

Apêndice ao Roteiro do Experimento “Força de Atrito Variável”

I. Sinais na Equação do Movimento

Nas figuras abaixo, o referencial xOy foi escolhido de acordo com o Roteiro da **Parte I**, de modo que a velocidade da moeda é positiva na direção x , enquanto na direção y ela começa positiva, decresce e se torna negativa, com um valor absoluto crescente após o alcance do ponto de máxima altura ($v_y = 0$). As **Figuras 1** e **2** abaixo mostram o diagrama de forças como vistos do lado e acima do plano inclinado, respectivamente. Uma vez que a moeda se movimenta apenas na superfície do plano inclinado, as forças na direção perpendicular à superfície do plano estão equilibradas, i.e., $N = mg \cos \theta$ ao longo de todo o movimento. A força resistente depende da velocidade, de modo que o diagrama quando a moeda sobe o plano é diferente daquele da descida.

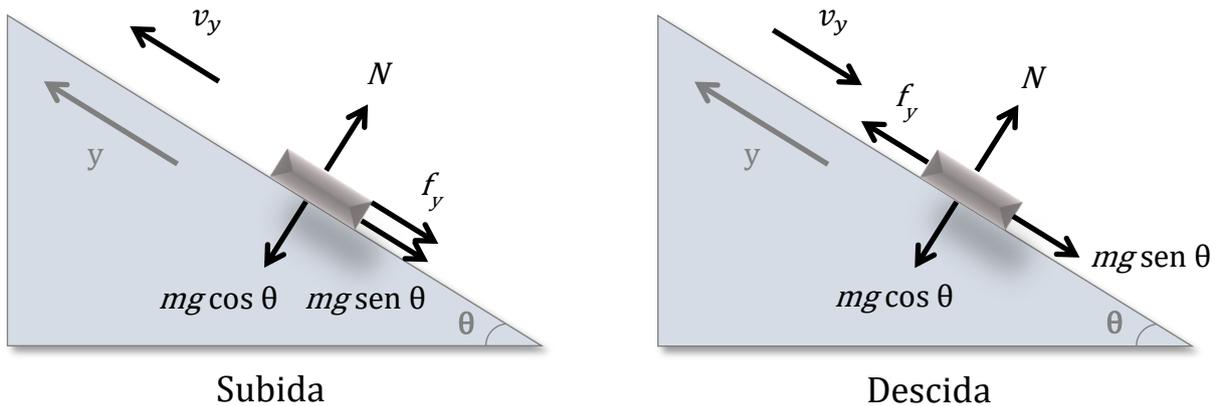


Figure 1. Diagrama de forças sobre a moeda observando lateralmente o plano inclinado, em que os símbolos mg , N e f_y representam o peso, a força normal e a componente y da força resistente, respectivamente, e θ , o ângulo entre os planos horizontal e inclinado.

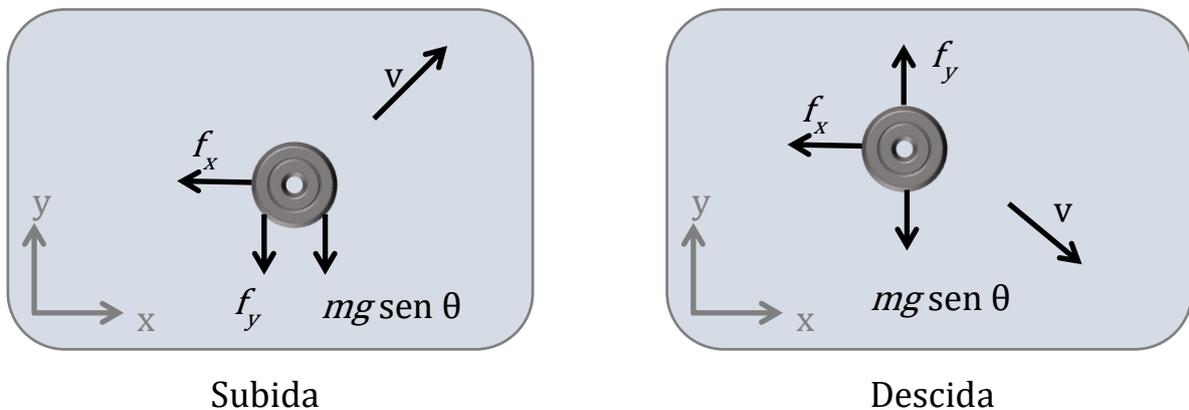


Figure 2. Mesmo diagrama da **Fig. 1**, mas observando o plano inclinado por cima. f_x representa a componente x da força resistente; os outros símbolos estão definidos na legenda da **Fig. 1**.

A equação de movimento é obtida da 2ª lei de Newton,

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a},$$

onde $\vec{F}_R = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ é a força resultante e \vec{a} , a aceleração. As projeções nas direções x e y são:

$$\begin{cases} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \end{cases}$$

Neste experimento, mede-se a aceleração e deduz-se a força resultante, para dela isolar a força resistente, uma vez que o peso é constante. Assim, os sinais das componentes da força resistente virão das propriedades algébricas das equações, de modo que se escreve:

$$\vec{f} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j}$$

Do diagrama de corpo livre das figs. 1 e 2, a força resultante tem componentes:

$$F_x = f_x$$

$$F_y = f_y - mg \operatorname{sen} \theta$$

em que a intensidade da aceleração gravitacional é representada pela constante $g > 0$. O sinal negativo da componente do peso é necessário para expressar corretamente sua orientação no sistema de referência escolhido – é preciso atribuir o sinal adequado a cada dado que é uma grandeza vetorial para que, depois das manipulações algébricas, as grandezas deduzidas tenham os sinais corretos.

Substituindo as expressões acima da força resultante nas projeções da 2ª lei de Newton e isolando as componentes da força resistente, obtém-se:

$$f_x = m \cdot a_x$$

$$f_y = F_y + mg \operatorname{sen} \theta = m \cdot a_y + mg \operatorname{sen} \theta$$

tal como constam no roteiro da Parte I, nas equações (7) e (8).

Assim, f_x terá o sinal de a_x – sempre negativo, uma vez que, da leitura das imagens, verifica-se que o movimento horizontal é sempre retardado. Já o sinal de f_y depende da relação entre a_y e $g \operatorname{sen} \theta$, esperando-se que seja sempre oposto ao sinal da *velocidade* v_y , que **não entra** nessa expressão.

Essas equações transformam as acelerações deduzidas das posições em forças, que são necessárias para modelar a mecânica desse movimento, portanto, os sinais incorporados são fundamentais. O sistema de referência deve ser considerado para se adotar esses sinais corretamente e interpretar os resultados.

II. Propriedades da força resistente a partir dos dados

Os itens **B15** e **B16** do roteiro da Parte II propõem verificar se os dados experimentais obtidos do movimento filmado suportam as leis de Amontons sobre o atrito de contato, que definem a intensidade e direção da força de atrito. Se os dados experimentais não contradizem essas leis, elas servem de base a um modelo teórico do sistema que permitirá prever a trajetória da moeda ao longo da superfície do plano. A seguir, adotaremos a notação do roteiro da Parte II.

Teste de Hipótese I: o módulo da força resistente é constante.

As leis de Amontons estabelecem que a intensidade da força de atrito cinético, f_{at} , é constante e proporcional à da força normal, N ,

$$f_{at} = \mu_c N \quad (1)$$

em que a constante de proporcionalidade μ_c é o coeficiente de atrito cinético. Da condição de equilíbrio de forças na direção normal ao plano, deduz-se que a componente normal da força de contato entre a moeda e o plano é constante nesse arranjo experimental, com módulo:

$$N = mg \cos \theta \quad (2)$$

Das componentes da força resistente em cada instante, sua intensidade pode ser obtida com:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (3)$$

Portanto, se a força resistente puder ser interpretada como a força de atrito cinético ($\vec{f} = \vec{f}_k$), podemos substituir as eqs. (2) e (3) na eq. (1) e esperar que no experimento seja válida a seguinte igualdade:

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \mu_c mg \cos \theta \quad (4)$$

A **Figura 3** apresenta os valores experimentais do módulo da força resistente em função do tempo de um dos conjuntos de dados. O desvio padrão da distribuição é $\sigma = 279 \text{ g}\cdot\text{cm/s}^2$ e o valor médio do conjunto de dados e seu desvio padrão são $\bar{f} = 826(54) \text{ g}\cdot\text{cm/s}^2$.

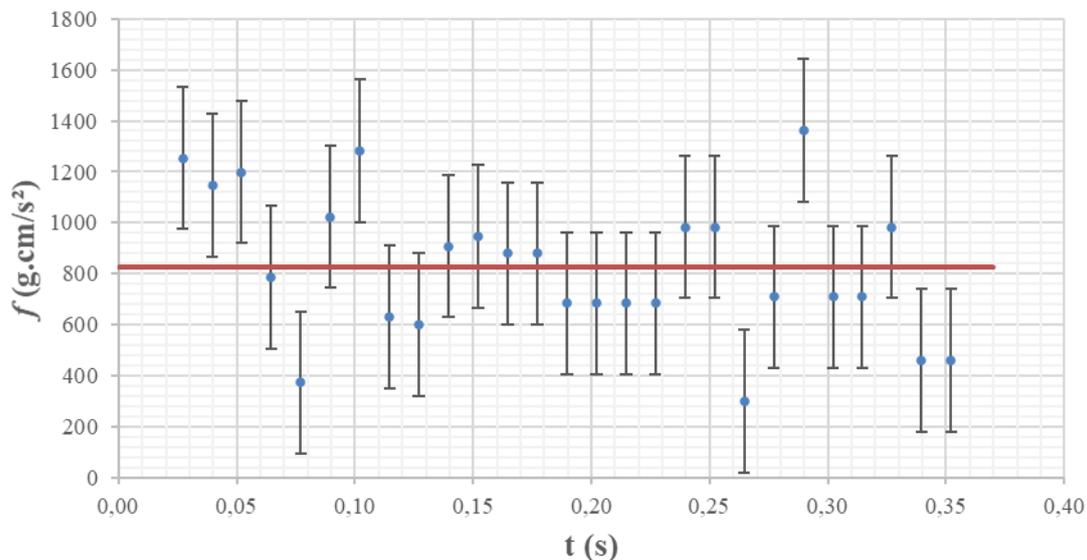


Figura 3. Valores experimentais do módulo da força resistente em função do tempo, obtidos da equação (3). As barras de incerteza correspondem a um desvio-padrão e a linha contínua foi traçada no valor médio dos dados experimentais.

Quando uma grandeza tem um valor constante e os dados obtidos têm uma distribuição que obedece a uma função de probabilidade Gaussiana, cerca de 68% dos valores medidos estarão dentro de um desvio-padrão em relação ao valor médio, cerca de 95% deles dentro de dois desvios; provavelmente nenhum a mais de três desvios, a não ser que você tome muitos dados (da ordem de cem ou mais). Isto é exatamente o que acontece observando o gráfico da **Fig. 3** – 18 dos 27 pontos estão a menos de um desvio-padrão do valor médio e nenhum está a mais de dois desvios. Portanto, é plausível adotar o módulo da força resistente como constante e adotar o valor médio dessa distribuição para a primeira estimativa do coeficiente de atrito a partir da eq. (4), $\mu_e = 0,29(2)$.

Teste de Hipótese II: a força resistente é oposta à velocidade.

As leis de Amontons estabelecem que a força de atrito tem a mesma direção e sentido contrário ao da velocidade, logo, o ângulo entre esses vetores é igual a π rad em qualquer instante. Uma forma de validar essa propriedade para a força resistente é verificar a compatibilidade dos valores experimentais desse ângulo com o valor esperado. Infelizmente, não há maneira simples de realizar esta análise. Abaixo, explicamos um dos métodos possíveis, que simplifica a interpretação estatística do resultado.

O ângulo entre dois vetores pode ser deduzido do produto vetorial, que, neste movimento plano fica:

$$\vec{v} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = (v_x f_y - v_y f_x) \hat{k} \quad (5)$$

em que $\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$. A expressão do módulo do produto vetorial permite ligar esse resultado ao ângulo:

$$|\vec{v} \times \vec{f}| = v \cdot f \cdot \text{sen } \alpha', \quad \text{com } \alpha' \in [0; \pi] \quad (6)$$

Na eq. (5), a componente \hat{k} pode ser positiva, nula ou negativa, enquanto a eq. (6) define α' , o *menor* ângulo entre os vetores, sempre no intervalo $[0; \pi]$, uma vez que $\text{sen } \alpha' \geq 0$, pois todas as outras grandezas nesta equação são positivas ou nulas.

De acordo com as leis de Amontons, os vetores velocidade e força resistente são opostos, de modo que o ângulo α será compatível com π rad, se ela for verdadeira. Entretanto, o ângulo medido será próximo, mas provavelmente diferente desse valor, devido à flutuação estatística dos dados experimentais. Como a expressão (6) só permite valores iguais ou menores que π , será difícil estimar o valor verdadeiro do ângulo a partir do histograma dos ângulos medidos nos diferentes instantes. A maneira de remediar isso é fixar a referência de medida do ângulo na velocidade e determinar o ângulo α que o vetor velocidade tem que rodar, em torno de um mesmo eixo e sempre no sentido anti-horário, para apontar na direção do vetor força resistente (veja **Fig. 4**). Medido assim, os dados experimentais deverão se distribuir em torno do valor π , e a média desses dados constituirá uma estimativa do valor verdadeiro do ângulo entre os vetores. A **Figura 4** mostra as possíveis orientações relativas da velocidade e da força resistente medida, que definem a componente vertical do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{f}$, ou seja, definem o sinal do valor calculado pela eq. (5). É preciso distinguir os quadrantes do sistema de referência que tem a abcissa na direção da velocidade, representado com linhas tracejadas e acoplado à velocidade, e os do sistema de referência xOy .

O ângulo α que o vetor velocidade \vec{v} precisa rodar no sentido anti-horário em torno do eixo na direção \vec{k} para apontar na direção de \vec{f} , como ilustrado pela Fig. 4, segue a relação:

$$v_x f_y - v_y f_x = v \cdot f \cdot \text{sen } \alpha, \quad \text{com } \alpha \in [0; 2\pi] \quad (7)$$

que se baseia na inversão do sentido da projeção vertical do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{f}$ quando o ângulo entre esses vetores passa por π . Esta equação, entretanto, **não** define α , uma vez que a função seno não tem inversa nesse domínio – cada valor de seno no intervalo $[-1; 1]$ corresponde a dois arcos do intervalo $[0; 2\pi]$, uma vez que o seno é positivo no primeiro e no segundo quadrantes, e negativo nos outros dois. Por essa razão, é necessário escolher, no domínio da função seno, que *ramo* deve ser usado. Em outras palavras, é necessário estabelecer se são requeridos os arcos do primeiro e do quarto quadrantes, ou do segundo e do terceiro. Perceba que não estamos falando sobre os quadrantes do sistema de referência xOy , mas daquele acoplado à velocidade; na fig. 4, o ângulo está identificado pelo arco em linha preta grossa.

A fim de obter resultados em torno de π , escolhemos o ramo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ para a função inversa:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{v_x f_y - v_y f_x}{v \cdot f}\right), \quad \text{com } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \quad (8)$$

A função $\arcsen(\cdot)$ da planilha eletrônica, entretanto, retorna arcos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, portanto, a implementação da eq. (8) para resultar na função inversa do ramo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ requer algum cuidado.

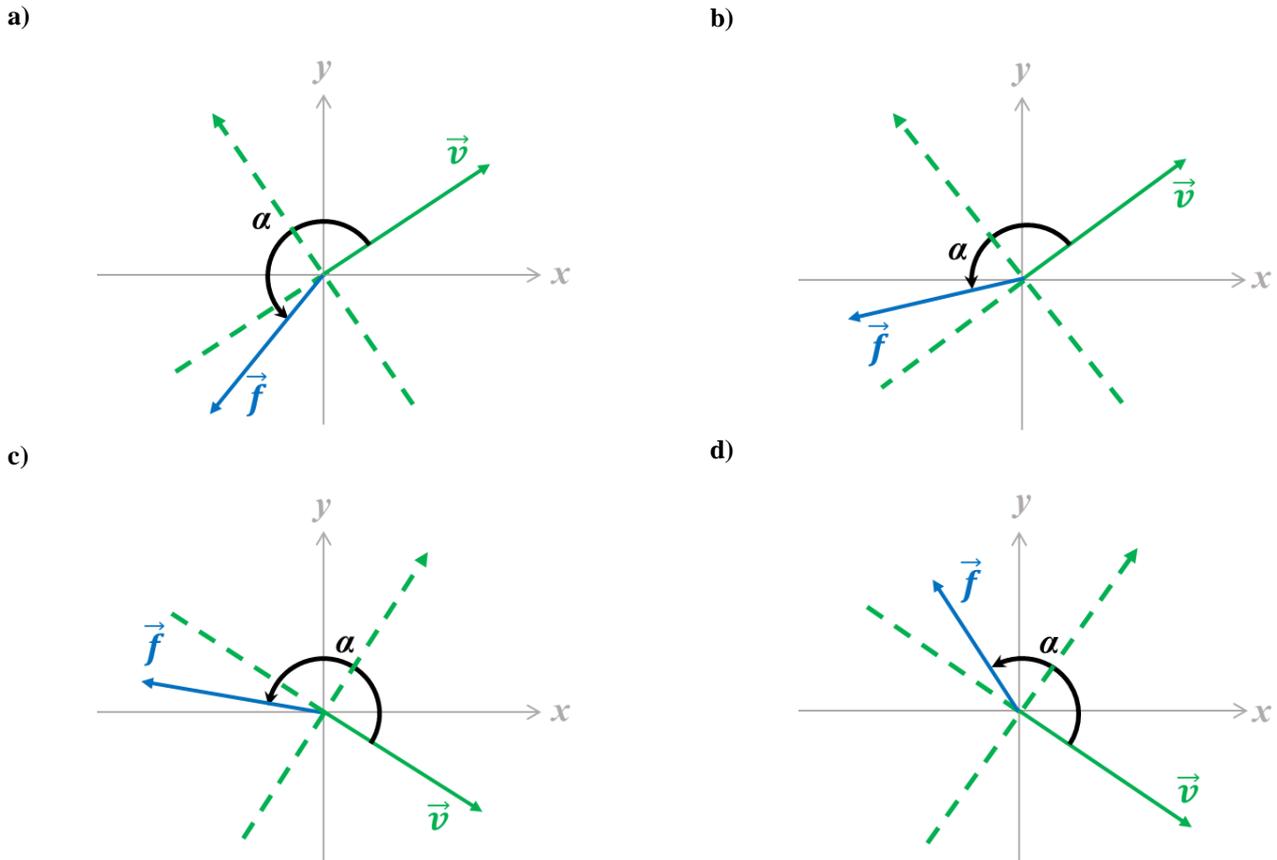


Figura 4. Possíveis orientações dos vetores velocidade e força resistente sobre o plano do movimento.

Em **a)** e **b)**, a moeda tem um movimento ascendente e em **c)** e **d)**, descendente.

Em **a)** e **c)**, $\alpha > \pi$ e o argumento da função arco-seno na eq. (8) é negativo: $\vec{v} \times \vec{f}$ aponta para dentro do papel.

Em **b)** e **d)**, $\alpha < \pi$ e o argumento da função arco-seno na eq. (8) é positivo: $\vec{v} \times \vec{f}$ aponta para fora do papel.

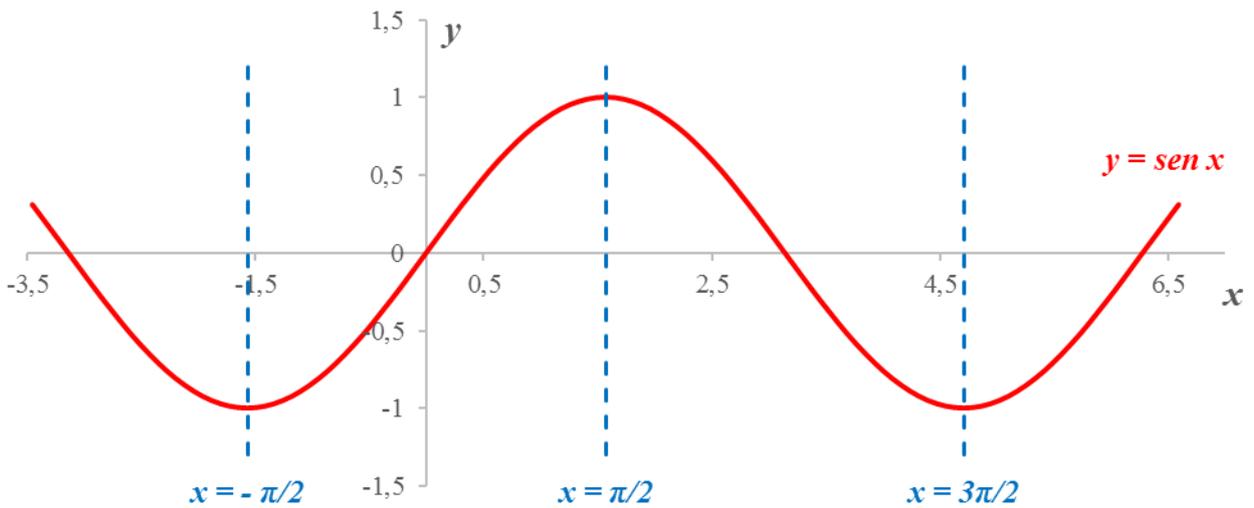


Figura 5. Gráfico da função $y = \text{sen } x$ nas vizinhanças de $x = \pi/2$ rad.

A **Figura 5** mostra o gráfico da função seno. Como cada ramo invertível do domínio da função seno tem extensão de π rad, é necessário analisar como podem ser obtidos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ quando se dispõe de valores no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. A ideia intuitiva de somar π rad ao resultado é incorreta, porque o deslocamento do ramo do gráfico para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ em π rad para a direita não dá o ramo com $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ da função seno – esses ramos estão *espelhados*. Assim,

$$\alpha = \pi - \arcsen\left(\frac{v_x f_y - v_y f_x}{v \cdot f}\right) \quad \text{em rad} \quad (9)$$

Escrita na sintaxe da planilha eletrônica, a eq. (8) corresponde a:

$$=PI() - \text{ASEN}((v_x * f_y - v_y * f_x) / (v * f))$$

onde v_x , v_y , v , f_x , f_y e f devem referenciar, respectivamente, as células das componentes x e y e dos módulos da velocidade (v) e da força resistente (f).

Finalmente, é possível verificar que a limitação ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ é consistente com os dados experimentais, calculando o produto escalar $\vec{f} \cdot \vec{v}$, cujo sinal indica se o ângulo entre os vetores é menor ou maior que $\pi/2$. Se esse produto escalar for sempre negativo, a escolha do ramo para inversão da função seno será suficiente para obter a informação desejada.

Avaliação da incerteza no ângulo entre a velocidade e a força resistente

A flutuação estatística na medida do ângulo α vem das incertezas nas medições das componentes da velocidade e da força resistente, que aparece na eq. (9) acima numa combinação particular, que definimos como:

$$u = \frac{v_x f_y - v_y f_x}{v \cdot f}$$

Neste experimento, a incerteza relativa da velocidade pode ser ignorada em comparação à da força resistente, de modo que uma boa aproximação pode ser obtida com:

$$\sigma_u^2 \cong \left(\frac{\partial u}{\partial f_x}\right)^2 \sigma_{f_x}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial f_y}\right)^2 \sigma_{f_y}^2$$

Adotando $\sigma_{f_x}^2 = \sigma_{f_y}^2 = \sigma_f^2$, após calcular as derivadas e efetuar algumas transformações algébricas, chega-se em:

$$\sigma_u \cong \frac{\sigma_f}{f}. \quad (10)$$

Note que, no membro direito, aparece um desvio-padrão relativo, enquanto no esquerdo, apenas um desvio padrão, o que está bem – f é dimensional, enquanto que u , não. Voltando à eq. (9) e observando os dados, que dão $\alpha \approx \pi$, deduzimos que $u \approx 0$. Usando a aproximação $\alpha = \pi - \arcsen u \approx \pi - u$, válida para $u \approx 0$, encontramos que o desvio-padrão do ângulo é dado por:

$$\sigma_\alpha \cong \frac{\sigma_f}{f}. \quad (11)$$

Considerando que a intensidade da força resistente é constante (a **Fig. 3** mostra que isso pode ser verdade, dentro das incertezas experimentais), o valor médio da força resistente pode ser usado na eq. (11). Isso leva à conclusão de que a incerteza na medida do ângulo α é a mesma para todos os intervalos de tempo. Finalmente, percebe-se que a fórmula (11) é válida também para o valor médio $\bar{\alpha}$ quando o desvio padrão do **valor médio** da força resistente é usado: $\sigma_{\bar{f}_{at}} = 54 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$ no exemplo considerado.

Conclusão sobre o ângulo entre a velocidade e a força resistente

A **Figura 6** apresenta os valores experimentais do ângulo α em função do tempo, para o mesmo conjunto de dados analisado na **Fig. 3**, onde as incertezas foram avaliadas pela fórmula (11), usando $\sigma_f = 279 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$. Na **Fig. 6**, pode ser observado que 19 dos 27 pontos estão a menos de um desvio-padrão do valor esperado $\pi \text{ rad}$, e que o valor médio da distribuição é $\bar{\alpha} = 3,20(7) \text{ rad}$ – note que 0,07 é o desvio padrão do valor médio $\bar{\alpha}$, e não de cada dado α_i , para um instante específico t_i . Portanto, seja pela interpretação estatística do gráfico, seja pela análise do valor médio, os resultados experimentais estão de acordo com as leis de Amontons, que estabelecem que a força de atrito é oposta à velocidade. Assim, $\alpha = \pi \text{ rad}$ será adotado no modelo teórico. Uma vez que a força de atrito cinético será usada no lugar da força resistente no modelo, a equação de movimento da moeda é aquela mostrada no roteiro da Parte II, eq. (15), que permite prever a trajetória da moeda sobre a superfície do plano inclinado.

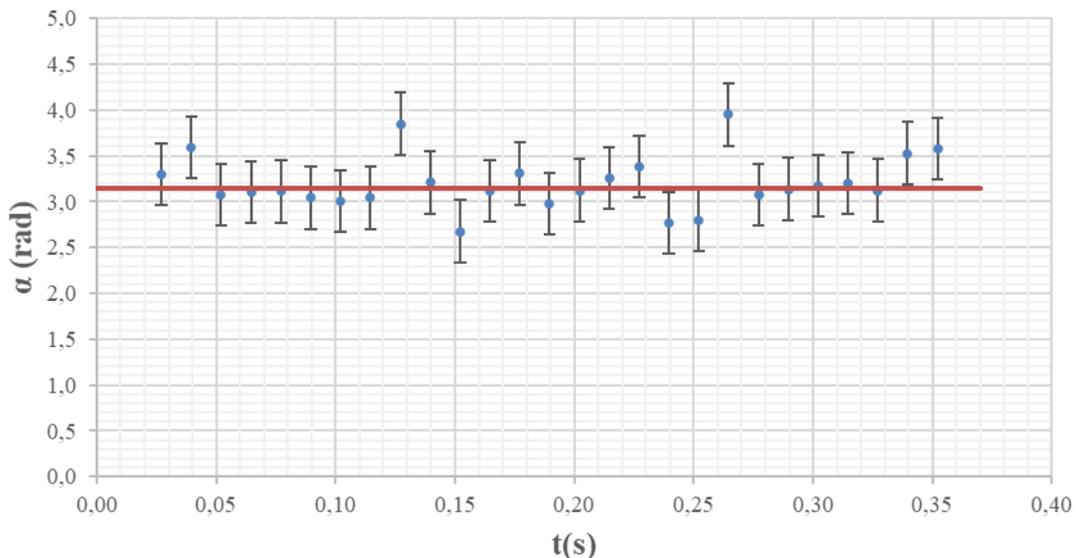


Figura 6. Valores experimentais do ângulo entre a velocidade da moeda e a força resistente em função do tempo, obtidos da eq. (9). As barras de incerteza são de um desvio-padrão, vide eq. (11). A linha contínua foi traçada no valor esperado de $\pi \text{ rad}$.