.

a) Quando $v_0 = 35$ km/h, estime a rapidez da bola depois de 10,0 s.

b) Quando $v_0 = 0$ km/h, determine o tempo que a bola leva para atingir 99% de sua rapidez terminal, bem como a distância percorrida entre o lançamento e este instante.

Referências Bibliográficas

[1] Tipler, Paul A., Mosca, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**, Volume 1, 6ª Edição, LTC.
[2] The Feynman Lectures on Physics.
[3] The Parachute Paradox. (David Auerbach). American Journal of Physics, 62 (11) 1041, November 1994.

Apêndice

Parâmetros e condições iniciais para cálculo do problema do pára-quedista:

Δt (s)	$\mathbf{y_0}$ (m)	$\mathbf{v_0}$ (m/s)	$\mathbf{a_0}$ (m/s²)	$\mathbf{v_T}$ (m/s)
0,5	0	0	9,81	60

Planilha com cálculos segundo o método numérico de determinação das posições:

t (s)	**y** (m)	**v** (m/s)	**a** (m/s²)
0,0	0,000	0,000	9,810
0,5	0,000	4,905	9,744
1,0	2,453	9,777	9,550
1,5	7,341	14,552	9,233
2,0	14,617	19,168	8,809
2,5	24,201	23,573	8,296
3,0	35,988	27,721	7,716
3,5	49,848	31,579	7,093
4,0	65,637	35,125	6,448
4,5	83,200	38,349	5,802
5,0	102,374	41,250	5,173
5,5	123,000	43,837	4,573
6,0	144,918	46,124	4,013
6,5	167,980	48,130	3,498
7,0	192,045	49,879	3,030
7,5	216,984	51,394	2,612
8,0	242,681	52,700	2,242
8,5	269,031	53,821	1,916
9,0	295,942	54,779	1,633
9,5	323,332	55,596	1,387
10,0	351,129	56,289	1,176
10,5	379,274	56,877	0,995
11,0	407,713	57,375	0,840
11,5	436,400	57,794	0,708
12,0	465,297	58,148	0,596
12,5	494,372	58,447	0,501
13,0	523,595	58,697	0,421
13,5	552,943	58,908	0,354
14,0	582,397	59,085	0,297
14,5	611,940	59,233	0,249
15,0	641,557	59,358	0,209
15,5	671,235	59,462	0,175
16,0	700,967	59,550	0,147
16,5	730,742	59,623	0,123
17,0	760,553	59,685	0,103
17,5	790,395	59,736	0,086
18,0	820,263	59,779	0,072
18,5	850,153	59,815	0,060
19,0	880,060	59,845	0,051
19,5	909,983	59,871	0,042
20,0	939,918	59,892	0,035