

A Cicloide – parte I do experimento Rolamento sem Escorregamento

A) Introdução ao experimento

O arranjo consiste em um cilindro rígido e homogêneo que rola sobre uma superfície plana e horizontal. Na face circular que aparece nas imagens, fixou-se um papel em que foram marcados dois diâmetros que se cruzam no eixo que passa pelo centro de massa, quatro pontos na borda do círculo e outros quatro pontos a meia distância entre o centro e a borda.

O movimento do cilindro é um rolamento sem deslizamento ou rolamento puro porque, em uma volta completa, cada ponto da superfície cilíndrica entra em contato com um e somente um ponto do plano, e o cilindro avança uma distância igual à sua circunferência. A trajetória de um ponto da superfície lateral do cilindro que rola sem escorregar é uma curva com o nome de *cicloide*.

A análise deste experimento será realizada em três etapas. O objetivo desta primeira parte é determinar as coordenadas das trajetórias de um ponto da superfície lateral do cilindro e do Centro de Massa (CM) e observar suas características gerais.

B) Procedimento de análise

B1. Apreciação geral do movimento. Assista aos vídeos do experimento e observe atentamente o movimento do cilindro, em especial, de um dos pontos da borda. Como você descreveria a trajetória desse ponto? E a do ponto do centro do círculo, onde o eixo que passa pelo CM cruza a superfície frontal?

B2. Escolha do ponto a observar e do sistema de referência. Observe as imagens do conjunto que lhe foi designado e adote um ponto de referência no quadriculado, para usar como origem do sistema de coordenadas cartesianas. O quadriculado possui, vertical e horizontalmente, linhas finas pretas separadas em 0,5 cm, linhas pretas um pouco mais grossas a cada 1 cm, e há uma linha vermelha a cada 5 cm, tanto vertical quanto horizontalmente. Desejamos medir as posições de um ponto P no perímetro do círculo de modo que seja possível levantar a trajetória correspondente a *uma rotação completa*. Para isso, antes do início das medições, percorra todas as imagens do seu conjunto, localize quais pontos *encostam duas vezes no plano* e selecione um deles para seguir o movimento ao longo do tempo. Registre a cor do ponto que corresponde ao ponto P selecionado.

B3. Modelagem. Escolha quais elementos do arranjo experimental entrarão no modelo do sistema com o objetivo de interpretar o movimento do cilindro. Elabore o modelo de modo a identificar a trajetória de P, $(x_P(t), y_P(t))$. Comece com um esboço, em que identifica os componentes do sistema e as grandezas necessárias ao estudo do movimento, e termine com as equações de movimento do CM; como o cilindro é homogêneo, o CM está no seu eixo de simetria, e como o plano quadriculado é perpendicular ao eixo do cilindro, o centro da sua face circular tem as mesmas coordenadas O_x e O_y que o CM.

B4. Medições. Monte uma tabela, associando a cada quadro i , o instante de tempo t_i , as posições horizontal (x) e vertical (y) de P e do CM: $x_P(t_i)$, $y_P(t_i)$, $x_{CM}(t_i)$ e $y_{CM}(t_i)$; é interessante orientar o eixo das abscissas de modo que cresça da direita para a esquerda, pois esse foi o sentido de lançamento do cilindro.

Construa o gráfico da trajetória de P usando todo o conjunto das coordenadas $\{(x_P(t_i), y_P(t_i))\}$. Nesse mesmo gráfico, superponha o da trajetória do CM, usando todo o conjunto $\{(x_{CM}(t_i), y_{CM}(t_i))\}$. A fim de visualizar a trajetória no gráfico de modo realista, **adote a mesma escala nos dois eixos coordenados**.

Adote para o desvio-padrão das posições horizontais e verticais um valor igual à metade ou pouco menos do menor intervalo que se pode medir com certeza, em torno de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ da separação entre linhas pretas, isto é, $\sigma_x = \sigma_y \cong 0,05$ cm ou um pouco mais. Ignore a incerteza no tempo.

B5. Localização dos extremos da trajetória. Localize os instantes em que o ponto P está:

- i. na altura máxima, h .
- ii. sobre a trajetória do CM, ou o mais próximo possível dela, tanto à esquerda, e , quanto à direita, d .
- iii. encostado no plano horizontal, ou o mais próximo possível dele, o .

No item ii, escolha ambos os instantes e, do item iii, escolha só um, o que chegar mais próximo do plano horizontal. Registre os números dos quadros correspondentes (números i das imagens da sua planilha), que formarão o conjunto $\{h, e, d, o\}$, sendo: h o quadro em que P está na altura máxima, e e d , aqueles em que a trajetória de P cruza a do CM dos lados esquerdo e direito, respectivamente, e o para o quadro em que P encosta no plano horizontal. Os instantes de tempo correspondentes a essas imagens serão identificados por $\{t_h, t_e, t_d, t_o\}$ no texto que segue.

B6. Grandezas cinemáticas. A partir da tabela do item **B4**, determine as componentes horizontal e vertical das velocidades de P e do CM, $v_x(t_i)$ e $v_y(t_i)$, respectivamente, a partir das velocidades médias de P e de CM para os intervalos de tempo $[t_{i+1}, t_{i-1}]$, com $i \in \{h, e, d, o\}$. Neste caso em que as imagens estão separadas por intervalos de tempos iguais, o instante médio desse intervalo, \bar{t}_i , corresponde ao instante em que foi tomado o quadro entre as duas imagens consideradas no cálculo, ou seja

$$\bar{t}_i = t_i = \frac{t_{i-1} + t_{i+1}}{2}$$

Assim, a velocidade média é uma boa aproximação para a velocidade no instante médio, de modo que

$$v_x(t_i) = \bar{v}_x(t_{i-1}; t_{i+1}) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (1)$$

$$v_y(t_i) = \bar{v}_y(t_{i-1}; t_{i+1}) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (2)$$

em que x e y se referem às posições em relação ao plano horizontal do ponto P, $(x_P(t_i), y_P(t_i))$, ou do CM, $(x_{CM}(t_i), y_{CM}(t_i))$, lidos das imagens. Determine o desvio padrão nas componentes da velocidade. Para a componente horizontal, ele vale

$$\sigma_{v_x} = \frac{\sqrt{2} \sigma_x}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (3)$$

com o mesmo valor para a componente y , uma vez que $\sigma_x = \sigma_y$. Além disso, esse valor é o mesmo para todos os instantes, pois os intervalos de tempo entre quadros sucessivos são iguais.

B7. Representação da velocidade. Represente, no gráfico do item **B4**, as velocidades de P nos instantes t_h, t_e, t_d e t_o ; esses instantes estão definidos no item **B5** acima. Para isso, escolha uma escala adequada, por exemplo 1 cm : 100 cm/s ou 1 cm : 50 cm/s, dependendo do tamanho em que fez seus gráficos, e desenhe as flechas representando os vetores. Os passos para fazer isso no Excel são:

- Selecione o gráfico (isso abre o menu Ferramentas de Gráfico)
- Selecione Inserir
- Selecione Ilustração
- Selecione Formas
- Selecione a seta
- Crie uma seta (isso abre Ferramentas de desenho) mais ou menos na direção correta.
- Garanta que a seta esteja selecionada e, no menu Tamanho, (em Ferramentas de desenho/Forma de Formato), insira os tamanhos de cada componente de acordo com o resultado da aplicação da sua escala aos valores calculados de v_x e v_y no item **B6**. Note que a caixa de Tamanho só permite números positivos, assim o sinal da componente da velocidade fica escolhido quando você orienta a seta que representa a velocidade para cima ou para baixo do desenho.

C) Procedimento de elaboração da síntese

Cada grupo deve entregar um único documento, com pelo menos as seguintes seções:

C1. Identificação: liste os nomes dos membros do grupo e indique o conjunto de dados analisado.

C2. Descrição do Experimento: descreva o arranjo experimental de forma sucinta. Não deixe de mencionar os principais equipamentos e componentes empregados, com suas características.

C3. Expectativas Iniciais: abrangendo pelo menos as questões do item **B1**, registre suas previsões após assistir aos vídeos e refletir sobre o experimento. Descreva sucintamente o modelo desenvolvido no item **B3**. Eventuais erros e omissões nessas previsões ou no modelo não influirão na nota.

C4. Dados Obtidos: apresente as tabelas obtidas nos itens **B4** a **B6**. Verifique se expressou os valores das grandezas em unidades apropriadas e com número adequado de algarismos significativos.

C5. Análise de Dados:

- a) Apresente os gráficos construídos no item B4 e interprete seus significados.
- b) Interprete/descreva as trajetórias do ponto P e do CM em relação a um ponto fixo no plano. Compare as velocidades de P e do CM, e descreva seus comportamentos com o tempo.
- c) Relacione a distância entre os dois pontos do plano horizontal em que o ponto P encostou com a altura máxima de P relativa ao plano em que o cilindro rola. Pode-se afirmar que a cicloide é uma semicircunferência com o dobro do raio do cilindro? No gráfico da trajetória, desenhe também uma semicircunferência de raio $2R$ com centro no ponto oposto ao máximo de y_P , a fim de verificar a possível semelhança entre as curvas.

C6. Discussão

Comece com a comparação de sua previsão do item **B1** com os resultados da análise em **C5**. Relacione as características gerais da trajetória obtida. Procure outro fenômeno ou aplicação em que a cicloide apareça ou seja usada e descreva-o resumidamente.