

Gabarito do exercício do roteiro de “Integração Numérica”

• Item a

A figura 1 apresenta o diagrama de corpo livre da bolinha de tênis durante a queda.

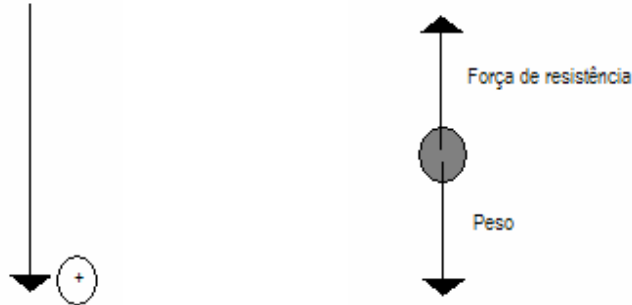


Figura 1: Diagrama de forças sobre a bolinha de tênis.

Como estamos trabalhando com um movimento em apenas uma dimensão, vamos omitir a representação dos vetores. Daí segue que a equação do movimento da bolinha será:

$$F_R = P - F_{\text{Resistência}} = m \cdot a \quad (1)$$

Com isso chegamos em:

$$a_y = g - \frac{b}{m} v^2 \quad (2)$$

Escrevendo em termos da velocidade terminal, conforme foi proposto no roteiro de integração numérica:

$$a_y = g \left(1 - \frac{v^2}{v_T^2} \right) \quad (3)$$

Tendo essa expressão em mãos, juntamente com as expressões que fornecem a posição e a velocidade da bolinha ao longo do tempo:

$$y_{n+1} = y_n + v_{ny} \Delta t \quad (4)$$

e

$$v_{(y)n+1} = v_{(y)n} + a_{(y)n} \Delta t \quad (5)$$

é possível construir a planilha da posição, velocidade e aceleração em função do tempo. Para tanto vamos usar um intervalo de $\Delta t = 0,5$ s. As condições iniciais estão na tabela 1.

Δt=	0,5	s
posição inicial	0	m
velocidade inicial	9,72	m/s
aceleração inicial	9,28	m/s ²
velocidade terminal	41,7	m/s

Tabela 1: Dados iniciais do problema.

Nos dados da tabela 1, foram feitas as transformações de unidades de km/h para m/s e a aceleração inicial foi calculada por meio da expressão (3). Observe também que, neste caso, a velocidade inicial da bolinha não é nula.

Com as fórmulas (3), (4) e (5) e as condições iniciais da tabela 1, construímos a planilha da figura 2 e os gráficos correspondentes da posição em função do tempo e da velocidade em função do tempo apresentados nas figuras 3 e 4. Por meio deles, podemos concluir que, decorrido um intervalo de $\Delta t = 10$ s a velocidade da bolinha é de aproximadamente 41,4 m/s.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Gabarito do exercício - item a								
2									
3	Δt=	0,5	s						
4	posição	0	m						
5	velocida	9,722222	m/s						
6	aceleraç	9,2759	m/s ²						
7	velocida	41,66667	m/s						
8									
9	t	y	v	a		t	y	v	a
10	(s)	(m)	(m/s)	(m/s ²)		(s)	(m)	(m/s)	(m/s ²)
11	0	0	9,722222	9,2759		0	0	B5	B6
12	0,5	4,861111	14,36017	8,644772		A11+0,5	B11+C11*0,5	C11+D11*0,5	9,8*(1-(C12/velocidadetermina) ²)
13	1	12,0412	18,68256	7,83774		A12+0,5	B12+C12*0,5	C12+D12*0,5	9,8*(1-(C13/velocidadetermina) ²)
14	1,5	21,38248	22,60143	6,923555		A13+0,5	B13+C13*0,5	C13+D13*0,5	9,8*(1-(C14/velocidadetermina) ²)
15	2	32,68319	26,06321	5,971627		A14+0,5	B14+C14*0,5	C14+D14*0,5	9,8*(1-(C15/velocidadetermina) ²)
16	2,5	45,71479	29,04902	5,0418		A15+0,5	B15+C15*0,5	C15+D15*0,5	9,8*(1-(C16/velocidadetermina) ²)
17	3	60,2393	31,56992	4,178314		A16+0,5	B16+C16*0,5	C16+D16*0,5	9,8*(1-(C17/velocidadetermina) ²)
18	3,5	76,02426	33,65908	3,408292		A17+0,5	B17+C17*0,5	C17+D17*0,5	9,8*(1-(C18/velocidadetermina) ²)
19	4	92,8538	35,36322	2,74365		A18+0,5	B18+C18*0,5	C18+D18*0,5	9,8*(1-(C19/velocidadetermina) ²)
20	4,5	110,5354	36,73505	2,184774		A19+0,5	B19+C19*0,5	C19+D19*0,5	9,8*(1-(C20/velocidadetermina) ²)
21	5	128,9029	37,82743	1,72453		A20+0,5	B20+C20*0,5	C20+D20*0,5	9,8*(1-(C21/velocidadetermina) ²)
22	5,5	147,8167	38,6897	1,351717		A21+0,5	B21+C21*0,5	C21+D21*0,5	9,8*(1-(C22/velocidadetermina) ²)
23	6	167,1615	39,36556	1,053626		A22+0,5	B22+C22*0,5	C22+D22*0,5	9,8*(1-(C23/velocidadetermina) ²)
24	6,5	186,8443	39,89237	0,817692		A23+0,5	B23+C23*0,5	C23+D23*0,5	9,8*(1-(C24/velocidadetermina) ²)
25	7	206,7905	40,30122	0,632428		A24+0,5	B24+C24*0,5	C24+D24*0,5	9,8*(1-(C25/velocidadetermina) ²)
26	7,5	226,9411	40,61743	0,487844		A25+0,5	B25+C25*0,5	C25+D25*0,5	9,8*(1-(C26/velocidadetermina) ²)
27	8	247,2498	40,86135	0,375542		A26+0,5	B26+C26*0,5	C26+D26*0,5	9,8*(1-(C27/velocidadetermina) ²)
28	8,5	267,6805	41,04912	0,288634		A27+0,5	B27+C27*0,5	C27+D27*0,5	9,8*(1-(C28/velocidadetermina) ²)
29	9	288,205	41,19344	0,221567		A28+0,5	B28+C28*0,5	C28+D28*0,5	9,8*(1-(C29/velocidadetermina) ²)
30	9,5	308,8017	41,30422	0,169925		A29+0,5	B29+C29*0,5	C29+D29*0,5	9,8*(1-(C30/velocidadetermina) ²)
31	10	329,4539	41,38919	0,130225		A30+0,5	B30+C30*0,5	C30+D30*0,5	9,8*(1-(C31/velocidadetermina) ²)

Figura 2: Planilha eletrônica para o cálculo da posição, velocidade e aceleração da bolinha em função do tempo por meio da integração numérica. As colunas G até J exibem as fórmulas das células das colunas de B até E, na mesma sequência.

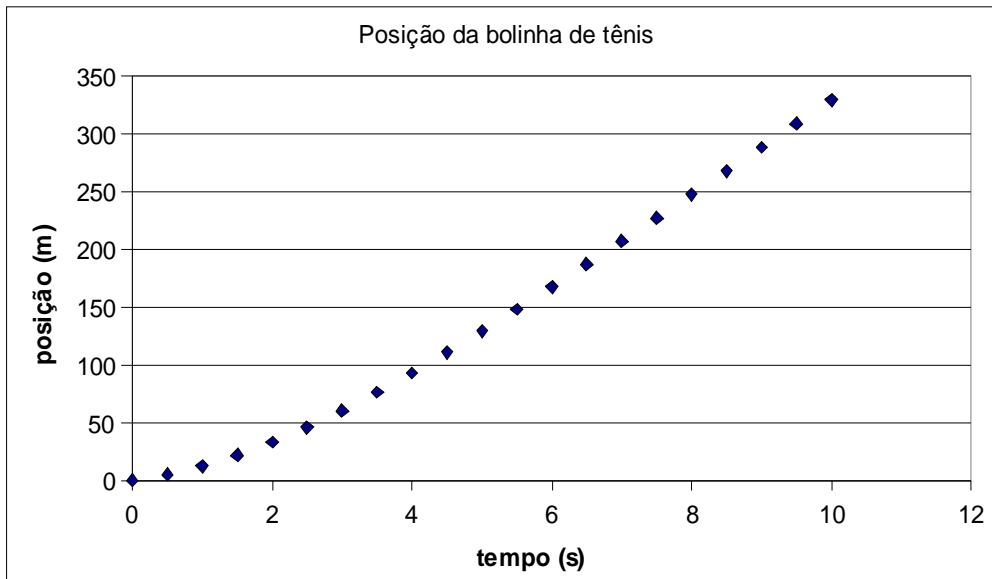


Figura 3: Gráfico da posição em função do tempo, calculado por meio da integração numérica, conforme a coluna C da planilha exibida na figura 2.

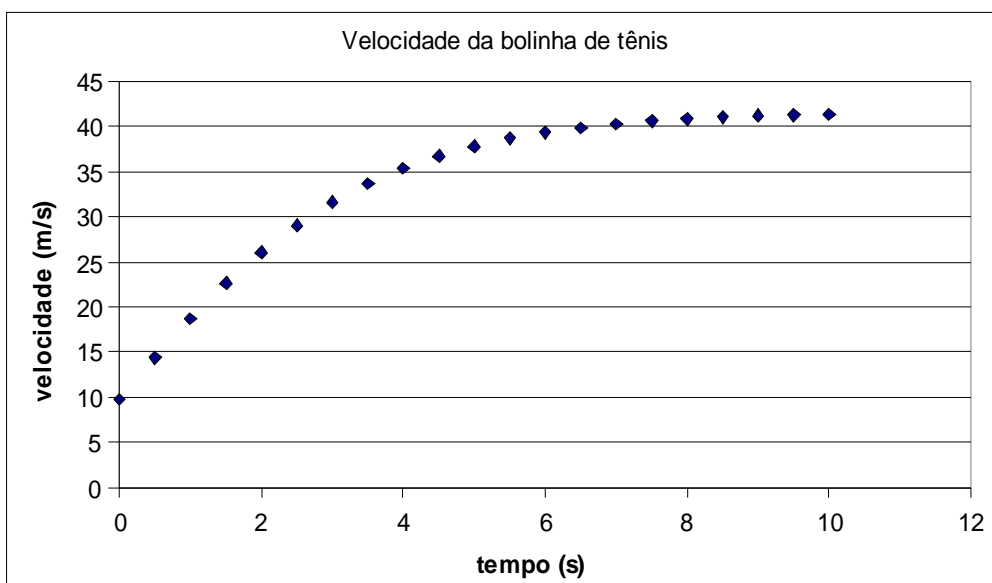


Figura 4: Gráfico da velocidade em função do tempo calculado por meio da integração numérica, conforme a coluna D da planilha exibida na figura 2.

Item b

Neste caso, temos que construir uma planilha semelhante à anterior, mas observe que não temos o valor da velocidade terminal da bolinha, sabemos apenas que sua velocidade inicial é nula.

A idéia é construirmos uma planilha em função do quociente $\frac{v}{v_T}$, lembrando que esse quociente será sempre menor ou igual a um, pois a velocidade da bolinha nunca chega a ultrapassar a velocidade terminal. Basta que façamos incrementos desse quociente até chegarmos próximo de um. A proposta desta solução é de usar incrementos de 0,03, de modo a chegarmos no valor de $\frac{v}{v_T} = 0,99$, que é o que estamos procurando. A figura 5 mostra a planilha construída.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Gabarito do exercício - item b								
2	$\Delta t =$	0,5	s						
3	$x_0 =$	0	m						
4	$v_0 =$	0	m/s						
5	$a_0 =$	9,81	m/s ²						
6									
7									
8	t	y	v/v _T	a		t	y	velocidade/velocidadetermina	a
9	(s)	(m)	(m/s)	(m/s ²)		(s)	(m)		(m/s ²)
10	0	0	0	9,81		0	0	0	9,81
11	0,5	0	0,03	9,801171		A10+0,5	B9+C9*0,5	C9+0,03	9,8*(1-(C10) ²)
12	1	0,015	0,06	9,774684		A11+0,5	B10+C10*0,5	C10+0,03	9,8*(1-(C11) ²)
13	1,5	0,045	0,09	9,730539		A12+0,5	B11+C11*0,5	C11+0,03	9,8*(1-(C12) ²)
14	2	0,09	0,12	9,668736		A13+0,5	B12+C12*0,5	C12+0,03	9,8*(1-(C13) ²)
15	2,5	0,15	0,15	9,589275		A14+0,5	B13+C13*0,5	C13+0,03	9,8*(1-(C14) ²)
16	3	0,225	0,18	9,492156		A15+0,5	B14+C14*0,5	C14+0,03	9,8*(1-(C15) ²)
17	3,5	0,315	0,21	9,377379		A16+0,5	B15+C15*0,5	C15+0,03	9,8*(1-(C16) ²)
18	4	0,42	0,24	9,244944		A17+0,5	B16+C16*0,5	C16+0,03	9,8*(1-(C17) ²)
19	4,5	0,54	0,27	9,094851		A18+0,5	B17+C17*0,5	C17+0,03	9,8*(1-(C18) ²)
20	5	0,675	0,3	8,9271		A19+0,5	B18+C18*0,5	C18+0,03	9,8*(1-(C19) ²)
21	5,5	0,825	0,33	8,741691		A20+0,5	B19+C19*0,5	C19+0,03	9,8*(1-(C20) ²)
22	6	0,99	0,36	8,538624		A21+0,5	B20+C20*0,5	C20+0,03	9,8*(1-(C21) ²)
23	6,5	1,17	0,39	8,317899		A22+0,5	B21+C21*0,5	C21+0,03	9,8*(1-(C22) ²)
24	7	1,365	0,42	8,079516		A23+0,5	B22+C22*0,5	C22+0,03	9,8*(1-(C23) ²)
25	7,5	1,575	0,45	7,823475		A24+0,5	B23+C23*0,5	C23+0,03	9,8*(1-(C24) ²)
26	8	1,8	0,48	7,549776		A25+0,5	B24+C24*0,5	C24+0,03	9,8*(1-(C25) ²)
27	8,5	2,04	0,51	7,258419		A26+0,5	B25+C25*0,5	C25+0,03	9,8*(1-(C26) ²)
28	9	2,295	0,54	6,949404		A27+0,5	B26+C26*0,5	C26+0,03	9,8*(1-(C27) ²)
29	9,5	2,565	0,57	6,622731		A28+0,5	B27+C27*0,5	C27+0,03	9,8*(1-(C28) ²)
30	10	2,85	0,6	6,2784		A29+0,5	B28+C28*0,5	C28+0,03	9,8*(1-(C29) ²)
31	10,5	3,15	0,63	5,916411		A30+0,5	B29+C29*0,5	C29+0,03	9,8*(1-(C30) ²)
32	11	3,465	0,66	5,536764		A31+0,5	B30+C30*0,5	C30+0,03	9,8*(1-(C31) ²)
33	11,5	3,795	0,69	5,139459		A32+0,5	B31+C31*0,5	C31+0,03	9,8*(1-(C32) ²)
34	12	4,14	0,72	4,724496		A33+0,5	B32+C32*0,5	C32+0,03	9,8*(1-(C33) ²)
35	12,5	4,5	0,75	4,291875		A34+0,5	B33+C33*0,5	C33+0,03	9,8*(1-(C34) ²)
36	13	4,875	0,78	3,841596		A35+0,5	B34+C34*0,5	C34+0,03	9,8*(1-(C35) ²)
37	13,5	5,265	0,81	3,373659		A36+0,5	B35+C35*0,5	C35+0,03	9,8*(1-(C36) ²)
38	14	5,67	0,84	2,888064		A37+0,5	B36+C36*0,5	C36+0,03	9,8*(1-(C37) ²)
39	14,5	6,09	0,87	2,384811		A38+0,5	B37+C37*0,5	C37+0,03	9,8*(1-(C38) ²)
40	15	6,525	0,9	1,8639		A39+0,5	B38+C38*0,5	C38+0,03	9,8*(1-(C39) ²)
41	15,5	6,975	0,93	1,325331		A40+0,5	B39+C39*0,5	C39+0,03	9,8*(1-(C40) ²)
42	16	7,44	0,96	0,769104		A41+0,5	B40+C40*0,5	C40+0,03	9,8*(1-(C41) ²)
43	16,5	7,92	0,99	0,195219		A42+0,5	B41+C40*0,5	C41+0,03	9,8*(1-(C42) ²)

Figura 5: Planilha eletrônica para o cálculo da posição, velocidade e aceleração da bolinha em função do tempo, calculado por meio da integração numérica. As colunas G até J exibem as fórmulas das células das colunas B até E.

Com base na planilha, é possível notar que quando chegamos em $\frac{v}{v_T} = 0,99$ transcorreram aproximadamente 16,5 s e a bolinha percorreu uma distância de aproximadamente 7,92 m. As figuras 6 e 7 também ajudam a chegarmos a essa conclusão.

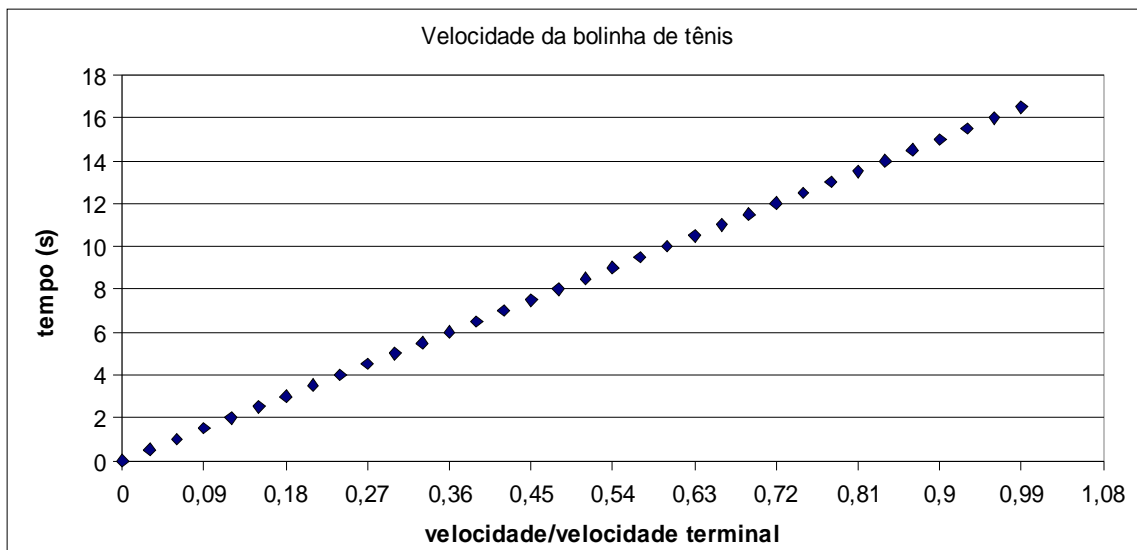


Figura 6: Gráfico do tempo de queda em função do quociente velocidade/velocidade terminal, calculado por meio da integração numérica.

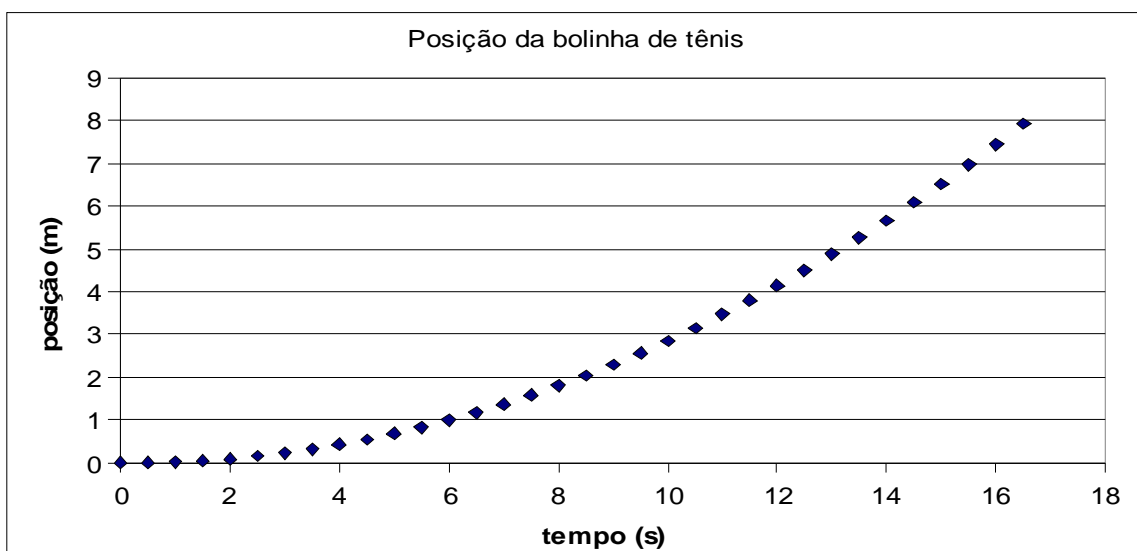


Figura 7: Gráfico da posição em função do tempo, calculado por meio da integração numérica.