

Apêndice ao Roteiro do Experimento “Força de Atrito Variável”

I. Sinais na Equação de Movimento

Nas figuras abaixo, o referencial xOy foi escolhido tal como o definido no Roteiro da Parte I, consequentemente, a velocidade da moeda é positiva na direção x , enquanto que na direção y ela começa positiva, decresce e se torna negativa, com um valor absoluto crescente após o alcance do ponto de máxima altura ($v_y = 0$). As **Figuras 1 e 2** abaixo mostram o diagrama de forças por uma visão lateral e superior, respectivamente. Uma vez que a moeda se movimenta apenas na superfície do plano inclinado, existe equilíbrio de forças na direção perpendicular ao plano, ou seja, $N = mg \cos \theta$ ao longo de todo o movimento.

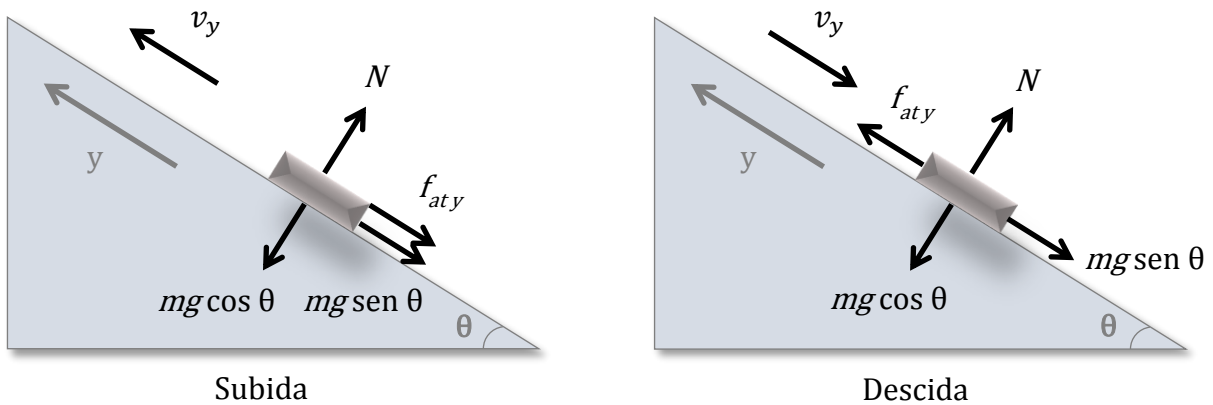


Figura 1. Diagrama de forças sobre a moeda, onde os símbolos mg , N e $f_{at,y}$ representam o peso, a força normal e a componente y da força de atrito, respectivamente, e θ , o ângulo entre os planos horizontal e inclinado. Vista lateral.

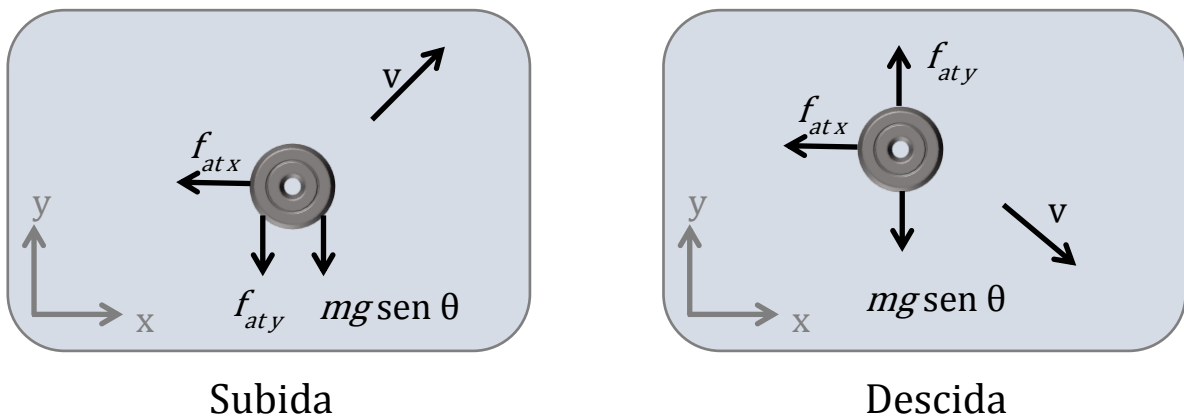


Figura 2. Vista superior do mesmo diagrama da Fig. 1. $f_{at,x}$ representa a componente x da força de atrito.

É uma boa prática adotar a regra geral de impor um sinal adequado a cada dado ou valor (posições, velocidades, gravidade, força de atrito) para correspondê-lo ao sistema de referência escolhido. Neste caso, as velocidades e acelerações deduzidas serão obtidas com os sinais adequados, devido às propriedades algébricas das equações. Projetando a equação vetorial de movimento, $\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$, sobre as direções x e y , temos:

$$\begin{cases} F_x = m \cdot a_x \\ F_y = m \cdot a_y \end{cases}$$

Com a orientação do eixo y mostrada na **Fig. 2**, vemos que o peso da moeda (um dado) aponta no sentido contrário ao eixo. Portanto,

$$F_y = f_{at,y} - mg \sen \theta$$

onde a intensidade da aceleração gravitacional é representada pela constante $g > 0$. Com relação ao sinal da força de atrito, as leis empíricas do atrito aplicadas ao corpo em movimento são usadas: a intensidade da força é igual a $\mu_c N$, onde μ_c é o coeficiente de atrito cinético, e tem direção oposta ao vetor velocidade. Logo, cada componente da força de atrito é oposta à respectiva componente da velocidade, cujos sinais são deduzidos das posições observadas ao longo do tempo. Então, das **Figs. 1 e 2**, as componentes da força de atrito são:

$$f_{at,x} = F_x$$

$$f_{at,y} = F_y + mg \sen \theta$$

tal como constam no roteiro da Parte I, nas equações (10) e (11).

Essas equações transformam as acelerações deduzidas das posições mensuradas em forças, que são necessárias para modelar a mecânica desse movimento, portanto, os sinais incorporados são fundamentais. O sistema de referência deve ser considerado para se adotar esses sinais corretamente.

II. Propriedades da força de atrito a partir dos dados

Os itens **B16** e **B17** do roteiro da Parte II propõem verificar se os dados experimentais obtidos do movimento filmado suportam as leis empíricas do atrito de contato, que definem a intensidade e direção da força de atrito. Se os dados experimentais não contradizerem essas leis, é possível elaborar um modelo teórico para prever a trajetória da moeda ao longo da superfície do plano. A seguir, adotaremos a notação do roteiro da Parte II, onde a equação (21) resume o modelo, que é um sistema de equações de movimento que permitem determinar a trajetória da moeda a partir dos parâmetros do sistema e das condições iniciais de lançamento da moeda.

Comportamento do módulo da força de atrito

As leis empíricas do atrito estabelecem que a intensidade da força, f_{at} , é constante e proporcional à da força normal, N ,

$$f_{at} = \mu_c N \tag{1}$$

em que a constante de proporcionalidade μ_c é o coeficiente de atrito cinético. Da condição de equilíbrio de forças na direção normal ao plano, deduz-se que a força normal é constante no arranjo experimental, com módulo:

$$N = mg \cos \theta \tag{2}$$

Das componentes da força de atrito em cada instante, sua intensidade pode ser obtida com:

$$f_{at} = \sqrt{f_{at,x}^2 + f_{at,y}^2} \tag{3}$$

Substituindo as eqs. (2) e (3) na eq. (1):

$$\sqrt{f_{at_x}^2 + f_{at_y}^2} = \mu_c mg \cos \theta \quad (4)$$

Veja que as eqs. (3) e (4) são as eqs. (12) e (13), respectivamente, do roteiro.

A **Figura 3** apresenta os valores experimentais do módulo da força de atrito em função do tempo de um dos conjuntos de dados. O desvio padrão da distribuição é $\sigma = 279 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$ e o valor médio do conjunto de dados e seu desvio padrão são $\overline{f_{at}} = 826(54) \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$.

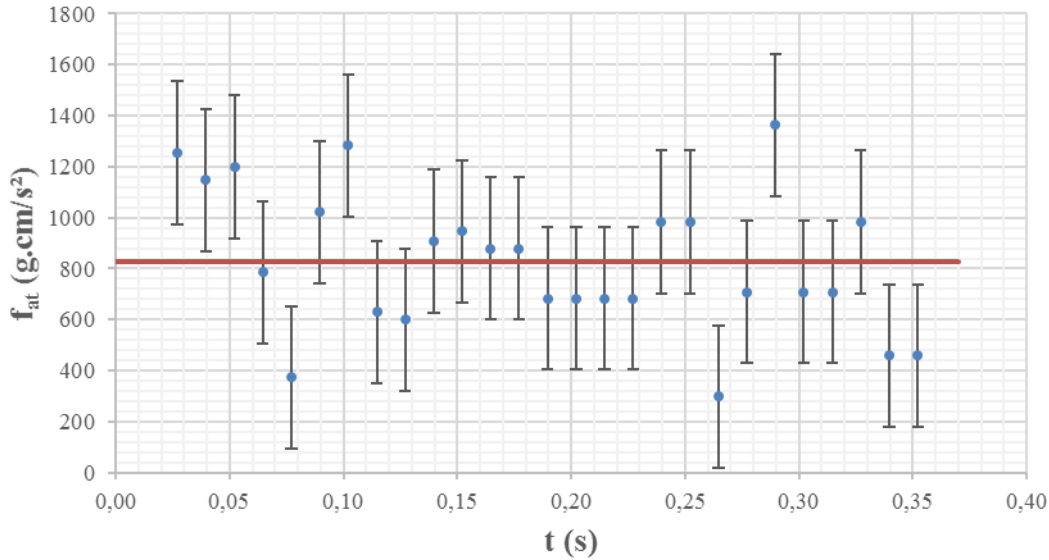


Figura 3. Valores experimentais do módulo da força de atrito em função do tempo, obtidos da equação (3). As barras de incerteza correspondem a um desvio-padrão e a linha contínua foi traçada no valor médio dos dados experimentais.

Quando uma grandeza tem um valor constante e os dados obtidos têm uma distribuição que obedece a uma função de probabilidade Gaussiana, cerca de 68% dos valores medidos estarão dentro de um desvio-padrão em relação ao valor médio, cerca de 95% deles dentro de dois desvios; provavelmente nenhum a mais de três desvios, a não ser que você tome muitos dados (da ordem de cem ou mais). Isto é exatamente o que acontece observando o gráfico da **Fig. 3** – 18 dos 27 pontos estão a menos de um desvio-padrão do valor médio. Portanto, é plausível adotar o módulo da força de atrito como constante e utilizar o valor médio dessa distribuição para determinar o coeficiente de atrito a partir da eq. (4), $\mu_c = 0,29(2)$.

Avaliação do ângulo entre a força de atrito e a velocidade

As leis empíricas estabelecem que a força de atrito tem a mesma direção e sentido contrário ao da velocidade, logo, o ângulo entre esses vetores deve ser igual a π rad em qualquer instante. Uma forma de validar esta propriedade é verificar a compatibilidade dos valores experimentais desse ângulo com o valor esperado. Infelizmente, não há maneira simples de realizar esta análise. Abaixo, explicamos um dos métodos possíveis, que simplifica a interpretação estatística do resultado.

As conhecidas expressões para o produto vetorial estão mescladas no cálculo a seguir:

$$\vec{v} \times \vec{f}_{at} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ f_{at_x} & f_{at_y} & 0 \end{vmatrix} = (v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x}) \hat{k} \quad (5)$$

e

$$|\vec{v} \times \vec{f}_{at}| = v \cdot f_{at} \cdot \text{sen } \alpha', \quad \text{com } \alpha' \in [0; \pi] \quad (6)$$

Na eq. (5), a componente \hat{k} pode ser positiva, nula ou negativa, enquanto que a eq. (6) define α' , o *menor* ângulo entre os vetores, sempre no intervalo $[0; \pi]$, uma vez que $\sin \alpha' \geq 0$, pois todas as outras grandezas nesta equação são positivas ou nulas. O ângulo α encontrado, quando vinculado ao vetor velocidade \vec{v} , de referência para sua medição, como ilustrado pela Fig. 4, pode ser obtido de:

$$v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x} = v \cdot f_{at} \cdot \sin \alpha, \quad \text{com } \alpha \in [0; 2\pi] \quad (7)$$

onde α é o ângulo medido do vetor velocidade ao vetor força de atrito no sentido anti-horário – verifique que esta fórmula é correta. Portanto, da eq. (7):

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x}}{v \cdot f_{at}}\right), \quad \text{com } \alpha \in [0; 2\pi] \quad (8)$$

É de se notar que cada valor de seno no intervalo $[-1; 1]$ corresponde a dois arcos do intervalo $[0; 2\pi]$, uma vez que o seno é positivo no primeiro e no segundo quadrantes, e negativo nos outros dois. Por essa razão, é necessário escolher, no domínio da função seno, que ramo deve ser usado. Em outras palavras, é necessário estabelecer se são requeridos os arcos do primeiro e do quarto quadrantes, ou do segundo e do terceiro. Perceba que não estamos falando sobre os quadrantes do sistema de referência xOy , mas de um que tem a abscissa na direção da velocidade, representado com linhas tracejadas na Fig. 4.

Se os vetores velocidade e força de atrito são opostos, o ângulo α será compatível com π rad, que é o único ângulo pertencente ao segundo e ao terceiro quadrantes. Entretanto, em vista da flutuação estatística dos dados experimentais, o ângulo medido será provavelmente diferente desse valor, maior ou menor que π rad. Portanto, $\arcsen \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ neste problema. A **Figura 4** mostra, para este exemplo, as configurações possíveis que podem surgir dessas flutuações – seja cuidadoso para distinguir os quadrantes do sistema de referência acoplado à velocidade e os do sistema de referência xOy .

A função $\arcsen(\)$ na planilha eletrônica, entretanto, retorna arcos no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, portanto, a implementação da eq. (8) para resultar na função arco-seno para o ramo particular $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ do domínio da função requer algum cuidado.

A **Figura 5** mostra o gráfico da função seno. Como cada ramo invertível do domínio da função seno tem extensão de π unidades, é necessário analisar como podem ser obtidos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ uma vez dispondo de valores no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Num primeiro lance intuitivo, poder-se-ia pensar em somar π ao resultado. Porém, perceba que deslocando no gráfico o ramo com $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de π unidades para a direita, não se obtém o ramo com $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ da função seno; esses ramos estão espelhados, portanto:

$$\alpha = \pi - \arcsen\left(\frac{v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x}}{v \cdot f_{at}}\right). \quad (9)$$

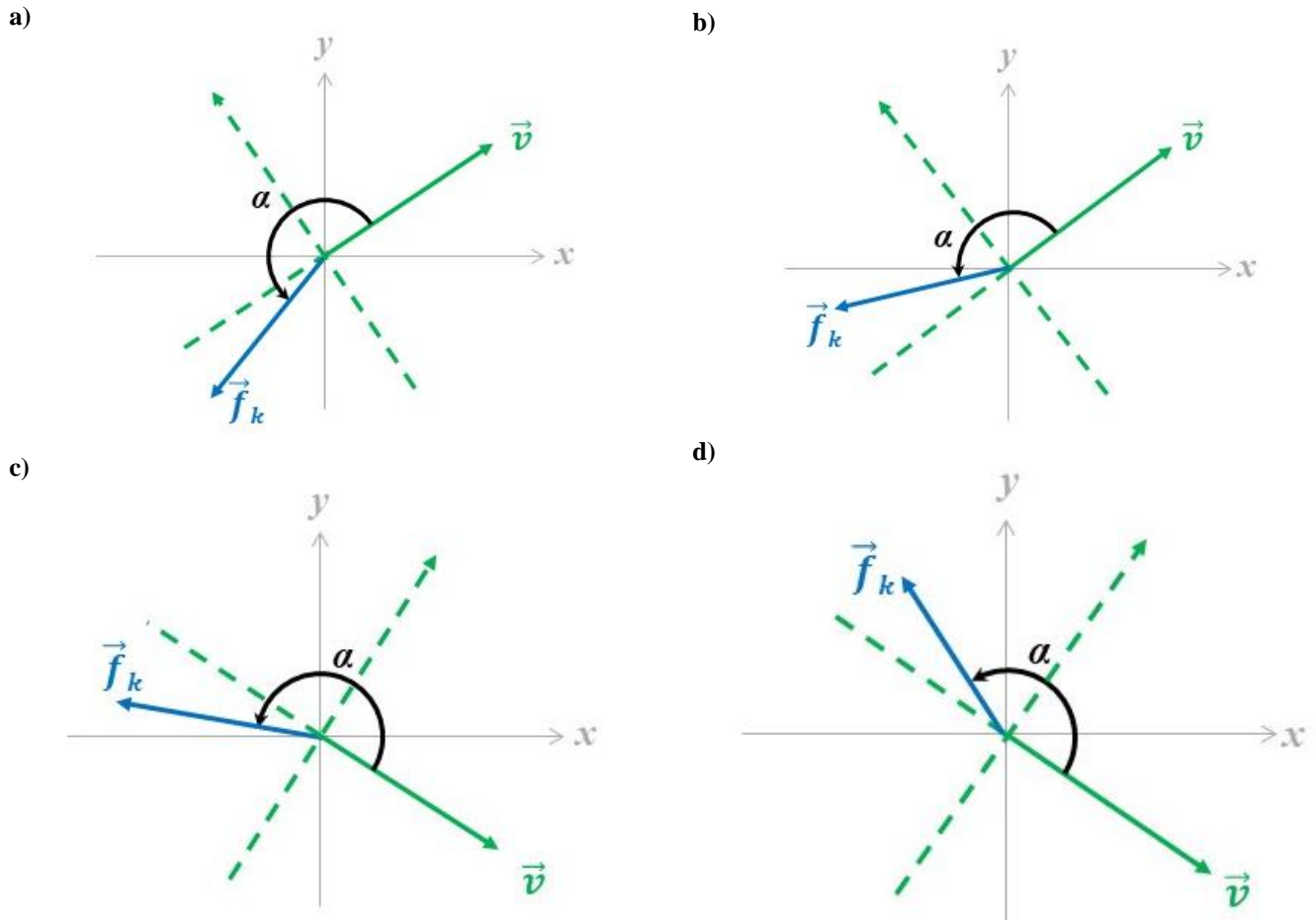


Figura 4. Possíveis orientações dos vetores velocidade e força de atrito sobre o plano do movimento.

Em **a)** e **b)**, a moeda tem um movimento ascendente (vetor velocidade no primeiro quadrante), enquanto que em **c)** e **d)** ele é descendente (vetor velocidade no quarto quadrante).

Em **a)** e **c)**, $\alpha > \pi$ e o argumento da função arco-seno na eq. (8) é negativo.

Em **b)** e **d)**, $\alpha < \pi$ e o argumento da função arco-seno na eq. (8) é positivo.

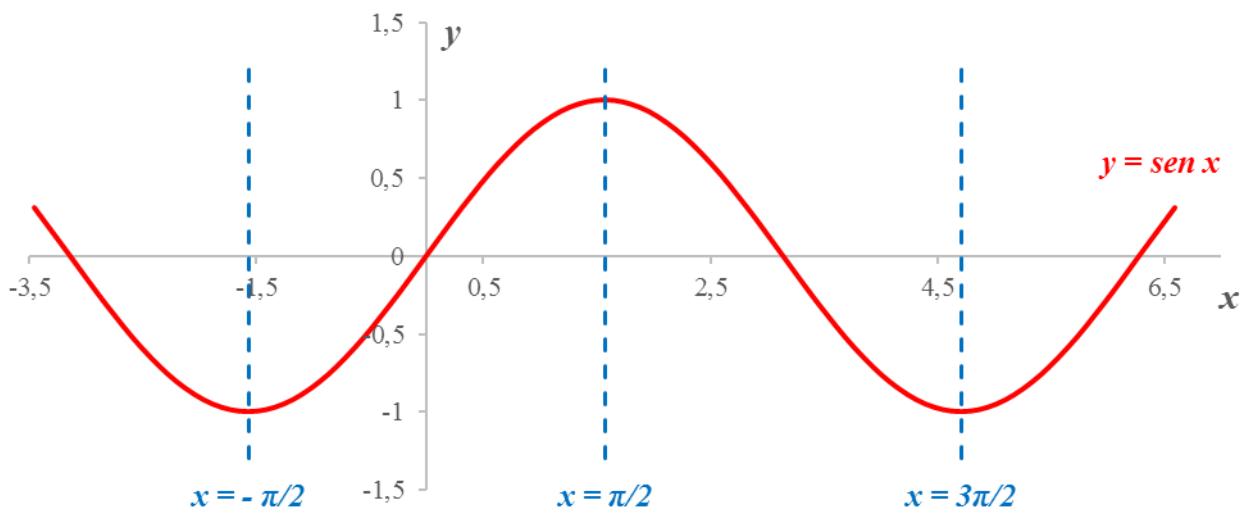


Figura 5. Gráfico da função $y = \text{sen } x$ nas vizinhanças de $x = \pi/2$.

Escrito na sintaxe da planilha, a eq. (8) corresponde a:

$$=PI() - ASEN((vx*fy - vy*fx) / (v*f))$$

onde v_x , v_y , v , f_x , f_y e f devem referenciar, respectivamente, as células das componentes x e y e dos módulos da velocidade (v) e da força de atrito (f).

Avaliação da incerteza no ângulo entre a velocidade e a força de atrito

A flutuação estatística na medida do ângulo α vem das incertezas nas medições das componentes da velocidade e da força de atrito, que aparece na eq. (9) acima numa combinação particular, que definimos como:

$$u = \frac{v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x}}{v \cdot f_{at}}$$

Neste experimento, a incerteza relativa da velocidade pode ser desprezada quanto comparada à da força de atrito, portanto, uma boa aproximação pode ser obtida usando

$$\sigma_u^2 \cong \left(\frac{\partial u}{\partial f_{at_x}}\right)^2 \sigma_{f_{at_x}}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial f_{at_y}}\right)^2 \sigma_{f_{at_y}}^2$$

Adotando $\sigma_{f_{at_x}}^2 = \sigma_{f_{at_y}}^2 = \sigma_{f_{at}}^2$, após alguns passos algébricos, chegamos em:

$$\sigma_u \cong \frac{\sigma_{f_{at}}}{f_{at}} \tag{10}$$

Perceba que no membro direito aparece uma incerteza relativa, enquanto que no esquerdo, apenas uma incerteza (o que é ok – f_{at} é dimensional, enquanto que u , não). Agora, voltando à eq. (9), e observando os dados, que dão $\alpha \approx \pi$, deduzimos que $u \approx 0$. Usando a aproximação

$$\alpha = \text{sen } u \approx u$$

válida para $u \approx 0$, encontramos que a incerteza no ângulo é dada por:

$$\sigma_\alpha \cong \frac{\sigma_{f_{at}}}{f_{at}} \tag{11}$$

Considerando que a intensidade da força de atrito é constante (a **Fig. 3** mostra que isso pode ser verdade, dentro das incertezas experimentais), o valor médio da força de atrito pode ser usado na eq. (11). Isso leva à conclusão de que a incerteza na medida do ângulo α é a mesma para todos os intervalos de tempo. Finalmente, perceba que a fórmula (11) é válida também para o valor médio $\bar{\alpha}$ quanto o desvio padrão do **valor médio** da força de atrito é usado, $\sigma_{\bar{f}_{at}} = 54 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$.

Conclusão sobre o ângulo entre a velocidade e a força de atrito

A **Figura 6** apresenta os valores experimentais do ângulo α em função do tempo, para o mesmo conjunto de dados analisado na **Fig. 3**, onde as incertezas foram avaliadas pela fórmula (11), usando $\sigma_{f_{at}} = 279 \text{ g}\cdot\text{cm}/\text{s}^2$. Na **Fig. 6**, pode ser observado que 19 dos 27 pontos estão a menos de um desvio-padrão do valor esperado π rad, e que o valor médio da distribuição é $\bar{\alpha} = 3,20(7)$ rad – note que 0,07 é o desvio padrão do valor médio $\bar{\alpha}$, e não de cada dado α_i , para um instante específico t_i . Portanto, seja pela interpretação estatística do gráfico, seja pela análise do valor médio, os resultados experimentais estão de acordo com a lei

empírica que estabelece que a força de atrito é oposta à velocidade. Assim, $\alpha = \pi$ rad será adotado. Uma vez bem definida a força de atrito, em módulo, direção e sentido, a equação de movimento da moeda pode ser escrita como mostrado no roteiro da Parte II, e permite prever a trajetória da moeda sobre a superfície do plano inclinado.

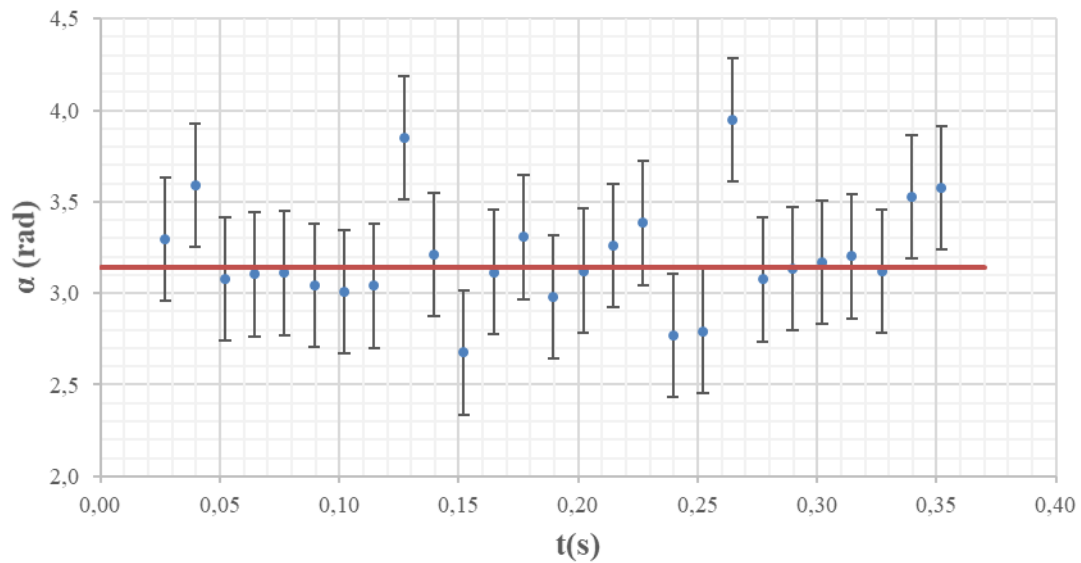


Figura 6. Valores experimentais do ângulo entre a velocidade da moeda e a força de atrito em função do tempo, obtidos com a eq. (9). As barras de incerteza são de um desvio-padrão, vide eq. (11). A linha contínua foi traçada no valor esperado de π rad.