

## Roteiro do Experimento “Força de Atrito Variável” – Parte II

### A) Introdução

Na primeira parte do experimento, determinamos a grandezas físicas relativas ao movimento da moeda, bem como a força de atrito em diversos pontos do seu percurso sobre o plano inclinado. Agora deve estar claro que a trajetória não é uma parábola, porque a força resultante sobre a moeda varia.

Nesta segunda parte do trabalho, elaboraremos uma equação de movimento, encontraremos sua solução e explicaremos a trajetória observada. Nós começaremos investigando o comportamento do módulo e da direção da força de atrito ao longo do movimento, e verificando se ele obedece às leis empíricas da força de atrito. Os resultados obtidos conduzirão a um modelo teórico para as equações de movimento, que permitem calcular as posições  $x$  e  $y$  em função do tempo. Finalmente, o ajuste entre a trajetória experimental e a calculada revelará se o modelo é adequado.

### B) Procedimento de análise (Continuação)

Aqui, usaremos as projeções da força de atrito e da velocidade nas direções  $Ox$  e  $Oy$  do sistema de coordenadas, determinadas na Parte I, bem como as equações lá mostradas.

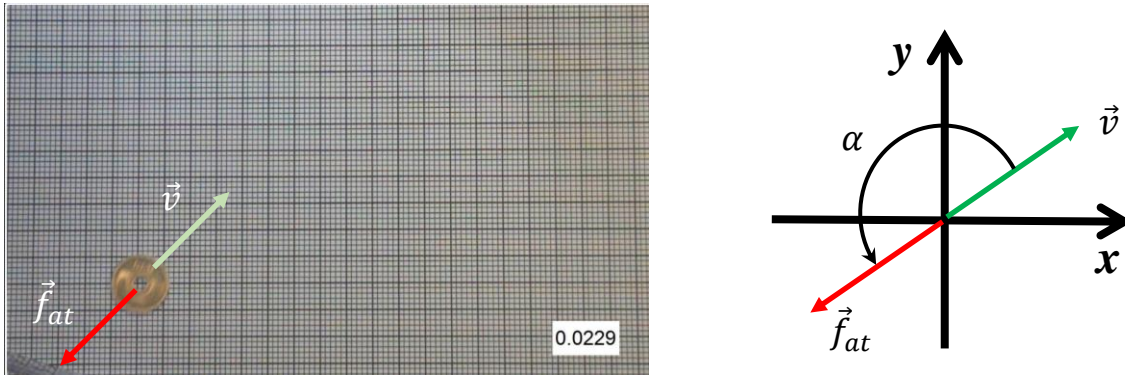
**B16. Comportamento do módulo da força de atrito.** As leis empíricas do atrito de contato aplicadas à moeda em movimento determinam as características vetoriais da força de atrito: sua direção é a mesma da velocidade, mas com sentido contrário ao deslocamento, e seu módulo é dado por:

$$f_{at} = |\vec{f}_{at}| = \mu_c N \quad \Rightarrow \quad \sqrt{f_{at_x}^2 + f_{at_y}^2} = \mu_c m g \cos \theta. \quad (13)$$

onde  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético e  $N = |\vec{N}| = |\vec{P}| \cos \theta$ , o módulo da força normal. Um cálculo mais elaborado será necessário para encontrar a orientação da força de atrito relativa à velocidade, descrito no item **B17**.

Recupere o gráfico do módulo da força de atrito em função do tempo, construído na Parte I, e trace uma reta paralela ao eixo dos tempos no valor médio da força. Verifique se a distribuição dos pontos em torno do valor médio é consistente com uma força de atrito de módulo constante, conforme a Equação (13); o apêndice deste roteiro sugere uma metodologia para realizar essa comparação. Uma vez confirmado o valor médio de  $f_{at}$ , use ele e os valores conhecidos de  $m$ ,  $g$  e  $\theta$  para determinar o coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$ .

**B17. Comportamento da direção da força de atrito.** As componentes da velocidade e da força de atrito sobre a moeda foram calculadas na Parte I. A **Figura 1** mostra uma das imagens, onde os vetores velocidade e força de atrito estão representados, e o esboço ao lado dessa imagem mostra o ângulo entre eles. Para comparar a orientação relativa entre a velocidade e a força de atrito ao longo da trajetória, é preciso medir esse ângulo entre os vetores utilizando um critério uniforme, como o mostrado na figura a seguir.



**Figura 1.** À esquerda, imagem extraída do vídeo, onde as representações dos vetores velocidade e força de atrito estão desenhadas. O esboço à direita indica a medida do ângulo no sentido anti-horário usando a velocidade como origem da coordenada angular, exemplificando dois possíveis resultados experimentais ( $\vec{v}$  e  $\vec{f}_{at}$ ), afetados por variações aleatórias.

Primeiro, notemos que o produto escalar  $\vec{f}_{at} \cdot \vec{v} < 0$  para todos os instantes, significando que  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  e que a orientação relativa é tal qual à mostrada à esquerda na Figura 1. Nesse intervalo, o ângulo  $\alpha$  entre os vetores velocidade e a força de atrito, como mostrado no esboço à direita da Figura 1, pode ser calculado para todos os instantes recorrendo-se ao produto vetorial entre os vetores velocidade e força de atrito<sup>11</sup>:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{v_x f_{at_y} - v_y f_{at_x}}{v f_{at}}\right) \quad (14)$$

onde  $v_x, v_y$  e  $f_{at_x}, f_{at_y}$  são as projeções da velocidade e da força de atrito nas direções  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, e

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (6)$$

como definido na Parte I deste roteiro e será usado ao longo deste documento. Visto que  $\sin \theta$  tem o mesmo valor para muitos ângulos  $\theta$ , a função seno pode ser invertida apenas sob uma restrição, explicada no *Apêndice ao Roteiro*, que detalha como trabalhar com a função arco-seno normalmente fornecida nos sistemas computacionais.

Construa o gráfico do ângulo  $\alpha$  em função do tempo e inclua uma linha paralela ao eixo dos tempos no valor esperado  $\alpha = \pi$  rad. Verifique que os pontos do gráfico se distribuem em torno de  $\pi$  rad, em concordância com o comportamento esperado da força de atrito cinético.

**B18. Construindo um modelo.** Retornando as eqs. (7) e (9), observamos que as resultantes nas direções  $Ox$  e  $Oy$  são, respectivamente, a componente horizontal da força de atrito e a soma das componentes das forças peso e de atrito:

$$\vec{F}_R = f_{at_x} \hat{i} + (f_{at_y} + P_y) \hat{j} \quad (15)$$

<sup>1</sup> Na eq. (14), usamos a projeção com sinal de  $\vec{v} \times \vec{f}_{at}$  em um eixo perpendicular ao plano do movimento e a relacionamos ao ângulo  $\alpha$  mostrado na Fig. 1. Calculando o ângulo entre os vetores, que está no intervalo  $[0; \pi]$ , seria mais difícil verificar se a velocidade e a força de atrito são opostas.

Uma expressão que dá conta da direção e da intensidade da força de atrito, a partir da Eq. (13), é

$$\vec{f}_{at} = \mu_c N \left( -\frac{\vec{v}}{v} \right) = \mu_c mg \cos \theta \left( -\frac{\vec{v}}{v} \right) \quad (16)$$

O termo entre parênteses é o versor da direção do vetor velocidade, e o sinal de menos significa que o atrito atua no sentido contrário ao da velocidade; condição verificada no item **B17**.

Substituindo a eq. (16) na eq. (15),

$$\vec{F}_R = \left( -\frac{\mu_c mg \cos \theta v_x}{v} \right) \hat{i} + \left( -\frac{\mu_c mg \cos \theta v_y}{v} - mg \sin \theta \right) \hat{j} \quad (17)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton,

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m(a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \quad (18)$$

Finalmente, as equações de movimento são:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu_c g \cos \theta v_x}{v} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\mu_c g \cos \theta v_y}{v} - g \sin \theta \end{cases} \quad (19)$$

A velocidade da moeda em cada instante de tempo é a solução dessas equações diferenciais acopladas e não-lineares, que só podem ser resolvidas numericamente.

**B19. Calculando a posição ao longo do tempo.** O intervalo de tempo entre imagens sucessivas é suficientemente pequeno para assumirmos que a velocidade é aproximadamente constante e igual à velocidade no começo do intervalo, mas suficientemente grande para tornar a velocidade durante o intervalo seguinte diferente; esta última velocidade pode ser calculada a partir da anterior utilizando-se a aceleração dada pela eq. (19). No menu *Guias Auxiliares* na página do laboratório, há um guia de exemplo de *Integração Numérica*, que oferece um exemplo de aplicação com mais detalhes.

Se  $\Delta t$  é o intervalo entre sucessivas imagens, então

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (20)$$

Das posições e velocidades em  $t = t_n$ , a velocidade em  $t_{n+1}$  é calculada usando  $a_x$  e  $a_y$  da eq. (19):

$$\begin{cases} v_{x(n+1)} = v_{x(n)} + \left( -\frac{\mu_k g \cos \theta v_{x(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}} \right) \Delta t \\ v_{y(n+1)} = v_{y(n)} + \left( -\frac{\mu_k g \cos \theta v_{y(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}} - g \sin \theta \right) \Delta t \end{cases} \quad (21)$$

As posições  $x$  e  $y$  em  $t_{n+1}$  podem ser calculadas como:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_{x(n)}\Delta t \\ y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\Delta t \end{cases} \quad (22)$$

Perceba que em (21) nós expandimos  $v$  em suas componentes, uma vez que essas fórmulas são requeridas nos cálculos.

Inicie o processo com os primeiros valores de velocidade e posição obtidos na planilha. Em seguida, essas novas velocidades e posições calculadas com as eqs. (21) e (22) devem ser introduzidas no membro *direito* dessas equações para computar a velocidade e a posição do instante subsequente; este processo *iterativo* deve ser repetido sucessivamente até o último instante de interesse.

**B20. Ajustando dos parâmetros do modelo.** Compare as posições calculadas por integração numérica com aquelas lidas nas imagens. Para facilitar a comparação, sobreponha em um mesmo gráfico os dados experimentais (já plotados no item **B4** da Parte I) e os valores calculados (item **B18**). Se as trajetórias não estiverem próximas, mude ligeiramente (dentro de um ou dois desvios-padrões) *um* dos parâmetros  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  ou  $v_{0y}$  e recalcule a planilha (mudar o valor na célula do parâmetro e pressionar *Enter* deve funcionar se você implementou corretamente as equações na planilha). Comece procurando pelos melhores valores de  $v_{0x}$  ou  $v_{0y}$ , depois tente ajustar  $\mu_c$  e altere  $x_0$  e  $y_0$  apenas quando entender o efeito de mudanças nos outros parâmetros. Normalmente, depois de algumas tentativas que tomarão poucos minutos, você deve encontrar um conjunto de valores dos parâmetros que forneça uma trajetória compatível com a experimental, embora provavelmente o ajuste não seja perfeito.

### C) Procedimento de elaboração do relatório

Escreva um relatório para um público que não conheça nem o experimento nem os procedimentos de análise, mas que possua conhecimentos em Física. Descreva o que foi feito, formule a conclusão e explique como ela foi obtida. Tente ser claro, objetivo e sintético, usando suas próprias palavras. Cada grupo deve entregar um único relatório, com as seguintes seções:

**C6. Identificação:** liste os nomes dos membros do grupo (ou apenas o seu, se trabalho individualmente) e identifique o conjunto de dados analisado.

**C7. Introdução:** explique os objetivos do experimento e como eles foram investigados.

**C8. Descrição Experimental:** com suas próprias palavras, descreva sucintamente o arranjo experimental, mencionando os componentes e suas características.

**C9. Resultados Obtidos:** apresente os resultados numéricos dos itens **B16** e **B17**, na forma de tabelas e gráficos. Verifique se expressou os valores das grandezas em unidades apropriadas e com o número adequado de algarismos significativos, bem como se inseriu barras de incerteza em todos os gráficos.

**C10. Análise de Dados.** Resuma as razões pelas quais os gráficos do item anterior validaram ou não as leis empíricas do atrito e como a interpretação estatística das barras de incerteza contribuiu para a conclusão. Apresente em um mesmo sistema de eixos os gráficos das trajetórias medida e calculada na primeira tentativa (com as estimativas iniciais do item **B19**), informando os valores iniciais de  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  usados nesse cálculo. Depois, plote em um mesmo sistema de eixos os gráficos das trajetórias medida e calculada após

ajustar os parâmetros (segundo o item **B20**), informando os melhores valores encontrados para  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$ . **Não inclua** os dados brutos nem os extraídos da análise inicial do conjunto de imagens, uma vez que estes já foram apresentados na síntese da Parte I.

**C11. Discussão.** Com base nos testes efetuados nos itens **B16** e **B17**, justifique por que você considerou válidas as leis empíricas do atrito ou mostre como você descobriu que elas não são válidas. Aponte eventuais discrepâncias entre as trajetórias medida e calculada, apresentadas no item **C10**, e sugira possíveis causas para as diferenças observadas. Comente se os valores ajustados de  $\mu_c$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  são compatíveis com os valores medidos e, caso encontre discrepâncias, explique as prováveis razões para isso. Indique como a trajetória da moeda seria alterada se os seguintes parâmetros sofressem variações:

- a. ângulo de inclinação do plano;
- b. ângulo de lançamento da moeda;
- c. coeficiente de atrito entre a moeda e a superfície do plano;
- d. módulo da velocidade inicial da moeda;
- e. massa da moeda;
- f. aceleração da gravidade.

**C12. Conclusão.** Retome a introdução, atente para o objetivo do experimento e comente se ele foi alcançado plenamente, parcialmente ou não. *Sugestão:* volte aos itens **C5 (Parte I)** e **C11 (Parte II)** e comente como as leis empíricas do atrito foram validadas e como a aplicação de um modelo para prever a trajetória permite um aprofundamento no estudo da mecânica de um corpo sujeito a uma força variável.