Cálculo das incertezas de medida nos experimentos virtuais (WEB)

1. Introdução

A análise de um experimento de física exige a avaliação da confiabilidade dos valores medidos por meio dos instrumentos. Não é possível encontrar o valor exato de uma grandeza, uma vez que só pode ser medido com um instrumento, que sempre têm limitações; no entanto, muitas grandezas, tais como a carga do elétron e a constante universal dos gases, têm um valor bem determinado, que chamaremos aqui de *valor verdadeiro*. Assim, numa medida, obtemos um valor *próximo* ao *valor verdadeiro*. Embora seja impossível determinar a diferença entre o valor medido e o verdadeiro, porque este último é desconhecido, podemos definir grandezas que reflitam essa diferença de alguma forma, chamadas genericamente de **incerteza**, ao qual associamos o conceito de **precisão**, que é tanto maior na medida quanto menor a incerteza. Infelizmente, não podemos quantificar a incerteza simplesmente pela média da diferença entre o valor medido e o verdadeiro, porque a diferença, que pode ser tanto positiva quanto negativa, tem valor médio nulo, nada informativo. Isso nos obriga a recorrer a quantidades mais elaboradas.

A física usa as teorias da probabilidade e estatística para representar suas medidas. Em particular, na maioria dos experimentos, a medida de um conjunto de dados da grandeza x contendo N medições $\{x_i, i=1,...,N\}$ é representada pela média dos valores obtidos,

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.1}$$

enquanto a incerteza é quantificada pela *variância*, representada pelo símbolo σ_x^2 e calculada como

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \tag{1.2}$$

Note que a variância não tem a mesma dimensão física que a grandeza, de modo que a incerteza da medida é definida pelo *desvio-padrão,*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}\ , \tag{1.3}$$

onde σ é uma grandeza definida positiva, que representa a incerteza *em cada um* dos dados, ou seja, avalia a distância entre cada dado e o valor verdadeiro. Considerando que a média foi calculada sobre N dados, representamos a grandeza por

$$\bar{x} \pm \sigma_x \tag{1.4}$$

onde a precisão da média é descrita pelo desvio-padrão da média,

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1.5}$$

significando que o valor verdadeiro da grandeza está mais provavelmente dentro do intervalo $[\bar{x}-\sigma_x, \bar{x}+\sigma_x]$ do que fora dele. Note que, quando se toma um único dado, o desvio-padrão da média e o desvio-padrão do conjunto dos *N* dados da medida são idênticos.

A melhor forma de descobrir a incerteza de uma medição é repeti-la muitas vezes com instrumentos diferentes e determinar a variância pelo valor quadrado médio das diferenças com a média. No entanto, muitas vezes isso é praticamente impossível, em particular no caso das medições com instrumentos graduados, por exemplo, na medição do comprimento com uma régua milimetrada – onde conseguir muitas réguas de *fabricantes* diferentes? Nesses casos, costuma-se estimar o valor do desvio-padrão como a metade da menor divisão que se consegue ler na escala. Assim, quando se usa uma régua graduada em **milímetros**, a precisão do instrumento é aproximadamente 0,5 mm. Se a leitura da régua for 7,8 cm, o resultado deve ser representado assim:

$$7{,}80 \pm 0{,}05 \text{ cm}$$

significando que o valor verdadeiro do comprimento do objeto provavelmente se encontra entre 7,75 cm e 7,85 cm.

Nos experimentos virtuais, com freqüência leremos os valores das grandezas na escala de um instrumento, como no caso da *posição* do corpo (medida com uma trena) e o *instante* em que o corpo foi filmado (definido pelo cronômetro da filmadora, estampado no *time code*). Há outras grandezas, entretanto, cuja medição não pode ser direta, como é o caso da *velocidade* de um carrinho ao longo de uma trajetória, uma vez que não possuímos uma "régua de velocidades"; podemos, porém, calculá-la a partir das incertezas das grandezas que entram na fórmula de cálculo.

O objetivo desta orientação é ajudá-lo a compreender o modo pelo qual as incertezas foram calculadas em cada experimento virtual, detalhando os passos e as aproximações usadas. Na seção 3, classificamos as aplicações que ocorrem repetidamente e apresentamos as fórmulas genéricas deduzidas a partir da aplicação às situações que aparecem nos experimentos. A seção 4 apresenta alguns casos particulares, enquanto é na seção 2 que desenvolvemos a teoria geral da propagação da incerteza, da forma que é suficiente para as análises apresentadas aqui.

2. Propagação de incertezas

A medida da velocidade *v* é realizada indiretamente por meio de medidas de posição, x_2 e x_1, e tempo, t_2 e t_1, ou seja, calculamos

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{2.1}$$

A incerteza na velocidade depende das incertezas nas grandezas medidas diretamente, ou seja, das incertezas nas posições e nos tempos observados que são usados para calcular a velocidade. Essa situação, da incerteza numa grandeza deduzida provir das incertezas nas grandezas das quais ela depende, é tão comum que vamos escrever a fórmula que estabelece essa relação de uma maneira genérica, para facilitar a adaptação a outros casos.

Assim, definimos uma grandeza f que depende de outras grandezas $(a, b, ..., z)$ independentes entre si e que pode ser representada pela função

$f = f(a,b,...,z)$

Em nosso exemplo, *f* é a velocidade, enquanto *a*, *b*, *c* e *d* são x_2, x_1, t_2 e t_1, respectivamente.

A incerteza em f é dada pela **fórmula de propagação de incertezas**, enunciada da seguinte maneira: o desvio-padrão de f, σ_f, é a raiz quadrada da variância em f, calculada como

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{a}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{b}}\right)^2 \sigma_b^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^2 \sigma_z^2 \tag{2.2}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial a}\right|_{\substack{a=\bar{a}\\ b=\bar{b}\\ \ldots\\ z=\bar{z}}}$ (lê-se a derivada parcial de f em relação a a calculada no ponto $(\bar{a},\bar{b},...,\bar{z})$) e analogamente para $\frac{\partial f}{\partial \bar{b}}$, ... , $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. O símbolo $\frac{\partial f}{\partial a}$ representa a derivada parcial de *f* em relação a *a*, o que significa que pode ser obtida a partir da fórmula de *f* derivando a função considerando $b,c,...,z$ constantes – por exemplo, se $f = a^2b^3 + 5a + 7b$, as derivadas parciais de *f* são $\frac{\partial f}{\partial a} = 2ab^3 + 5$ e $\frac{\partial f}{\partial b} = 3a^2b^2 + 7$, de modo que $\frac{\partial f}{\partial \bar{a}} = 2\bar{a}\bar{b}^3 + 5$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{b}} = 3\bar{a}^2\bar{b}^2 + 7$.

É importante lembrar que, por definição, σ_f, $\sigma_a, \sigma_b, ..., \sigma_z$ são valores positivos, obtidos como a raiz positiva da variância da variável correspondente. Não podemos, também, tratar os desvios padrões como médias, por exemplo, onde a média da soma é a soma das médias; nunca se somam ou subtraem desvios padrões, mas as variâncias são aditivas.

Condições de validade.

Esta fórmula tem validade geral, não só nos casos particulares que detalharemos abaixo, desde que duas condições sejam obedecidas:

i) As variáveis do conjunto $(\bar{a},\bar{b},...,\bar{z})$ são estatisticamente independentes. Isso significa que nenhuma das variáveis pode ser calculada a partir de uma ou algumas das variáveis do conjunto $(\bar{a},\bar{b},...,\bar{z})$ nem sua medição interfere na medição de outra. Se isso acontecer, é necessário expandir suas fórmulas na expressão de *f* antes de aplicar a fórmula de propagação. O que acontece é que cada termo da fórmula (2.2) precisa representar toda a dependência na variável em relação à qual se calculou a derivada parcial – não pode haver partes escondidas em alguma das outras variáveis. Note que se alguma das grandezas $(\bar{a},\bar{b},...,\bar{z})$ for medida diretamente a partir de outras grandezas que não estejam nesse conjunto, podemos aplicar a fórmula de propagação de incertezas isoladamente a elas e usar as variâncias calculadas na fórmula de propagação.

ii) Para cada grandeza x, precisamos que $\sigma_x << \bar{x}$. Em muitas das fórmulas de propagação que veremos, as variáveis aparecem no denominador, o que causa problemas se a variável puder ser nula, uma vez que seu inverso não será definido. Mesmo que $\bar{x}$ não seja nulo, quando $\sigma_x \approx \bar{x}$, há probabilidade de uma dada observação de x dar o resultado nulo. A fórmula de propagação (2.2) supõe que as observações possam ser repetidas infinitas vezes – o resultado nada mais é do que o valor esperado para a média de infinitas observações, assim nunca poderemos ter um valor indefinido dentro do cálculo.

Uma interpretação importante.

Vamos destrinchar um pouco mais a equação (1.2) e chegar a alguns resultados importantes nas futuras análises dos experimentos. Se x é a medida de uma **variável aleatória** (ou seja, uma grandeza tal que o resultado experimental é diferente a cada realização da medição), teremos

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 .$$

Se efetuarmos o quadrado e passarmos para o trinômio, teremos:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2\right),$$

Lembremos ainda que a equação (1.1) pode ser escrita como $\bar{x}N = \sum_{i=1}^{N} x_i$, que podemos substituir na equação acima, no segundo termo, e em seguida distribuir o fator comum, com o que obtemos:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N-1} - \frac{2\bar{x}^2 N}{N-1} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2}{N-1}} \tag{2.3}$$

Podemos simplificar, lembrando que

$\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2 = \bar{x}^2 + \bar{x}^2 + \ldots + \bar{x}^2$, num total de N termos, do modo que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2 = N\,\bar{x}^2} \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3), temos:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N-1} - \frac{N\,\bar{x}^2}{N-1}} \tag{2.5}$$

Para a média dos quadrados dos dados, temos:

$< x^2 >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$, donde vem: $N < x^2 >= \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, que podemos substituir em (2.5) e simplificar, com o resultado

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{N}{N-1}\left[< x^2 > - \bar{x}^2\right]} \tag{2.6}$$

Quando o número *N* de dados é muito grande, podemos aproximar o fator de fora dos parênteses pela unidade e, quando a média da variável for nula, teremos:

$$\boxed{\sigma_x^2 = x_i^2} \tag{2.7}$$

Usaremos este resultado na estimativa da incerteza na **Energia Cinética** e **Energia Potencial Elástica.**

3. Aplicações comuns

3.1 Soma ou subtração.

Vemos com relativa freqüência medidas de grandezas baseadas na **variação** (que é entendida como uma subtração) de outras grandezas, como é o caso da velocidade ($v = \Delta x / \Delta t$), quociente das variações de posição e tempo. Aplicando-se a fórmula de propagação de incertezas para o deslocamento $\Delta x(x, x_0) = x - x_0$, teremos, tomando-se Δx como certa função A, $\Delta x = A$

$$\Delta x(x, x_0) = A(x, x_0) = x - x_0 \Rightarrow \sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{x}}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_0}\right)^2 \sigma_{x_0}^2 \tag{3.1}$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial A / \partial x = 1$ e $\partial A / \partial x_0 = -1$. Substituindo-se tais valores em (3.1), teremos:

$$\sigma_A^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{x_0}^2 \tag{3.2}$$

Como $\sigma_x = \sigma_{x_0}$, temos: $\sigma_A^2 = 2\sigma_x^2 \Leftrightarrow \sigma_A = \sqrt{2}\sigma_x$.

$$\boxed{\sigma_{\Delta x} = \sqrt{2}\sigma_x} \tag{3.3}$$

A incerteza no intervalo de tempo pode ser calculada da mesma forma, logo:

$$\boxed{\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t} \tag{3.4}$$

As fórmulas de incerteza (3.3) e (3.4) são usadas nos cálculos de incerteza da **velocidade** dos corpos, nos experimentos de Trilho de Ar, Atrito, Colisões, Conservação de Energia e Dinâmica de Rotações.

A relação (3.2) pode ser generalizada para um número qualquer de variáveis. Se a função *f* é dada por $f = a \pm b \pm ... \pm z$, sua variância pode ser expressa como:

$$\boxed{\sigma_f^{\ 2} = \sigma_a^{\ 2} + \sigma_b^{\ 2} + ... + \sigma_z^{\ 2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma_f = +\sqrt{\sigma_a^{\ 2} + \sigma_b^{\ 2} + ... + \sigma_z^{\ 2}}} \tag{3.5}$$

sempre tomando σ_f como a raiz positiva, pois, por definição, o desvio-padrão tem valor positivo.

3.2 Produto ou razão

Aplicando-se a fórmula de propagação de incertezas à quantidade de movimento linear $p = mv$, onde *m* é a massa e *v* é a velocidade do sistema estudado, teremos:

$$p(m,v) = mv \Rightarrow \sigma_p^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 \tag{3.6}$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial p / \partial m = v$ e $\partial p / \partial v = m$ que, aplicando na expressão acima, dá:

$$\sigma_p^2 = v^2 \sigma_m^2 + m^2 \sigma_v^2 \tag{3.7}$$

Podemos ainda simplificar a expressão (3.7), através dos seguintes passos:

$$\sigma_p^2 = v^2 \sigma_m^2 + m^2 \sigma_v^2 \Leftrightarrow \sigma_p^2 = m^2 v^2 \left(\frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2}\right) \Leftrightarrow \sigma_p^2 = \underbrace{(mv)}_{p}^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2\right] \tag{3.8}$$

Na situação especial em que a incerteza da massa puder ser desconsiderada, teremos $\sigma_m \approx 0$, de modo que a variância reduz-se a

$$\boxed{\sigma_p^2 = p^2 \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 \Leftrightarrow \sigma_p = p\frac{\sigma_v}{v}} \tag{3.9}$$

Tais valores de incertezas são utilizados nos cálculos de **quantidade de movimento linear** dos corpos, no experimento de Colisões.

No caso geral, para uma função *f* dada por $f = a\,b \quad ou \quad f = \frac{a}{b}$, sua incerteza pode ser expressa como:

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sigma_f = +f\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}} \tag{3.10}$$

3.3 Razão das diferenças

Para calcular a incerteza associada à velocidade de um corpo, primeiro agruparemos as medidas de posição e tempo em duas funções, $\Delta x = A$ e $\Delta t = B$, e aplicaremos a fórmula de propagação de incertezas (2.2), depois substituiremos as incertezas de A e B. Assim,

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A}{B} \Rightarrow \sigma_v^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial v / \partial A = 1/\Delta t$ e $\partial v / \partial B = -\Delta x / \Delta t^2$.

$$\sigma_v{}^2 = \frac{\sigma_A{}^2}{B^2} + \frac{A^2 \sigma_B{}^2}{B^4} \Leftrightarrow \sigma_v{}^2 = \frac{1}{B^2}\left(\sigma_A{}^2 + \frac{A^2 \sigma_B{}^2}{B^2}\right) \tag{3.11}$$

Lembrando que $A = \Delta x$ e $B = \Delta t$ e usando (3.3) e (3.4) na expressão acima, teremos:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2\sigma_x^2 + \left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}\right)\left(2\sigma_t^2\right)\right] \Rightarrow \sigma_v^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2\sigma_x^2 + v^2\left(2\sigma_t^2\right)\right] \Rightarrow \sigma_v^2 = \frac{2}{\Delta t^2}\left[\sigma_x^2 + v^2\sigma_t^2\right]$$

Extraindo a raiz quadrada, teremos, portanto:

$$\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sqrt{\sigma_x^2 + v^2\sigma_t^2} \tag{3.12}$$

Na situação dos experimentos virtuais, em que a incerteza do tempo pode ser desconsiderada, teremos $\sigma_t \approx 0$ e a expressão acima se reduz a:

$$\boxed{\sigma_v = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sigma_x} \tag{3.13}$$

que é a fórmula aplicada nas incertezas da **velocidade** dos corpos nos experimentos de Trilho de Ar, Atrito, Colisões, Conservação de Energia e Dinâmica de Rotações.

De um modo geral, para uma função *f*, dada como: $f = \frac{\Delta a}{\Delta b}$, podemos aplicar o raciocínio acima e representar a incerteza de *f* decorrente das incertezas em *a* e *b* como:

$$\boxed{\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta a}}{\Delta a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta b}}{\Delta b}\right)^2}} \tag{3.14}$$

4. Aplicações aos experimentos

4.1 Energia cinética

Aplicando a expressão de propagação de incertezas (2.1) para a energia cinética *K* calculada a partir da massa *m* e da velocidade *v*,

$$K(m, v) = \frac{mv^2}{2}$$

cujas derivadas parciais são $\partial K/\partial m = v^2/2$ e $\partial K/\partial v = mv$, obtemos, depois das devidas simplificações,

$$\sigma_K^2 = \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \sigma_m^2 + (mv)^2 \sigma_v^2 \tag{4.1}$$

Esta expressão pode ser transformada para ficar com a aparência da fórmula geral dos produtos e quocientes:

$$\sigma_K^2 = \frac{m^2 v^4}{4}\left(\frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_v^2}{v^2}\right) \Leftrightarrow \sigma_K^2 = \underbrace{\left(\frac{mv^2}{2}\right)}_{K}^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_v}{v}\right)^2\right]$$

donde, extraindo-se a raiz quadrada, temos

$$\sigma_K = K\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_v}{v}\right)^2} \tag{4.2}$$

O caso geral relacionado a este exemplo e que pode ser deduzido por esse procedimento é o desvio-padrão do *produto de potências*,

$$\boxed{f = a^m b^n c^p}$$

que, calculando de maneira análoga ao que fizemos acima, dá:

$$\boxed{\sigma_f = f\sqrt{\left(m\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(n\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(p\frac{\sigma_c}{c}\right)^2}} \tag{4.3}$$

ou seja, os expoentes se tornam multiplicadores das incertezas das variáveis correspondentes.

Na situação especial em que a incerteza da massa puder ser desconsiderada, teremos $\sigma_m \approx 0$ e, de (3.16):

$$\boxed{\sigma_K = K\frac{2\sigma_v}{v}} \tag{4.4}$$

A grandeza *v* provém de uma razão de variações $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ e, na situação em que $\Delta x \approx 0$, $v \approx 0$ e a fórmula (3.18) não pode ser aplicada. No entanto, *v* apareceu no denominador por causa de uma transformação algébrica durante a dedução. Se voltarmos na relação (3.15), lembrarmos que $\sigma_m \approx 0$ e utilizarmos a idéia descrita no capítulo 2, em **"Uma interpretação importante**", podemos evitar esse problema.. Podemos utilizar a equação (2.7) e teremos:

$$\sigma_K^2 = (mv)^2 \sigma_v^2$$

$$\sigma_K^2 = m^2 (\sigma_v^2)^2$$

de onde, depois da raiz quadrada, chegamos a

$$\boxed{\sigma_k = m\sigma_v{}^2} \tag{4.5}$$

Estas fórmulas de incertezas são empregadas nos cálculos de **energia cinética** dos corpos, no experimento de Energia.

4.2 Energia potencial elástica

Aplicando-se a expressão de propagação de incertezas para a energia potencial, teremos, tomando-se $A = \Delta x$:

$$U(x, x_0, k) = \frac{k(\Delta x)^2}{2} = U(\Delta x, k) \Leftrightarrow \sigma_U^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 \tag{4.6}$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial U / \partial k = (\Delta x)^2 / 2$ e $\partial U / \partial A = k\Delta x$. Como $\sigma_A = \sigma_{\Delta x}$, teremos, substituindo-se em (4.6) e realizando-se as devidas simplificações:

$$\boxed{\sigma_U^2 = \left(\frac{(\Delta x)^2}{2}\right)^2 \sigma_k^2 + (k\Delta x)^2 \sigma_{\Delta x}^2} \tag{4.7}$$

$$\sigma_U^2 = \frac{k^2(\Delta x)^4}{4}\left(\frac{\sigma_k^2}{k^2} + \frac{4\sigma_{\Delta x}^2}{(\Delta x)^2}\right) \Leftrightarrow \sigma_U^2 = \underbrace{\left(\frac{k(\Delta x)^2}{2}\right)^2}_{U}\left[\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2\right]$$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos, portanto:

$$\sigma_U = U\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2} = U\sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{\Delta x}\right)^2} \tag{4.8}$$

Na situação especial em que a incerteza da constante elástica puder ser desconsiderada, teremos $\sigma_k \approx 0$ e, de (4.8):

$$\boxed{\sigma_U = U\frac{2\sqrt{2}\sigma_x}{|\Delta x|}} \tag{4.9}$$

É importante observar que em certo instante de tempo, $\Delta x \approx 0$, então $\sigma_u \cong U$. Portanto, a equação (4.9) não pode ser aplicada. Se voltarmos na relação (4.7), e lembrarmos que $\sigma_k \approx 0$ e utilizarmos a idéia descrita no capitulo 2, em **"Uma interpretação importante"**. Podemos utilizar a equação (2.7) e teremos:

$$\sigma_U^2 = (k\Delta x)^2 \sigma_{\Delta x}^2$$

$$\boxed{\sigma_u = k\sigma_x^{\ 2}} \tag{4.10}$$

Tais valores de incertezas são utilizados nos cálculos de **energia potencial** dos corpos, no experimento de Energia.

4.3 Energia mecânica

Aplicando-se a expressão de propagação de incertezas para a energia mecânica, teremos:

$$E(K,U) = K + U \Leftrightarrow \sigma_E^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial K}\right)^2 \sigma_K^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial U}\right)^2 \sigma_U^2 \tag{4.11}$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial E/\partial U = 1$ e $\partial E/\partial K = 1$. Substituindo-se em (4.10) e realizando-se as devidas simplificações, teremos:

$$\boxed{\sigma_E^2 = \sigma_K^2 + \sigma_U^2 \Leftrightarrow \sigma_E = \sqrt{\sigma_K^2 + \sigma_U^2}} \tag{4.12}$$

Lembre-se que o resultado obtido vale ao caso geral.

Tais valores de incertezas são utilizados nos cálculos de **energia mecânica** dos corpos, no experimento de Energia.

4.4 Velocidade angular na forma $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

Pela fórmula de propagação de incertezas, teremos, tomando-se $\Delta\varphi = A$ e $\Delta t = B$:

$$\omega(\Delta\varphi, \Delta t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{A}{B} \Rightarrow \sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2 \tag{4.13}$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial\omega/\partial A = 1/\Delta t$ e $\partial\omega/\partial B = -\Delta\varphi/\Delta t^2$. Logo, como $\sigma_A = \sigma_{\Delta\varphi}$ e $\sigma_B = \sigma_{\Delta t}$, teremos, de (4.13):

$$\sigma_\omega{}^2 = \frac{\sigma^2{}_{\Delta\varphi}}{\Delta t^2} + \frac{\Delta x^2 \sigma_{\Delta t}{}^2}{\Delta t^4} \Leftrightarrow \sigma_\omega{}^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\sigma_{\Delta\varphi}{}^2 + \frac{\Delta\varphi^2 \sigma_{\Delta t}{}^2}{\Delta t^2}\right)$$

Substituindo-se (3.3) e (3.4) na expressão acima, teremos:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2\sigma_\varphi^2 + \left(\frac{\Delta\varphi^2}{\Delta t^2}\right)\left(2\sigma_t^2\right)\right] \Rightarrow \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\Delta t^2}\left[2\sigma_\varphi^2 + \omega^2\left(2\sigma_t^2\right)\right] \Rightarrow \sigma_\omega^2 = \frac{2}{\Delta t^2}\left[\sigma_\varphi^2 + \omega^2\sigma_t^2\right]$$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos, portanto:

$$\sigma_\omega = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sqrt{\sigma_\varphi^2 + \omega^2\sigma_t^2} \tag{4.14}$$

Na situação especial em que a incerteza do tempo puder ser desconsiderada, teremos $\sigma_t \approx 0$ e, de (4.14):

$$\boxed{\sigma_\omega = \frac{\sqrt{2}}{\Delta t}\sigma_\varphi} \tag{4.15}$$

4.5 Velocidade angular na forma $\omega = \dfrac{v}{r}$

Pela fórmula de propagação de incertezas, teremos:

$$\omega(v,r) = \frac{v}{r} \Rightarrow \sigma_\omega^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 \qquad (4.16)$$

Calculando-se as derivadas, teremos $\partial\omega/\partial v = 1/r$ e $\partial\omega/\partial r = -v/r^2$. Logo, teremos, de (4.16):

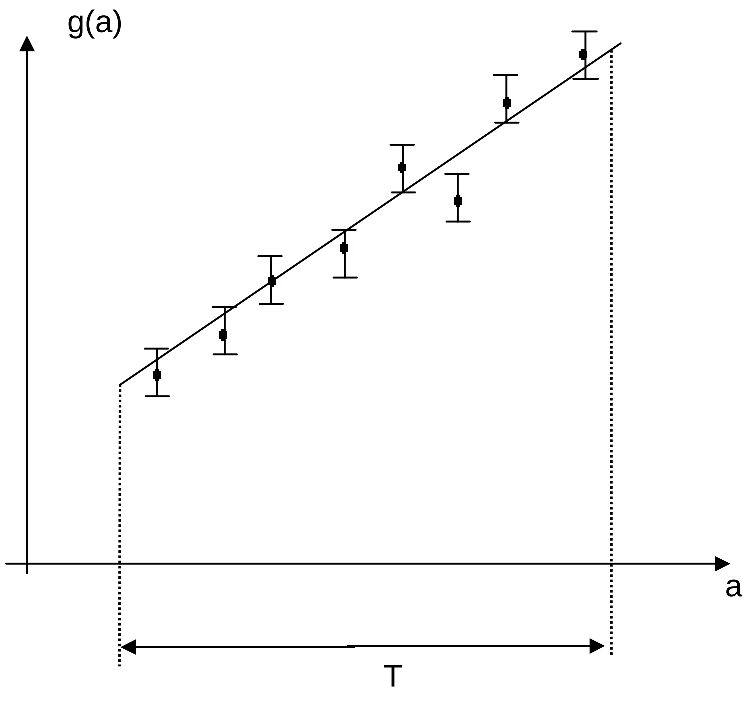
$$\sigma_\omega{}^2 = \frac{\sigma^2{}_v}{r^2} + \frac{v^2\sigma_r{}^2}{r^4} \Leftrightarrow \sigma_\omega{}^2 = \frac{1}{r^2}\left(\sigma_v{}^2 + \frac{v^2\sigma_r{}^2}{r^2}\right)$$

Extraindo-se a raiz quadrada e utilizando as devidas substituições teremos, portanto:

$$\boxed{\sigma_\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\sigma_v^2 + \omega^2\sigma_r^2}} \qquad (4.17)$$

4.6 Reta media

Ao inserir os pontos de uma determinada função *g*, tal que *f* uma grandeza, pode ser representada por *f= g'(a),* num gráfico de *a por g*, teremos:



Onde *T* é o intervalo compreendido pela variável a. A reta media pode representar a grandeza *f*, e a incerteza nesta reta pode representar a incerteza da grandeza *f*.

Podemos calcular esta incerteza na reta utilizando a fórmula:

$$\boxed{\sigma_f = \frac{\sigma_g}{T}\sqrt{\frac{12}{N}}} \tag{4.18}$$

Onde N é o numero de pontos medidos para *g(a)*.

Este resultado pode ser interpretado, quando pensamos, por exemplo, no deslocamento como *g(a)* e o tempo como *a*, assim:

$$\sigma_V = \frac{\sigma_x}{T}\sqrt{\frac{12}{N}} \tag{4.19}$$

Como analisamos *velocidade v*, por meio do deslocamento *x* e o tempo *t*.

$$v(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se analisarmos o resultado que chegamos em (3,13), com a expressão acima (4.19) perceberemos que são muito parecidas. Porém, a diferença se dá quando analisamos não apenas uma variação pequena do espaço e sua influência, mas como todos os pontos, logo todo intervalo se comporta e consequentemente os pontos que os compreende.

5. Outras aplicações

5.1 Torque

Aplicando-se a expressão de propagação de incerteza, teremos:

$$\tau(m, g, d) = mgd \Leftrightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 \tag{5.1}$$

Calculando-se as derivadas parciais, teremos $\partial\tau/\partial m = gd$, $\partial\tau/\partial g = md$ e $\partial\tau/\partial m = mg$. Substituindo-se tais valores em (4.20) e simplificando-se a expressão, teremos:

$$\sigma_\tau^2 = g^2 d^2 \sigma_m^2 + m^2 d^2 \sigma_g^2 + m^2 g^2 \sigma_d^2 \Leftrightarrow \sigma_\tau^2 = \left(\underbrace{mgd}_{\tau}\right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2\right]$$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos, por fim:

$$\sigma_\tau = |\tau|\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

Desprezando-se a incerteza da aceleração da gravidade ($\sigma_g \approx 0$), teremos, portanto:

$$\boxed{\sigma_\tau = |\tau|\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}} \tag{5.2}$$

5.2 Momento de inércia de um cilindro uniforme no eixo longitudinal

Aplicando-se a expressão de propagação de incerteza, teremos:

$$I(m,r) = \frac{mr^2}{2} \Leftrightarrow \sigma_I^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)^2 \sigma_r^2 \tag{5.3}$$

Calculando-se as derivadas parciais, teremos $\partial I/\partial m = r^2/2$ e $\partial I/\partial r = mr$. Substituindo-se tais derivadas em (5.3) e realizando-se as devidas simplificações, tem-se:

$$\sigma_I^2 = \frac{r^4}{4}\sigma_m^2 + m^2 r^2 \sigma_r^2 \Leftrightarrow \sigma_I^2 = \left(\underbrace{\frac{mr^2}{2}}_{I}\right)^2 \left[\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2\right]$$

Extraindo-se a raiz quadrada, teremos, por fim:

$$\boxed{\sigma_I = I\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_r}{r}\right)^2}} \tag{5.4}$$

5.3 Aceleração angular na forma $\alpha = \dfrac{\tau}{I}$

Aplicando-se a expressão de propagação de incerteza e pela Segunda Lei de Newton para a Rotação, teremos:

$$\alpha(\tau, I) = \frac{\tau}{I} \Leftrightarrow \sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)^2 \sigma_\tau^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 \tag{5.5}$$

Calculando-se as derivadas parciais, teremos: $\partial\alpha/\partial\tau = 1/I$ e $\partial\alpha/\partial I = -\tau/I^2$. Substituindo as derivadas em (5.5), teremos, realizando-se as devidas simplificações:

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{I^2}\sigma_\tau^2 + \frac{\tau^2}{I^4}\sigma_I^2 \Leftrightarrow \sigma_\alpha^2 = \underbrace{\frac{\tau}{I}}_{\alpha}\left[\left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2\right]$$

Extraindo-se a raiz quadrada, temos, por fim:

$$\boxed{\sigma_\alpha = |\alpha|\sqrt{\left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}} \tag{5.6}$$

5. Bibliografia

- **Tratamento estatístico de dados em física experimental –** Helene, Otaviano Augusto Marcondes e Vanin, Vito Roberto, editora Edgard Blucher, 2ª edição, 1991.

- **Fundamentos da teoria de erros –** Vuolo, José Henrique;

- **Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). Bureau Internacional de pesos e medidas (2004)**