Apêndice ao Roteiro do Experimento “Rolamento”

Estimativa das Incertezas de Posição

Posição Linear

A incerteza na posição linear pode ser estimada a partir da precisão do quadriculado de fundo. Como o menor quadrado possui 2 cm de lado, parece-nos natural pensar na regra geral de utilizar como incerteza a metade da menor divisão, ou seja, $\sigma_x = 1$ cm. Entretanto, é possível observar que a nitidez da leitura varia de imagem para imagem, uma vez que ela depende do estado de movimento do aro, e ao utilizar 1 cm corremos o risco de ora subestimar ora superestimar a incerteza na posição linear. Para evitar ter de utilizar um valor particular para cada imagem, optamos por adotar para σ_x um valor constante e igual a 1 cm; posições bem lidas não estarão sujeitas a um desvio-padrão superior a esse.

Posição Angular

O número de quadradinhos em Ox e em Oy foi utilizado para determinar a posição angular ($\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$), sua incerteza pode ser obtida a partir da seguinte propagação:

$$\sigma_\theta^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\sigma_y\right)^2 = \left[-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right]^2\sigma_x^2 + \left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}\right]^2\sigma_y^2$$

Tomando como exemplo uma imagem com os valores $\left(x, y, \sigma_x, \sigma_y\right) = (28; 4; 0{,}5; 0{,}5)$, em centímetros, substituindo-os na expressão obtém-se:

$$\sigma_\theta^2 = \left[-\frac{1}{1+\left(\frac{4}{28}\right)^2}\cdot\frac{4}{28^2}\right]^2 0{,}5^2 + \left[\frac{1}{1+\left(\frac{4}{28}\right)^2}\cdot\frac{1}{28}\right]^2 0{,}5^2 = 0{,}0012 \Rightarrow \sigma_\theta = 0{,}04 \text{ rad}$$

Em outra imagem, tais valores são $\left(x, y, \sigma_x, \sigma_y\right) = (23; 18; 0{,}5; 0{,}5)$, em centímetros. Substituindo-os na expressão da propagação, obtém-se agora:

$$\sigma_\theta^2 = \left[-\frac{1}{1+\left(\frac{18}{23}\right)^2}\cdot\frac{4}{23^2}\right]^2 0{,}5^2 + \left[\frac{1}{1+\left(\frac{18}{23}\right)^2}\cdot\frac{1}{23}\right]^2 0{,}5^2 = 0{,}0046 \Rightarrow \sigma_\theta = 0{,}07 \text{ rad}$$

Vale lembrar que mesmo que as incertezas em x e em y tenham sido fixadas, as medidas dessas grandezas refletem a variação da incerteza em sua leitura, de imagem para imagem, de conjunto para conjunto. Por esta razão, a diferença nos valores obtidos anteriormente (0,04 rad e 0,07 rad) já era em parte esperada. Não será mostrado aqui, mas para outros conjuntos de imagens foram obtidos valores de incerteza intermediários. Há de se decidir, agora, por qual valor optar, e o critério utilizado será o bom senso: olhando para as imagens, percebe-se que 0,04 rad (aproximadamente 2°) confere aos nossos dados uma precisão muito maior do que a que realmente se tem. O valor 0,07 rad (aproximadamente 4°) já é mais plausível. Portanto, será adotado $\sigma_\theta = 0{,}07$ rad.

Uma outra maneira de estimar essa incerteza é a partir recursos visuais. Para isso, comecemos com um chute inicial obtido por meio do raciocínio a seguir. Considere a **Fig. 1**: ela representa uma imagem do aro já em movimento. Detalhando parte dela, é possível perceber que tanto o comprimento da marca na borda do aro quanto a “dilatação”[1] da fita próxima à extremidade do mesmo são da ordem de $2\sqrt{2}$ cm, que é o valor da diagonal do quadradinho de lado 2 cm.

---

[1] A “dilatação” a que nos referimos diz respeito à largura da fita, que parece mais grossa quando o aro gira rapidamente.

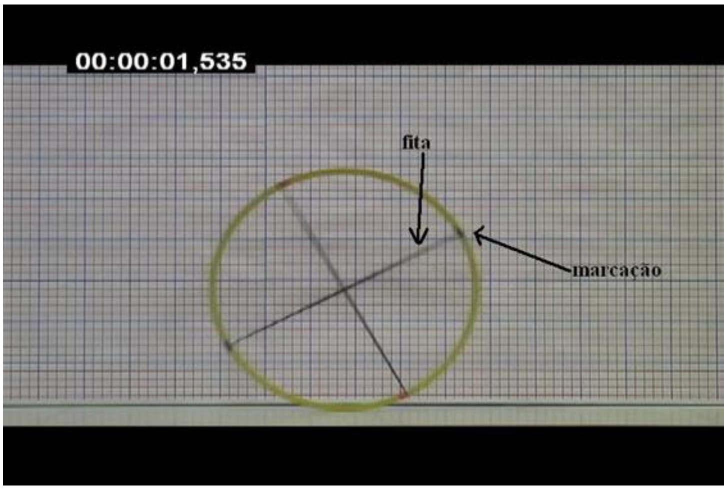

Figura 1. A fita "dilatada" e a marcação na borda do aro
da mesma ordem de tamanho da diagonal do quadradinho de lado 2 cm.

Com boa aproximação, podemos atribuir essa estimativa ao comprimento de arco tomado pela marcação, e pela fita próxima a ela, como mostrado na **Fig. 2**:

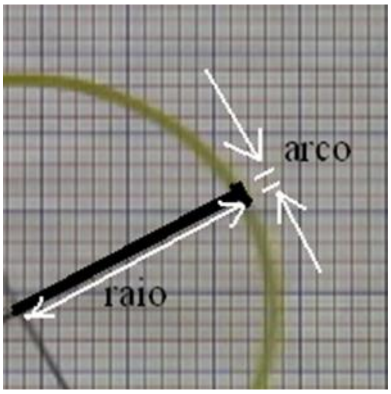

Figura 2. A marcação é, com boa aproximação, um arco de circunferência de mesmo raio que o aro.
Logo, é possível calcular o seu correspondente valor em termos de ângulo.

Como o raio do aro vale $R = 27{,}9$ cm, o arco subtende um ângulo $\theta = \frac{2\sqrt{2}}{27{,}9} = 0{,}10$ rad, que equivale a um ângulo próximo de 6°.

Devemos pensar agora no deslocamento angular mínimo que se pode medir. Essa é uma questão difícil de ser respondida porque a nitidez da imagem e, portanto, o deslocamento mínimo mensurável varia de imagem para imagem, de acordo com o estado de movimento do aro. Considerando que na maioria dos casos é muito cômodo medir 6°, algo em torno de dois terços disso já se torna um pouco trabalhoso. Assim, concluímos que o desvio padrão da posição angular θ está na faixa de $0{,}04$ rad a $0{,}10$ rad. Na análise de todos os dados disponíveis, verificamos que $\sigma_\theta = \frac{2}{3}6° = 4° \cong 0{,}07$ rad é o que representa melhor a incerteza de todo o conjunto e, por isso, é a que sugerimos para ser adotada.