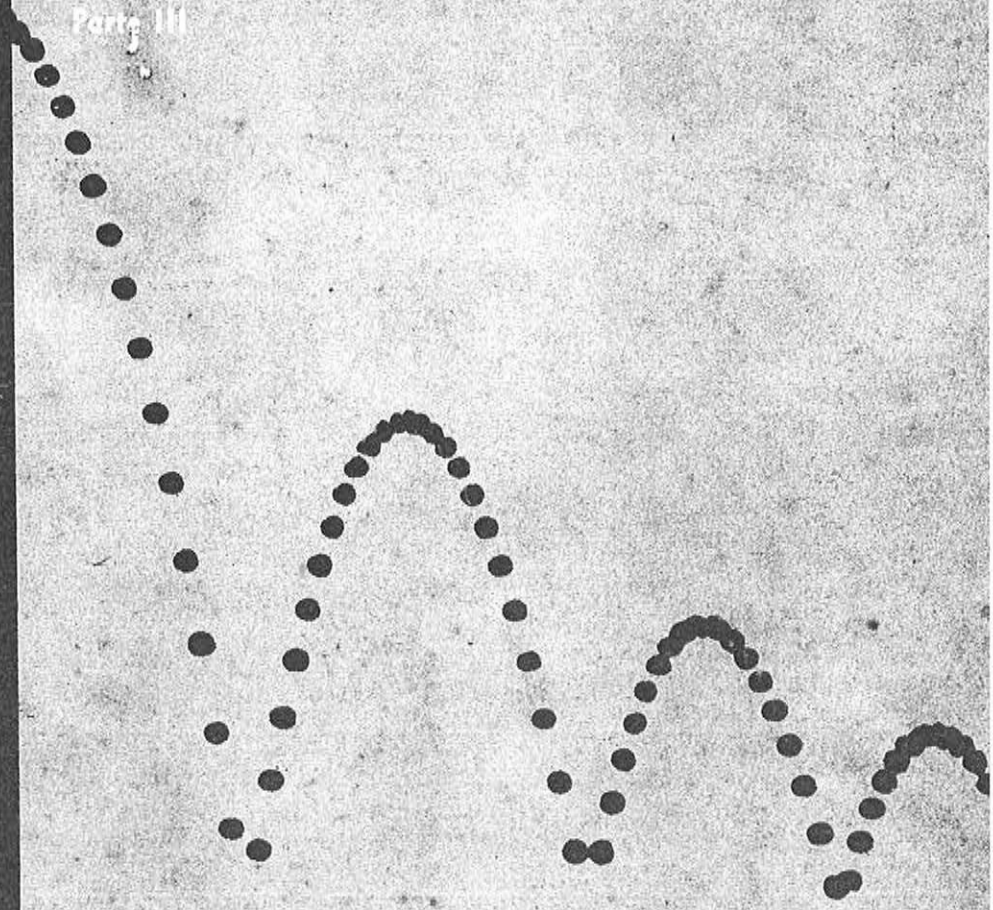
PHYSICAL SCIENCE STUDY COMMITTEE

GUIA DO PROFESSOR DE FÍSICA

Parte III



FUNDAÇÃO BRASILEIRA PARA O
DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE CIÊNCIAS
E
CENTRO DE TREINAMENTO
PARA PROFESSÔRES DE CIÊNCIAS — CECISP

GUIA DO PROFESSOR DE FÍSICA

PSSC

Vol. III

1968

Traduzido e adaptado pelas equipes da Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências e do Centro de Treinamento de Professôres de Ciências de São Paulo

Programa conjunto de publicação de Guias de Professor da Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências e do Centro de Treinamento de Professôres de Ciências de São Paulo

Título do original: PSSC PHYSICS Teacher's Resource Book and Guide

Publicado por D.C. HEATH AND COMPANY por acôrdo com o
EDUCATIONAL SERVICES INCORPORATED

Direitos de impressão, 1960, pelo EDUCATIONAL SERVICES INCORPORATED

Parte alguma dêste material protegido por êsses direitos pode
ser reproduzida, sob qualquer forma, sem permissão.

Tradução autorizada, com direitos reservados para o Brasil pela
FUNDAÇÃO BRASILEIRA PARA O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE CIÊNCIAS

Taduzido e adaptado pelos professôres:
EIKITE TENGNOM
MOYSÉS RODRIGUES
NAIR LONGHI TENGNOM

PLANEJAMENTO DO CURSO DE FÍSICA - PSSC PARA O BRASIL

A partir da época em que foi lançado à venda o volume I da Física PSSC, a Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências vem acumulando dados para um planejamento realista do curso PSSC, de maneira a tornar possível o uso dos quatro volumes nos nossos três anos de curso colegial.

Quando foram publicados os dois primeiros volumes do Guia do Professor, não tínhamos ainda uma base suficiente para fazer um planejamento global realmente exeqüível.

Agora que o volume IV do aluno já está em uso em numerosas classses, podemos propor o esquema abaixo.

Apreciaríamos receber sugestões de professôres que estão usando o PSSC e ainda não tiveram ocasião de nos trazer o resultado de suas experiências. A correspondência pode ser dirigida a: Prof. Eikit Tengnon — FUNBEC — C. P. 91 — São Paulo, SP.

Para introduzir êste planejamento no Guia, os tradutores levaram em consideração não sòmente suas experiências no ensino do PSSC, como também, principalmente, as sugestões de professôres que colaboram em entidades ligadas ao ensino e divulgação dêste curso, tais como o CECINE (Centro de Treinamento para Professôres de Ciências do Nordeste), CECIRS (Centro de Treinamento para Professôres de Ciências do Rio Grande do Sul), CECIGUA (Centro de Treinamento para Professôres de Ciências da Guanabara), CECISP (Centro de Treinamento para Professôres de Ciências de São Paulo) e FUNBEC (Fundação Brasileira para o Desenvolvimento do Ensino de Ciências).

Pressupostos Pedagógicos

Na programação aqui recomendada, focalizamos o segundo ciclo do ensino secundário no Brasil (principalmente, o curso científico) de razoável nível pedagógico, didático e administrativo. Êste planejamento, embora factível e realista, pode estar sujeito a adaptações inerentes às condições regionais.

Supomos, outrossim, que o professor tenha participado de algum curso de treinamento do PSSC e, portanto, conheça o método, a orientação e finalidade do curso.

É imprescindível que o Colégio tenha um laboratório adequado, com todo o material necessário às experiências do curso.

Baseamos, ainda, o nosso calendário escolar em 180 dias letivos, com aula de 50 minutos, distribuídas do seguinte modo:

1.º Científico — 4 aulas semanais.
2.º Científico — 4 aulas semanais.
3.º Científico — 5 aulas semanais.

Recomendações

Ao planejar o curso, tivemos em mira que adaptações específicas podem e devem ser feitas, apenas, aumentando ou diminuindo a profundidade do tratamento de certos tópicos, isto porque o curso foi organizado e ordenado de forma a constituir um quadro integrado. Se fôsse composto de unidades pouco correlatas, seria fácil selecionar um número apropriado dessas unidades para adptá-las a um plano par-

ticular. Mas, êste não é o caso. Paulatinamente, o curso vai formando novas idéias, através do contexto precedente. *Tal continuidade é uma das principais virtudes pedagógicas do curso;* logo, conclui-se que a assimilação das últimas partes seria apenas superficial, sem base no assunto precedente. Assim, o professor que necessita adaptar o curso a um intervalo de tempo mais restrito poderá economizar tempo, tratando com menor ênfase alguns tópicos.

PLANEJAMENTO

1.º ANO CIENTÍFICO

Capítulos	Semanas	Aulas em Classe	Aulas de Lab.	Experiências
1 — Que é Física?	7,5	2	—	—
2 — Tempo e Sua Medição		4	4	I-1
3 — Espaço e Sua Medição		4	5	I-2, I-3
4 — Funções e Escalas		6	5	I-4
5 — Movimento ao Longo de Uma Trajetória	5	7	5	I-5
6 — Vetores		8	—	—
7 — Massa, Elementos e Átomos	7	4	10	I-6, I-7, I-8
8 — Átomos e Moléculas		5	—	—
9 — A Natureza de Um Gás		4	3	I-9
10 — Mensuração		2	—	—
11 — Comportamento da Luz	10,5	2	—	—
12 — Reflexão e Imagens		5	8	II-1, II-2
13 — Refração		5	4	II-3
14 — Lentes e Instrumentos Ópticos		5	5	II-4
15 — Modêlo Corpuscular da Luz		4	4	II-5, II-6

2.º ANO CIENTÍFICO

Capítulos	Semanas	Aulas em Classe	Aula de Lab.	Experiências
16 — Introdução às Ondas	9	2	2	II-7
17 — Ondas e Luz		2	10	II-8, II-9, II-10, II-11
18 — Interferência		3	5	II-12, II-13
19 — Ondas Luminosas		4	7	II-14, II-15, II-16, II-17
20 — A Lei do Movimento de Newton	10	3	12	III-1, III-2, III-3, III-4
21 — Movimento na Superfície da Terra		11	6	III-5, III-6
22 — Gravitação Universal e o Sistema Solar		5	3	III-7
23 — A Quantidade de Movimento e Sua Conservação	12	9	8	III-8, III-9, III-10
24 — Trabalho e Energia Cinética		8	2	III-11
25 — Energia Potencial		7	5	III-12, III-13
26 — Calor, Movimento Molecular e a Conservação da Energia		6	2	III-14

3.º ANO CIENTÍFICO

Capítulos	Semanas	Aulas em Classe	Aula de Lab.	Experiências
27 — Alguns Fatos Qualitativos Sôbre a Eletricidade	8	5	3	IV-1, IV-2
28 — A Lei de Coulomb e a Carga Elétrica Elementar		8	5	IV-3, IV-4
29 — Energia e Movimento de Cargas em Campos Elétricos		14	6	IV-5, IV-6
30 — O Campo Magnético	7	14	12	IV-7, IV-8, IV-9, IV-10
31 — Indução e Ondas Eletromagnéticas		8	—	—
32 — Explorando o Átomo	7	10	3	IV-12
33 — Fótons e Ondas Associadas à Matéria		10	3	IV-11
34 — Sistemas Quânticos e a Estrutura dos Átomos		8	—	—
Matéria complementar	8	40	—	—

ÍNDICE

Introdução à Parte III 1

CAPÍTULOS

20 — A Lei do Movimento de Newton 5
21 — Movimento na Superfície da Terra 33
22 — A Gravitação Universal e o Sistema Solar 70
23 — Quantidade de Movimento e Sua Conservação 96
24 — Trabalho e Energia Cinética 132
25 — Energia Potencial 164
26 — Calor, Movimento Molecular e Conservação da Energia 195

APÊNDICES

1 — Cinemática e Dinâmica do Movimento Circular 219
2 — Solução para o Movimento em que $F = -kx$ 225
3 — Solução da Equação Diferencial do Movimento Harmônico Simples 227
4 — Relatividade Geral 228
5 — Dedução da Equação que Relaciona m, m_0, v e v_0 para Foguetes 230
7 — Ângulo de 90° Numa Colisão Elástica 231
8 — Relação Entre Fôrça e Energia Potencial 232
9 — Cálculo das Velocidades de Escape e Energias de Ligação 233
10 — Energia do Movimento das Moléculas de um Gás Poliatômico 234
11 — Suplemento Histórico Sôbre Calor 235
12 — Suplemento Sôbre as Três Leis da Termodinâmica 237
13 — Suplemento Sôbre Máquinas 238

LABORATÓRIO — EXPERIÊNCIAS

Guia do Professor para Experiências, Parte III 239
III — 1 Uma Variante da Experiência de Galileu 239
III — 2 Variações de Velocidades por uma Fôrça Constante. 241
III — 3 Como a Aceleração Depende da Fôrça e da Massa 243
III — 4 Massas Inercial e Gravitacional 247
III — 5 Fôrças Exercidas Sôbre uma Bola no Espaço 249
III — 6 Fôrça Centrípeta 255
III — 7 Lei das Áreas Iguais 258
III — 8 Variação da Quantidade de Movimento Numa Explosão. 261
III — 9 O Carrinho e o Tijolo 263
III — 10 Uma Colisão em Duas Dimensões 265
III — 11 Colisões Lentas 269
III — 12 Variações na Energia Potencial 270
III — 13 A Energia de um Pêndulo Simples 272
III — 14 Uma Colisão Frontal 273

INTRODUÇÃO À PARTE III

A Parte III trata da dinâmica. Ela aborda a questão geral, "Por que os corpos se movem da maneira como o fazem?" A discussão, naturalmente, conduz ao estudo de fôrça e massa e ao desenvolvimento de importantes assuntos, tais como, quantidade de movimento e energia.

Em geral, há duas maneiras de abordar um problema de dinâmica. Uma delas é um estudo detalhado, ponto por ponto, que pode ser chamado método diferencial. Êste estudo começa com uma situação inicial particular de posição, velocidade e campo de fôrça. O campo de força é utilizado para determinar a aceleração resultante, e o conhecimento da aceleração torna possível construir a trajetória, passo a passo. O segundo tratamento pode ser chamado método de integração. Êle ignora os detalhes da interação, e deduz algumas das características do estado final de um sistema dinâmico, aplicando as leis da conservação que relacionam as condições finais às condições iniciais.

A maior parte dos problemas de dinâmica, que são de interêsse freqüente para um físico, pode ser melhor tratada por um processo de integração. É por esta razão que a Parte III põe em relêvo as leis da conservação. A estas leis foi dada muito mais ênfase, do que normalmente se dá em um curso secundário. As leis da conservação são de grande importância para os físicos contemporâneos. É importante que os alunos conheçam a sua origem, sua utilidade e a extensão de sua validade.

Por outro lado, apesar da percepção intuitiva que o aluno possa ter, êle associará sua familiaridade, na dinâmica com fôrça e movimento. Portanto, é natural que a dinâmica seja introduzida pelo processo da diferencial, passando-se, em seguida, ao estudo da utilidade das técnicas de integração.

Dentro dêste plano de trabalho, a Parte III começa, no Capítulo 20, com o desenvolvimento da lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$. O processo é parcialmente histórico, uma vez que os métodos desenvolvidos por Galileu e Newton, para resolver êsses problemas básicos, são o início da Física como nós a conhecemos. Há uma ampla oportunidade, no Capítulo 20, para desenvolver uma apreciação do método envolvido, e também para a compreensão física que surgiu dessa aplicação.

O Capítulo 21 trata de uma série de problemas dinâmicos, nos quais o campo de fôrça é particularmente simples e bem conhecido. No caso da fôrça gravitacional, a atenção é dirigida, principalmente, para o movimento na superfície da Terra, onde a fôrça pode ser considerada constante. Próximo ao fim do capítulo, uma evidência que mostra que a fôrça gravitacional diminui com o aumento da distância é introduzida. Isto conduz ao Capítulo 22, onde a solução do principal problema do movimento planetário é desenvolvida num contexto histórico.

Os quatro capítulos restantes da Parte III desenvolvem duas importantes leis da conservação na mecânica, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia. O Capítulo 23 estabelece, a partir da experiência, a conservação da quantidade de movimento, assim desenvolve-a como uma nova lei física, não como uma consequência da "segunda" e "terceira" leis de Newton, como é feito freqüentemente. De fato, até o ponto em que a lei da conservação da quantidade de movimento é introduzida, a terceira lei de Newton ainda não foi dada. É importante que o tratamento dêste assunto esteja consistente com estas considerações. A mistura dessas duas possíveis apresentações poderá causar maior confusão aos alunos. A validade da conservação da quantidade de movimento, como tôdas as outras leis físicas prèviamente estabelecidas, está baseada na síntese de um grande número de observações experimentais.

Os últimos três capítulos da Parte III propiciam um amplo tratamento do conceito de energia. Êstes capítulos diferem profundamente dos desenvolvimentos, normalmente dados em muitos cursos de iniciação. Por esta razão, vale a pena discutir, ràpidamente, o modo como a energia é desenvolvida nesses capítulos.

Importância do Conceito de Energia. A aplicação da lei da conservação de energia é um poderoso método para resolver uma enorme gama de problemas, uma vez que a energia é um dos conceitos básicos da Física. Portanto, para o aluno é importante entender, tanto a energia como a sua conservação.

Omissão de uma Definição. O texto não faz tentativas para dar uma definição curta e específica de energia. Isto nada significa! Ao invés de começar com uma definição, uma melhor compreensão e apreciação eventual do significado da idéia de energia pode ser obtida, através do entendimento de como o conceito de energia é aplicável a muitos fenômenos. Prosseguindo em tais desenvolvimentos, o texto apresenta as seguintes idéias:

O têrmo energia é aplicado a uma grande variedade de características do movimento e posição relativa da matéria. Um têrmo único é usado, porque essas grandes variedades de características estão tôdas ligadas por uma única lei de conservação. A fim de dar ênfase à extensão do conceito de energia, e insistir na conservação de energia, o texto propositadamente evita uma definição superficial de energia, tal como "a capacidade de fazer trabalho". Em lugar disso, várias formas de energia são introduzidas, e a conversibilidade de energia de uma forma a outra é discutida. O conceito de trabalho é entendido como uma maneira de transferir energia. O trabalho é definido como uma quantidade básica; é, então, possível formular uma descrição quantitativa de muitas formas de energia, partindo de uma quantidade de trabalho feito para produzi-las.

Plano de Ataque. A estratégia do texto é introduzir as três formas de energia que aparecem: cinética, potencial e térmica. Com estas três formas, é possível discutir a transferência de energia de uma forma para outra, demonstrando que a energia total é sempre conservada.

Exemplos Ilustrativos. Exemplos podem ilustrar várias dificuldades que surgirão, se a energia fôr simplesmente definida como "a capacidade de realizar trabalho".

Considere uma bola de basebol, movendo-se horizontalmente com uma velocidade, v. Relativamente à Terra, ela tem uma energia cinética de $1/2\ mv^2$. Porém, relativamente a um observador num trem em movimento, ela tem uma energia cinética diferente. Portanto, a quantidade de trabalho, que a bola de basebol pode produzir depende de que ela transfira trabalho sôbre alguma coisa na terra ou no trem.

Se a bola fôsse lançada horizontalmente do alto de um patamar, uma pessoa em baixo dêsse patamar diria que a bola tem tanto energia cinética como potencial. Por isso, a capacidade da bola de realizar trabalho não depende ùnicamente da velocidade horizontal, mas também da altura (ou profundidade) do sistema em que o trabalho é considerado. (Se o homem cavasse um buraco na base do patamar, obteria da bola mais trabalho).

A fim de complicar ainda mais a situação, pode-se levar a bola ao fogo, após haver ela atingido o solo. Pode-se, então, efetuar trabalho, fazendo funcionar uma máquina térmica com o calor obtido pelo desprendimento da energia química. A medição da energia da bola pela sua capacidade de fazer trabalho exige que se mencione, agora, não sòmente sua velocidade horizontal e altura, mas ainda o seu conteúdo em calor. Além disso, a menos que a temperatura dos gases eliminados pelo escapamento esteja no zero absoluto, nem tôda a energia térmica pode ser recuperada como trabalho; uma parte dêsse calor será eliminada pelo escapamento.

Como um exemplo final, a substância da bola poderia ser aniquilada pela antimatéria, liberando, assim, energia em forma de radiação.

A partir dêsses breves exemplos das várias formas de manifestação da energia, é evidente que uma simples definição não pode dar um sentido adequado à verdadeira amplitude do conceito. O importante é desenvolver alguma vivência para a ampla utilidade da lei da conservação, ao tratar uma grande variedade de aspectos diferentes daquilo que chamamos energia. Se você fornecer aos alunos alguma apreciação dessas idéias, êles terão algo mais convincente do que uma embalagem perfeita, mas incompleta, da definição de cinco palavras.

MATERIAIS RELATIVOS À PARTE III

Laboratório. Como as outras partes do curso, as experiências para a Parte III são entendidas como responsáveis por uma parte significativa do aprendizado. Um bom planejamento e uso do laboratório não sòmente contribuirão para uma maior compreensão dos vários princípios e suas aplicações, mas para uma melhor percepção de como os princípios são deduzidos das experiências. As Notas de Laboratório, no fim dêste volume, incluem recomendações sôbre o planejamento e a orientação de cada uma das experiências e respostas às questões do Guia de Laboratório dos alunos.

Filmes. Os filmes do PSSC, apropriados para cada capítulo, são descritos nos resumos dos capítulos dêste Guia. Os filmes relativos à Parte III do curso são mencionados abaixo, com breves comentários sôbre possíveis planejamentos.

"Forces" é uma introdução geral à mecânica. Êste filme pode ser apresentado na primeira aula sôbre a Parte III.

"Inertia" e "Inertial Mass" são filmes correlacionados que mostram a experiência básica da lei de Newton, com um aparelho aproximadamente ideal (sem atrito). "Inertia" está relacionado às Seções 1-4 do Capítulo 20. "Inertial Mass" está relacionado às Seções 5 e 6. Provàvelmente, êstes filmes serão melhor utilizados como uma discussão básica de classe, *após* os alunos terem concluído as Experiências III-2, 3 e 4, no laboratório.

"Falling Bodies" mostra a proporcionalidade entre as massas gravitacional e inercial. O filme pode ser utilizado nas Seções 2, 3 e 4 do Capítulo 21.

"Deflecting Forces" evidencia a validade da lei de Newton, na sua forma vetorial, por meio de uma análise do movimento circular. Êste filme está relacionado com a Seção 5 do Capítulo 21.

"Periodic Motion" analisa as experiências que demonstram a relação entre fôrça e distância e o período de um movimento harmônico simples. Êste filme pode ser utilizado com a Seção 8 do Capítulo 21.

"Frames of Reference" demonstra como diferentes sistemas de referências conduzem a diferentes descrições do movimento, e como uma escolha apropriada do sistema de referência simplifica os problemas de dinâmica. Pode ser usado, proficuamente, nas Seções 9, 10 e 11 do Capítulo 21.

"Universal Gravitation" reconstrói, baseando-se na lógica, a lei da gravitação universal, pela imaginação de como a lei poderia ter sido descoberta num planêta, em outro sistema solar que possuísse sòmente êsse planêta. Êste filme está bastante relacionado às Seções 6, 7 e 8 do Capítulo 22.

"Elliptic Orbits" utiliza a lei das áreas de Kepler, para mostrar que uma lei de fôrça do inverso do quadrado decorre de uma órbita elíptica. Pode ser exibido juntamente com a discussão das Seções 7 e 8 do Capítulo 22.

"Energy and Work" explora a relação entre trabalho e energia cinética, conduzindo no final à energia térmica. Dependendo da discussão em classe, desenvolvida em tôrno do filme, êste pode ser utilizado em vários pontos dos Capítulos 24 e 25.

"Mechanical and Thermal Energy" utiliza modelos e experiências para mostrar a interconexão entre energia de movimento como um todo e energia térmica de movimento desordenado. É melhor planejar êste filme com as Seções de 3 a 7, do Capítulo 26.

"Conservation of Energy" ilustra a conservação da energia, pelos vestígios da variação de energia na atividade da planta. Êste filme pode ser utilizado com as últimas seções do Capítulo 26.

Série Estudos de Ciências. Os títulos mais recomendados, que tratam dos assuntos relativos à Parte III do curso, são:

The Universe at Large, Herman Bondi;

The Birth of a New Physics, I. Bernard Cohen;

The Watershed, Arther Koestler.

Livros sôbre gravidade, cosmologia, relatividade geral, relatividade especial, movimento dos satélites e inúmeros outros assuntos sôbre a Parte III estão sendo planejados.

PLANEJAMENTO DA PARTE III

Dois possíveis planejamentos para a Parte III estão indicados na tabela abaixo. O planejamento de nove semanas é entendido como um guia aproximado para aquêles que programaram um curso de 36 semanas. O planejamento de 15 semanas indica como se pode distribuir, eficazmente, um tempo adicional, bem como dispor de um guia para um curso de três semestres.

	Planejamento de 15 semanas para a parte III			Planejamento de 9 semanas para a parte III		
Capítulo	Períodos de aula	Períodos de Lab.	Exp.	Períodos de aula	Períodos de Lab.	Exp.
20	4	4	III-1 III-2 III-3 III-4	4	2	III-2 III-3
21	14	2	III-5 III-6	8	1	III-6
22	5	1	III-7	3	0	-
23	11	3	III-8 III-9 III-10	8	2	III-8 III-9
24	9	1	III-11	6	1	III-11
25	7	2	III-12 III-13	4	1	III-12
26	8	1	III-14	4	0	-

CAPÍTULO 20

A LEI DO MOVIMENTO DE NEWTON

Êste capítulo introduz a lei do movimento de Newton, que é fundamental ao estudo da mecânica. Em vista da variedade e complexidade dos fenômenos que podem ser explicados por esta lei, sua elegante simplicidade é surpreendente. Para compreender o alcance e o poder da lei de Newton, os alunos devem familiarizar-se com suas aplicações. Exemplos são dados na seção do CCL. Entretanto, se a aplicação formal da lei de Newton fôr dada logo de início ou com demasiada ênfase, especialmente em alguns problemas mais complicados, trará dificuldades aos alunos na compreensão básica das relações entre fôrça, tempo, velocidade e massa. Por esta razão, uma descrição formal da lei de Newton é adiada no texto, até terminar a análise de uma experiência simples em que, mantendo duas das variáveis constantes, obtém-se a relação entre as outras duas. A intenção é de evitar a simples memorização de $F = ma$, sem a real compreensão das relações fundamentais entre fôrça, tempo, velocidade e massa. O trabalho de laboratório, já de início, contribuirá para esta finalidade.

A lei do movimento de Newton está baseada numa grande escala de experiências e observações, que são descritas neste e nos capítulos seguintes. As Seções 8, 9 e 10, para uma completa apresentação, citam propriedades da lei que não foram verificadas pela experiência real até o Capítulo 21. Os problemas do CCL relativos a estas seções são, contudo, muito úteis. Êles serevem de valiosa revisão dos estudos anteriores sôbre vetor, e como uma introdução à mecânica. Os assuntos do texto, para os quais o número de problemas apropriados do CCL parece ser insuficiente (massa inercial e gravitacional, fôrças variáveis), reaparecerão em capítulos posteriores e serão tratados com maiores detalhes.

RESUMO DO CAPÍTULO

Seção Introdutória e Seções 1 e 2. O princípio de inércia de Galileu é apresentado, após os alunos terem sido motivados a pensar apenas no movimento, sem considerar a fôrça. A ênfase está no argumento que Galileu usou para tirar conclusões, a partir da idealização de uma situação física.

Seções 3 e 4. A relação quantitativa entre fôrça e movimento é formulada diretamente, de uma experiência simples. Mantendo a massa e a fôrça constantes, $\triangle v \propto \triangle t$. Mantendo a massa e o tempo constantes, $\triangle v \propto F$. Êsses dois fatos são resumidos por $\triangle v \propto F \triangle t$, ou $\frac{\triangle v}{\triangle t} \propto F$.

A fôrça é introduzida intuitivamente, como sendo relacionada com um puxão ou empurrão. A constância da fôrça aplicada está baseada na hipótese razoável de que uma fôrça constante produza uma deformação constante em uma mola (ou elástico). A escala de fôrça relativa está baseada na hipótese da aditividade (isto é, duas molas "idênticas", deformadas igualmente e puxadas paralelamente na mesma direção, exercem duas vêzes a fôrça que seria exercida por cada uma delas, separadamente.

Seções 5 e 6. O conceito de massa inercial é introduzido, e suas características são investigadas. A *experiência* mostra a proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional. O quilograma é introduzido como a massa padrão.

Seção 7. As relações entre as variáveis da dinâmica e cinemática, que foram desenvolvidas nas seções anteriores, são sintetizadas numa única equação, $F \triangle t = m \triangle v$ (ou $F = ma$). Tendo já as unidades de massa e aceleração, esta equação define uma unidade de fôrça, o newton no sistema MKS.

Seções de 8 a 11. A lei de Newton é, em seguida, generalizada, citando-se uma evidência empírica para sua validade, no caso de uma fôrça variável. A natureza vetorial da fôrça, da aceleração e da equação $F = ma$ é também desenvolvida empìricamente.

A aplicabilidade da lei de Newton pode ser estendida a fôrças ocultas, que variam com o tempo, e ao movimento produzido quando várias fôrças atuam simultâneamente. Na última situação, a aceleração resultante será a mesma, se as diversas fôrças fôrem substituídas pela sua soma vetorial. Isto é uma verificação experimental de que as fôrças adicionam-se como vetores. Isto nos conduz à idéia de que a lei de Newton é, na realidade, uma fórmula vetorial: $\vec{F} = m\vec{a}$. Para determinar $\vec{a}$, é importante conhecer a fôrça resultante, incluindo as fôrças de resistência como o atrito. A lei de Newton está baseada em fôrças conhecidas, e é particularmente útil para predizer o movimento, quando tôdas as fôrças são conhecidas. Menos evidente, porém, igualmente de importante aplicação (especialmente no estudo da Física), envolve a determinação de uma fôrça desconhecida, a partir da observação da aceleração produzida por essa fôrça. De tais investigações, aprendemos muito a respeito de fôrças na natureza. Quando pudermos descrevê-las em nossos têrmos, será possível então predizer o movimento que ocorrerá sob a influência dessas fôrças.

Comentários sôbre o Desenvolvimento da Lógica do Capítulo 20. Assim, grande parte das idéias fundamentais está resumida pela simples e atrativa expressão, $F = ma$, e, se os alunos apreenderem algo de sua ampla aplicação, deverão atingir gradualmente, com um desenvolvimento consciente, o significado dessa relação. De outro modo, êles memorizarão a equação ràpidamente, para aplicá-la em problemas simples, e esquecerão a maior parte do seu significado. Através do estudo do texto, do trabalho de laboratório, filmes e discussão em classe, as três idéias fundamentais — princípio da inércia, lei de Newton e massa inercial — devem ser desenvolvidas completamente, *antes* da equação $F = ma$ ser introduzida.

A fim de evitar repetir alguns dos tópicos, vale a pena considerar o desenvolvimento lógico do capítulo, tendo como ponto de partida a seqüência de idéias a serem tratadas:

1. O princípio da inércia não requer um conceito quantitativo de massa, nem uma medida quantitativa de fôrça. A inércia pode ser introduzida pelo trabalho de laboratório (Experiência III-1) e pela discussão em classe, mesmo antes dos alunos terem lido as primeiras seções. Alguns alunos apreciarão melhor a contribuição de Galileu, se tentarem raciocinar independentemente sôbre a natureza do movimento, antes de estudarem os argumentos simples, mas elegantes, de Galileu.

2. Uma fôrça constante produz uma variação constanto na velocidade, independentemente de qualquer velocidade anterior. (A deformação constante de uma mola ou de um elástico é usada como uma evidente indicação de uma fôrça constante; nesta altura, não é necessária uma fôrça definida, bem como uma escala de fôrça relativa.) Utilizando as Figuras 20-5 e 20-6 como base, a classe pode fazer uso da Figura 20-7 como uma fonte de dados, para tirar a conclusão de que $\Delta v \propto \Delta t$.

3. A variação na velocidade de um objeto é proporcional à fôrça resultante, aplicada sôbre o mesmo. (A escala de fôrça relativa necessária está baseada na hipótese razoável de que duas molas idênticas, puxadas lado a lado, exercem duas vêzes a fôrça de cada uma delas, separadamente). $\therefore \Delta v \propto F$. Em resumo, como Δv é proporcional a Δt e F, $\Delta v \propto F\,\Delta t$, ou $F \propto \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

4. A massa inercial de um objeto é definida pela variação no movimento do objeto, como resultante da ação de uma dada fôrça. Portanto, as razões das massas são definidas em têrmos das razões das acelerações observadas, resultantes da ação de uma dada fôrça.

5. Após o entendimento das idéias acima, os alunos estarão preparados para compreender a massa padrão, a definição de unidades e a equação $F = ma$. Você observará que, embora a proporcionalidade entre F e $\Delta v/\Delta t$ seja alcançada ràpidamente, e os alunos reconheçam, com o entendimento adquirido no Capítulo 5, que $\Delta v/\Delta t$ é aceleração, o texto não utiliza o conceito de aceleração como tal, até ser considerado o efeito de massa. Neste ponto, $F\,\Delta t = m\Delta v$ está formulada, e a fórmula equivalente, $F = ma$, é apresentada. Se êste assunto

fôr dado muito ràpidamente, o raciocínio poderá parecer confuso aos alunos que, lembrando-se da unidade newton, definida de F = ma, ficarão em dúvida se F = ma é uma lei ou uma definição.

6. Pode-se inferir a fôrça resultante sôbre um objeto, observando sua aceleração. Êste fato é utilizado para mostrar que duas fôrças se adicionam como vetores.

7. $\vec{F} = m\vec{a}$ é uma relação vetorial; esta relação não depende da velocidade, $\vec{v}$, do objeto.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 20

	Planejamento em 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de Lab.	Exp.	Período de aula	Período de Lab.	Exp.
Secs. 1, 2	1	1	III-1	1	0	
Secs. 3, 4	1	2	III-2 III-3	1	2	III-2 III-3
Secs. 5, 6	1	1	III-4	1	0	
Secs. 7, 8, 9, 10, 11	1	0		1	0	

MATERIAIS RELATIVOS AO CAPÍTULO 20

Laboratório. O Guia de Laboratório inclui quatro experiências relativas ao Capítulo 20. Se você não dispuser de tempo para as quatro experiências, deverá dar maior prioridade às Experiências III-2 e III-3; em segundo lugar, à Experiência III-4; e, por último, à Experiência III-1. Se necessária, a Experiência III-1, poderá ser apresentada como uma demonstração em classe. As Experiências III-2 e III-3 devem preceder a uma discussão, em classe, das idéias relativas a tais experiências. A Experiência III-1 pode ser utilizada para introduzir o capítulo. Veja, nas Notas de Laboratório, comentários sôbre o planejamento e sugestões concernentes às experiências.

A Experiência III-1, *Uma Variante da Experiência de Galileu,* emprega um pêndulo simples para fornecer uma idealização semelhante à de Galileu, do comportamento de objetos movendo-se sôbre declives.

A Experiência III-2, *Variações de Velocidade por uma Fôrça Constante,* utiliza o marcador de tempo para fornecer um registro da variação na velocidade de um carrinho que está sujeito a uma fôrça constante. A fôrça constante é fornecida pela deformação constante de um elástico.

A Experiência III-3, *Como a Aceleração Depende da Fôrça e da Massa,* utiliza o mesmo material da Experiência III-2.

A Experiência III-4, *Massas Inercial e Gravitacional,* utiliza uma balança de inércia simples e pesagem comum, para mostrar a proporcionalidade das massas inercial e gravitacional. O funcionamento da balança de inércia é mostrado, como sendo independente da gravidade.

Casa, Classe e Laboratório. A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com seus níveis avaliados de dificuldade e as seções a que se referem. Os que são apropriados para discussão em classe estão indicados. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas dos problemas são dadas nas páginas do CCL.

Filmes. "Forces", por Jerrold R. Zacharias, do MIT, é uma introdução à Parte III do curso. O filme examina a natureza geral das fôrças gravitacional e elétrica (tanto eletrostática,

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão em classe
2	1*, 3	2		2
3		4*		4
4	5	6*, 7		
5	8*, 9, 10			
6	14			
7	11*, 12*	13, 15*, 16	17, 18, 22	16, 22
8	19, 21*		20	19, 20
9 e 10	23	24, 25*, 26		
11		27*	28	
Geral e revisão		29*	30	30

como magnética) e cita superficialmente fôrças nucleares. A fôrça gravitacional, entre objetos relativamente pequenos, é demonstrada com a balança de Cavendish. Tempo de projeção: 22 minutos.

"Inertia", por Edward M. Purcell, do Harvard University, desenvolve a idéia de inércia, examina os efeitos do atrito, e introduz um disco com gêlo sêco "sem atrito" que repousa sôbre uma camada de gás. Pelas fotografias estroboscópicas do disco, movendo-se sob a ação de uma fôrça constante, a proporcionalidade entre fôrça e aceleração é encontrada. Um dos melhores meios de utilizar êste filme é como base, para a discussão das idéias das Seções de 1 a 4. Tempo de projeção: 27 minutos.

"Inertial Mass", por Edward M. Purcell, do Harvard University, é uma continuação do filme "Inertia". Usando as mesmas técnicas do filme anterior, mostra que a aceleração é inversamente proporcional à massa. Assim, para uma fôrça constante, a aceleração é uma medida da massa inercial. É demonstrada a proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional. Êste filme pode ser utilizado juntamente com uma discussão das Seções 5 e 6. Tempo de projeção: 20 minutos.

Seção Introdutória

Seção 1 — Idéias sôbre Fôrça e Movimento

Seção 2 — Movimento Sem Fôrça

FINALIDADE. Estabelecer a distinção entre cinemática e dinâmica. Levantar a questão: Qual é a causa do movimento? Discutir o esfôrço, anterior a Galileu, para entender a dinâmica; e introduzir a lei da inércia, de Galileu.

CONTEÚDO a. Cinemática é a descrição sistemática do movimento.

b. Dinâmica é a análise das causas do movimento.

c. A partir de um puxão ou empurrão, a idéia de fôrça é generalizada.

d. Quando nenhuma fôrça resultante atua sôbre um objeto, seu estado de movimento permanece invariável.

ÊNFASE. Pouca discussão em classe será necessária, se estas seções fôrem dadas como lei-

tura. Entretanto, talvez você prefira discutir as primeiras seções do capítulo, antes de passá-las como leitura.

DESENVOLVIMENTO. Se você preferir apresentar êste assunto através de uma discusão em classe, poderá pedir e escrever no quadro-negro exemplos de movimentos de objetos, que não estão sendo puxados ou empurrados por um agente óbvio. Em seguida a cada exemplo, descreva o movimento, sucintamente, como na tabela abaixo:

Objeto	Movimento	Tipo
Automóvel (sem gasolina e sem freios).	Diminui lentamente e pára.	1
Livro empurrado, de modo a deslizar sôbre a carteira.	Diminui lentamente e pára.	1
Giz (ou qualquer objeto) que se deixa cair.	Aumenta a velocidade até atingir o piso.	2
Bola rolando num declive.	Aumenta a velocidade até atingir a parte mais baixa.	2
Lua girando em volta da Terra.	Move-se com uma velocidade de módulo constante	3
Terra girando em tôrno do seu eixo.	Gira a uma velocidade de módulo constante.	3

Depois de dar diversos exemplos de cada tipo, chame a atenção dos alunos para as três classes: 1) velocidade diminuindo, 2) velocidade aumentando, e 3) velocidade constante. Uma maneira de iniciar os alunos nessas idéias é pedir-lhes para darem razões ou explicações sôbre as causas do movimento. Você terá, provàvelmente, alunos que já pensam em gravidade e atrito como agentes externos. Não há razão para que se evite mencionar ràpidamente êsses mecanismos.

Após os alunos entenderem as três classes, concentre a discussão sôbre como se poderia fazer um objeto, que está diminuindo de velocidade, mover-se um pouco mais. Seus alunos ficarão interessados nisso e darão exemplos de redução de atrito pela lubrificação. Alguns alunos talvez conheçam a flutuação sôbre gases, através de artigos de ciência popular ou de algum objeto caseiro, tal como o aspirador de pó que flutua, em parte, sôbre uma camada de ar.

Finalmente, pergunte-lhes o que aconteceria ao movimento, se o atrito fôsse reduzido a zero, e como poderiam convencer um incrédulo disto. É possível mostrar à classe que não se pode realizar tal experiência, e que são necessários argumentos, como os apresentados em conexão com as Figuras 20-3 e 20-4.

° ° °

É importante que os alunos saibam interpretar quantitativamente as fotografias de flashes múltiplos, como as Figuras 20-5 b, 20-7, 20-9 e 20-16. Você pode discutir a experiência, utilizando algum equipamento de demonstração análogo ou as fotografias explicativas (20-5 a, 20-6, 20-8, 20-11 e 20-13).

Pode-se pedir aos alunos que determinem a velocidade do disco da Figura 20-5b. Utilizando-se de um compasso, êles podem fàcilmente determinar que a velocidade é cêrca de 12,7 cm por flashe ou 127 cm por segundo. Serão capazes de fazer estas medidas, com uma precisão de 1% ou 2%. Pergunte aos alunos pelo fator de redução da figura (6,4), ou sôbre o diâmetro do disco (cêrca de 10 cm).

Os alunos não serão capazes de medir a velocidade na Figura 20-5, com suficiente precisão, para perceberem a desaceleração. Esta desaceleração (citada na última frase da Seção 2, página 14) é sòmente 0,31 cm/s^2. Portanto, durante os sete intervalos ou 0,7 segundos mostrados na fotografia, a velocidade deve ter variado sòmente 0,21 cm/s, o que é imperceptível, uma vez que é apenas 1/6 porcento da velocidade medida.

(Observação: A desaceleração ou fôrça de atrito foi realmente determinada, medindo-se o amortecimento da oscilação, quando se fêz um dêsses discos oscilar através da mesa, ligado a uma mola cujas perdas internas eram bem conhecidas. Se um objeto se movesse em uma única direção sôbre uma mesa perfeitamente lisa, obter-se-ia a desaceleração citada, se um dos lados da mesa de 1 metro estivesse apenas 0,32 mm (ou 0,032 cm) mais alto que o outro lado. A fim de fazer experiências que aproveitem largamente essa pequeníssima fôrça de atrito, deve-se utilizar uma mesa extremamente lisa e nivelada com bastante cuidado. Além disso, essa mesa deve ser bem rígida (firme), e sua superfície bem limpa. Por exemplo, cristais de gêlo, formados pelo vapor de água existente no ar, interfeririam no movimento. Esta

dificuldade foi contornada, usando-se uma mesa de metal (alumínio) que conduz calor suficientemente bem, para prevenir o congelamento local.)

COMENTÁRIOS. Com alguma orientação durante a discussão, sua classe será capaz de dar exemplos dos três tipos de movimento aparentemente diferentes, mesmo sem ter lido o livro texto. Uma discussão introdutória dêsses tipos de movimento pode trazer considerável quantidade de idéias novas e o conseqüente interêsse dos alunos para êste assunto. Entretanto, procure limitar a discussão. A idéia é ilustrar como o problema foi abordado antes de Galileu, apontando as dificuldades do problema. Assim, o pensamento incisivo de Galileu pode ser mais ràpidamente apreciado.

Muitos alunos já estão familiarizados com o princípio de inércia de Galileu; a maioria dêles pode aprender isso ràpidamente e convencer-se completamente, através de experiências com o disco de gêlo sêco ou satélites. Contudo, antes de seu processo para convencê-los, utilizando técnicas modernas, verifique se êles entenderam como Galileu abordou o problema. Os Problemas 1, 2, e 3 são úteis como ponto de partida para a discussão.

Tente dar ênfase à extraordinária realização intelectual de Galileu, não sòmente pelo enunciado original da lei de inércia, mas ainda pelo seu *desenvolvimento de um nôvo método de raciocínio, em que combinou a observação da experiência real com a sua idealização*, para as situações mais simples e mais acessíveis.

LABORATÓRIO E DEMONSTRAÇÃO. A Experiência III-1 é uma idealização efetiva do princípio de Galileu, e ilustra maravilhosamente seus argumentos. Pode-se utilizá-la para introduzir estas seções. Se você não dispuser de tempo para realizar a Experiência III-1 no laboratório, como uma alternativa, apresente-a em forma de demonstração para mostrar a tendência de um objeto que cai, de retornar a sua altura original. Pode utilizar tanto planos inclinados, como pêndulos. Chame a atenção para o fato de que o comprimento total da trajetória não será importante, se o atrito fôr pequeno. Os alunos apreciarão fazer medidas e previsões sôbre a altura que o objeto alcançará, quando se variar ligeiramente as condições da experiência.

PRECAUÇÃO. Uma demonstração clássica relacionada com a lei da inércia (tal como puxar uma toalha de mesa sob utensílios domésticos) prova, simplesmente, que um objeto que está em repouso tende a permanecer em repouso. Todos os alunos (inclusive os alunos de Aristóteles) sabem que um objeto não apresenta tendência para mover-se, se está em repouso. Se você tem aptidão para fazer demonstrações, a memorização de suas demonstrações pode, de alguma forma, conduzir seus alunos à lei da inércia; todavia, para mostrar que um corpo em movimento tende a permanecer em movimento, é mais interessante a experiência citada acima. Tirar uma toalha de mesa com um puxão, sem tocar nos objetos colocados sôbre ela, evidencia sòmente que a fôrça de atrito não é suficiente para acelerar os objetos, apreciàvelmente; poucos alunos entendem a finalidade dessas demonstrações clássicas.

Se deseja fazer tais demonstrações, a mais interessante e ilustrativa é a seguinte:

Um pêso de, aproximadamente, um quilograma é suspenso por meio de um barbante. (O pêso pode ser uma chave de grifo). Amarre um outro pedaço de barbante na parte inferior do pêso. Em seguida, puxe o barbante inferior, gradativamente, com maior intensidade. Peça aos alunos para adivinhar qual dos barbantes irá arrebentar. Só acidentalmente, o barbante de baixo arrebentará. (Cuidado com as juntas dos seus dedos!) O barbante da parte superior arrebenta primeiro, porque a fôrça sôbre êle será a fôrça aplicada mais o pêso da chave.



Em seguida, suspenda a chave como antes, mas desta vez, sem esticar o fio da parte mais baixa, dê um puxão rápido para baixo. Se êsse golpe fôr dado com suficiente rapidez, o bar-

bante inferior arrebentará, e o superior permanecerá intacto. A explicação é de que, a fim de transmitir a fôrça para o barbante superior, (uma vez que êle é um pouco elástico) a chave deve mover-se, aumentando o esfôrço no barbante. A tendência da chave é permanecer parada, opondo-se à transmissão da fôrça do seu puxão, instantâneamente, ao barbante superior. O barbante inferior arrebenta, antes da chave mover-se o suficiente para transmitir esta fôrça.

Seção 3 — Variação da Velocidade Quando Atua uma Fôrça Constante

Seção 4 — Dependência entre a Variação de Velocidade e a Intensidade da Fôrça

FINALIDADE. Encontrar a relação entre fôrça e variação de velocidade.

CONTEÚDO a. Para um dado objeto, uma fôrça constante comunica uma variação na velocidade, que é diretamente proporcional ao intervalo de tempo durante o qual a fôrça atua.

b. Para um dado objeto, a variação da velocidade durante um determinado intervalo de tempo (isto é, a aceleração) é diretamente proporcional à fôrça aplicada.

ÊNFASE. Essas idéias são importantes, mas não requerem muitos períodos de discussão, se introduzidas como se recomenda, através das Experiências III-2 e III-3 no laboratório, antes de serem discutidas em classe.

DESENVOLVIMENTO. Se, após o laboratório, você perceber que seus alunos necessitam mais exercícios para interpretar dados como os da experiência, pode pedir-lhes para efetuar medidas da Figura 20-7 (ou 20-9), e construir tabelas semelhantes às Tabelas 1 ou 2 do livro texto. Uma vez que um êrro de 0,5 cm nos intervalos de distância, da Figura 20-7, contribui com um êrro de 2,5 cm/s na velocidade, os valôres que os alunos obtêm para a aceleração podem diferir apreciàvelmente dos valôres mostrados na Tabela 1, página 15.

Certifique-se de que os alunos compreendem que, embora os dados deduzidos dessas figuras sejam limitados por uma precisão de cêrca de 5%, a lei de Newton é conhecida com muito maior precisão através de outras experiências. Nos Capítulos 21 e 22, algumas dessas experiências serão discutidas.

COMENTÁRIOS. Nestas seções, o texto ressalta $\triangle v$ e $\triangle t$, ao invés de usar simplesmente a aceleração, a. Isto foi feito para realçar a relação entre F, $\triangle v$ e $\triangle t$; esclareça como a relação é determinada, pela observação e mensuração; e evite ocultar a relação atrás de um entendimento incompleto do conceito de aceleração. Será sensato não substituir a por $\triangle v/\triangle t$, até que seus alunos compreendam essas idéias.

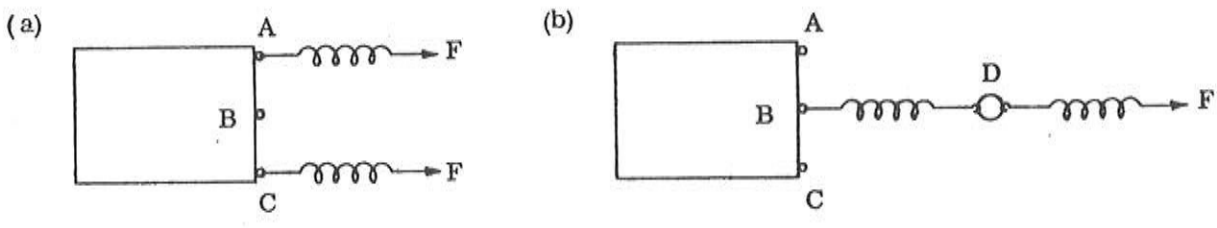
° ° °

Com relação à Tabela 1, alguns alunos talvez queiram saber de que maneira valôres precisos como 5,68 cm e 9,48 cm puderam ser determinados. Foram usadas fotografias grandemente ampliadas, e medidas extremamente cuidadosas foram feitas.

° ° °

A adição simples de duas fôrças paralelas é considerada no terceiro parágrafo da Seção 4. Há muitas maneiras de tratar dêste assunto. Provàvelmente, o método mais direto é tratá-lo como uma parte da definição de fôrça, $F + F = 2F$.

Talvez seja interessante, para você, propor a questão sôbre a diferença entre os efeitos da aplicação de duas fôrças em paralelo ou em série, sôbre um objeto. Na figura abaixo, mostra-se as duas disposições citadas.



Na figura (a), uma grande caixa está sendo puxada por dois homens, cada um exercendo uma fôrça, F, sôbre molas que estão prêsas à caixa. As duas molas são idênticamente construídas; assim, distendem-se igualmente, e cada uma exerce uma fôrça F sôbre a caixa. A caixa é puxada por duas fôrças, cada uma igual a F, e F + F = 2F. Na figura (b), as mesmas molas estão ligadas em série e prêsas à caixa em B. Agora, um dos homens puxa a extremidade livre da mola com uma fôrça F. A mola deforma-se, até atingir a mesma distensão que tinha em (a). Portanto, esta mola transmite a mesma fôrça F à segunda mola, que está ligada à primeira no ponto D. A fôrça F distende também a segunda mola da mesma quantidade que em (a), e esta mola puxa a caixa com a fôrça F aplicada em B. Portanto, em (b), ainda que ambas as molas estejam distendidas igualmente, com a mesma deformação padrão, uma delas apenas transmite a fôrça F para a outra mola que, por sua vez, transmite-a à caixa. Sòmente um homem está puxando. A fôrça sôbre a caixa é 1 × F.

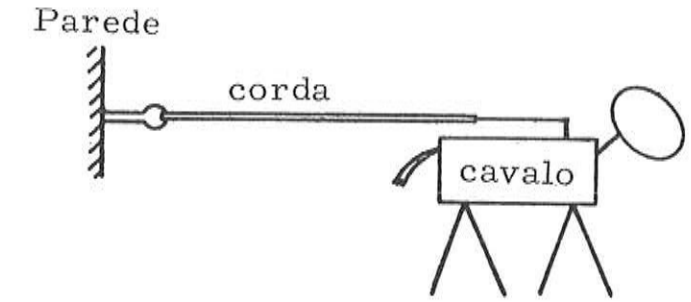
° ° °

Alguns alunos sentem intuitivamente que uma mola exercerá uma fôrça dupla, se sua distensão fôr dupla, medida a partir de seu ponto de equilíbrio, isto é, a mola não distendida. Embora isto seja aproximadamente verdadeiro para muitas molas, (e conhecido como lei de Hooke) é aproximadamente correto em condições favoráveis e não acontece na maioria dos casos. Por esta razão, êste fato não foi utilizado neste desenvolvimento e não deve ser introduzido como um fator significativo, nas discussões de aula.

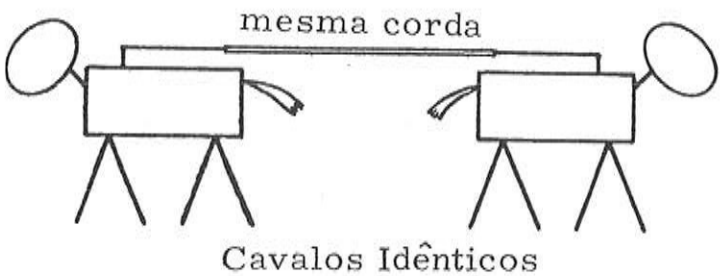
Quando entre dois corpos existe uma fôrça, é importante tornar claro aos alunos sôbre qual dêles a fôrça está atuando, e qual o agente que exerce a fôrça. Em qualquer problema físico, não há sentido em discutir a fôrça, exceto se o objeto e o agente são conhecidos. Naturalmente, há casos em que tanto o objeto como o agente são tão evidentes, que não há necessidade de expô-los explìcitamente. Mas, de vez em quando, você deve pedir aos alunos uma completa descrição sôbre a fôrça. (Isto é, "Que fôrça?" "Quem exerce a fôrça?" "Sôbre o que a fôrça atua?)"

QUESTÕES COMPLEMENTARES (ou questões para estimular discussões em classe).

1) Não é prudente admitir que as fôrças em série estejam bem entendidas. Você pode tentar isto: Um fazendeiro possui dois cavalos idênticos e uma corda tão resistente, que



Cavalo quase mas não suficientemente forte para arrebentar a corda.



arrebentará a corda?

Cavalos Idênticos

nenhum dos cavalos, puxando-a sòzinho, pode arrebentá-la.

Certos alunos pensam que a corda arrebenta, quando o outro cavalo entra em cena. Êles não compreendem que o segundo cavalo simplesmente substitui a parede.

2) Outra questão típica, que freqüentemente dificulta os alunos, é a seguinte:

Um cavalo está amarrado a uma carroça com uma corda. O cavalo puxa a corda com uma fôrça F. Por outro lado, a corda puxa o cavalo com uma fôrça F. Nesse caso, por que a carroça se move?

O ponto importante aqui é que, ao examinar a aceleração de qualquer objeto, deve-se considerar as fôrças que atuam sôbre o objeto. A carroça começa a mover-se, porque a ação da corda sôbre ela é maior do que a fôrça de atrito para trás. O cavalo começa a mover-se, porque a fôrça para frente, exercida pelo chão sôbre suas patas, é maior do que a fôrça para trás, exercida *pela* corda *sôbre* o cavalo — e assim por diante.

Seção 5 — Massa Inercial

Seção 6 — Massa Inercial e Massa Gravitacional

FINALIDADE. Definir operacionalmente a noção de massa inercial. Ressaltar que as massas inercial e gravitacional podem ser previstas como sendo independentes, porque as operações utilizadas para defini-las são inteiramente diferentes. Citar as evidências empíricas para a proporcionalidade direta entre as massas inercial e gravitacional.

CONTEÚDO a. A massa inercial é a razão da resultante de tôdas as fôrças aplicadas sôbre o objeto pela aceleração produzida.

$$m = \frac{F}{a} \text{ ou } m = \frac{F\,\triangle t}{\triangle v}.$$

A razão F/a será aproximadamente a mesma para qualquer velocidade da massa que seja pequena, em comparação com a velocidade da luz.

b. As massas inerciais adicionam-se como números.

c. Não há, aparentemente, nenhuma relação lógica necessária entre os efeitos gravitacional e inercial, mas experimentalmente, a atração da gravidade sôbre vários objetos é verificada como sendo diretamente proporcional às suas massas inerciais.

ÊNFASE. Estas idéias são de grande importância. Talvez você necessite despender uma aula completa, a fim de apresentar e esclarecer os conceitos de massa gravitacional, massa inercial e pêso. Mesmo assim, talvez seja necessário comentar de vez em quando essas idéias, para manter o raciocínio correto.

LABORATÓRIO. A Experiência III-4 deve ser dada, após a discussão dessas seções. Esta experiência deverá ser omitida, se você dispuser de pouco tempo.

COMENTÁRIOS. Os alunos sentir-se-ão mais familiarizados com a massa intercial, se lhes der um entendimento intuitivo para suplementar a definição formal, baseado na fôrça e na aceleração. Quando os alunos imaginam algo massivo, tendem a pensar no pêso e, se pedir para avaliar a massa, êles pensarão em suspendê-la. Obterão uma idéia muito melhor de massa inercial, se levá-los a pensar em mover um objeto de um lado para outro (isto é, avaliar a massa pelo esfôrço requerido para deslocá-lo).

° ° °

Foi apresentada aos alunos a equivalência entre massa e energia, na Seção 6 do Capítulo 7 e em outras fontes. (Veja o Guia do Professor para a Parte I, página 129). O conceito de energia é o assunto dos últimos capítulos da Parte III. Deve ser evitada aqui uma discussão detalhada em classe, mas se lhe perguntarem, pode responder que massa e energia são consideradas como equivalentes — tanto a massa como a energia podem ser convertidas uma na outra, mas em qualquer processo, a massa total mais a energia dividida pelo quadrado da velocidade da luz permanece constante, isto é,

$$m_1 + m_2 + \ldots + \frac{E}{c^2} = \text{constante}.$$

Portanto, se a luz fôr emitida por uma lâmpada de flashe, a lâmpada terá menos massa e a luz ficará com a massa restante — tanto numa me-

dida gravitacional como inercial. Uma vez que essa diferença de massa é uma fração tão pequena da massa da lâmpada, a diferença não seria detectável por qualquer balança real, embora se possa detectar a massa da luz. (Veja a solução do Problema 10).

* * *

Experiências que medem a massa, pela medida da aceleração e da fôrça, ilustram o significado da massa inercial. Entretanto, tais experiências não podem ser realizadas com grande precisão. Por isso, quando possível, tais experiências são substituídas por outras de maior precisão. Para objetos de tamanho comum, a comparação de pesos (massas gravitacionais), utilizando uma balança de braços iguais, é preferível a uma experiência com aceleração. Contudo, a validade de tais procedimentos repousa no conhecimento da proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional.

Alguns alunos sentirão dificuldade em distinguir entre os dois tipos de massa associados a um objeto. Êles podem aceitar mais ràpidamente a independência entre *fôrça* gravitacional e massa inercial. A fôrça gravitacional entre um objeto e a Terra é o que nós chamamos pêso do objeto. Se o objeto A pesa duas vêzes mais do que o objeto B, isto significa que a atração da Terra sôbre A é duas vêzes maior do que sôbre B. Agora, se fizermos uma experiência completamente independente da anterior, em que medimos as acelerações de A e de B sob a ação de várias fôrças, determinaremos que, para qualquer fôrça dada, A é acelerado exatamente com a metade da aceleração de B. A partir dessas acelerações experimentais, devemos concluir que a massa inercial de A é o dôbro da de B. Êste resultado não pode ser previsto das observações de fôrças gravitacionais. Nenhum princípio básico da física clássica relaciona as duas experiências, mas a razão das fôrças gravitacionais sôbre dois objetos diferentes, no mesmo lugar, define a razão de suas massas gravitacionais. Conseqüentemente, não há também um princípio básico, relacionando as massas gravitacionais de dois objetos. O fato de serem idênticas as razões das duas massas é uma relação estabelecida experimentalmente *

Realmente, os dois tipos de experiências descritas acima não podem ser realizados com um extremo grau de precisão. Um método mais acurado, que determina diretamente a razão $m_{inercial}/m_{gravitacional}$, é a medida da constância da aceleração de diferentes massas em queda livre. Tal método será tratado detalhadamente no Capítulo 21, Seção 2.

Experiências mais precisas, baseadas na mesma idéia, envolvem a freqüência de oscilação de um pêndulo. A fôrça gravitacional tende a puxar o pêndulo para a sua posição mais baixa; a massa inercial opõe-se à aceleração produzida por esta fôrça. A freqüência do pêndulo é proporcional à raiz quadrada da razão, (m_g/m_i); é também proporcional à $\sqrt{g/l}$, onde g é a aceleração produzida em queda livre, e l é o comprimento do pêndulo. Experiências de grande precisão foram feitas, utilizando pêndulos de mesmo comprimento, mas de materiais diferentes.

Medidas ainda mais precisas são aquelas que envolvem medidas da velocidade de revolução da Lua (ou de um satélite artifical da Terra), utilizando uma unidade padrão de tempo muito precisa, estabelecida por um "relógio atômico" (isto é, um relógio que está baseado nas freqüências características de um átomo particular). As melhores experiências, assim realizadas, mostram que a razão de m_g para m_i varia menos de 3 partes em 10^{10}.

Esta relação aparentemente acidental, a proporcionalidade entre m_g e m_i, foi proposta por Eistein na teoria geral da relatividade, como uma verdade universal, uma propriedade inerente a matéria. Êste "princípio de equivalência" é uma das premissas sôbre a qual a teoria foi construída.

---

* Você pode pensar no seguinte argumento, embora êle não seja apropriado para discussão em classe, nesta altura do curso. A fôrça sôbre um corpo, carregado elètricamente num campo elétrico e gravitacional, pode ser descrita como:

$$\vec{F} = q_e\vec{E} + q_g\vec{g}$$

onde $q_g = m_g$. Não há uma razão a priori para reconhecermos que q_g, a "carga gravitacional" (ou massa gravitacional) deva ser a mesma que a massa inercial, mais ainda, que q_e possa ser a massa inercial. *Experimentalmente* contudo, q_g é proporcional a m_i e pode ser considerado igual pela escolha apropriada de unidades.

Seção 7 — Lei de Newton: Medida Dinâmica da Fôrça; Unidades.

FINALIDADE. Compreender a lei de Newton, e estabelecer uma unidade de fôrça que possa, por sua vez, ser usada para medir massas.

CONTEÚDO. A relação, $F \triangle t = m \triangle v$, ou $F = ma$, é identificada como lei do movimento de Newton. Esta lei fornece uma base para definir a unidade de fôrça. A aceleração pode ser medida em têrmos de distância e tempo — metros e segundos, e podemos obter a quantidade de massa, comparando-a com o quilograma padrão; portato, uma unidade de fôrça — o newton — pode ser definida como a intensidade de fôrça que produz em uma massa de 1 kg a aceleração de 1 m/s^2. Com esta definição de fôrça, podemos medir as massas em têrmos da quantidade, F/a.

ÊNFASE. Tornar claro que a lei de Newton fornece uma base sólida, não arbitrária, para definir uma unidade de fôrça. Não se detenha aqui em praticar com a nova unidade, pois a prática virá naturalmente, no restante dêste capítulo e nos dois capítulos seguintes.

COMENTÁRIO. Esta seção descreve outro passo à frente, na tentativa dos físicos em trabalhar com coisas que podem ser derivadas de princípios primitivos. A lei de Newton é um dêsses princípios. Nosso conceito de intensidade de fôrça é, assim, definido em têrmos de um conceito primitivo. Poderíamos definir uma unidade de fôrça em têrmos da deformação de uma mola, bem preservada e depositada em algum instituto de pesos e medidas. Mas, esta definição seria completamente arbitrária. A unidade de massa, que parece bastante arbitrária, atualmente pode ser definida em têrmos da massa do átomo de hidrogênio; $5{,}98 \times 10^{26}$ átomos de hidrogênio perfazem um quilograma. A unidade padrão poderia ser, a própria massa de um único átomo de hidrogênio ou de oxigênio, exceto para os casos em que essa unidade de massa fôsse impraticàvelmente pequena.

° ° °

O texto se refere a uma única lei como sendo a lei do movimento, de Newton, conforme o esclarecido ao pé da página 20. Freqüentemente, três leis são atribuídas a Newton. A lei da inércia, comumente chamada primeira lei de Newton, foi estabelecida por Galileu e é, simplesmente, um caso particular da "segunda lei" — ela refere-se ao caso em que $F = ma = 0$. A "segunda lei" é, exatamente, $F = ma$ e é chamada, aqui, lei do movimento, de Newton. A "terceira lei" refere-se à igualdade das fôrças de ação e reação, e é discutida no Capítulo 24, Seção 8; não é realmente uma lei de movimento.

Seção 8 — Aplicação da Lei de Newton a Fôrças Variáveis

FINALIDADE. Mostrar como a lei de Newton poderá ser aplicada, se a fôrça não fôr constante.

CONTEÚDO a. Se a fôrça varia, é possível calcular seu efeito, considerando o que acontece em cada intervalo sucessivo de tempo muito pequeno. (Êstes intervalos de tempo podem ser considerados tão pequenos, que a fôrça é pràticamente constante durante o intervalo.) Para cada intervalo de tempo, $\triangle t$, a variação no movimento é descrita pela equação ..... $F \triangle t = m \triangle v$.

b. $F \triangle t = m \triangle v$ é verdadeira, independentemente de qualquer velocidade inicial que o objeto possa ter. (A equação não é válida a velocidades próximas à da luz).

ÊNFASE. É importante que os alunos entendam a idéia que nos possibilita usar $F\triangle t = m\triangle v$, para analisar variações em um movimento durante um particular intervalo de tempo, sem levar em conta a origem ou a natureza do movimento que o corpo possa ter no início dêsse intervalo de tempo. De qualquer maneira, uma vez levantada a questão, a idéia deve ser clara. O enunciado da lei, de modo geral, limita-a à *variação* na velocidade de uma determinada massa sob a ação de uma fôrça constante, durante um determinado intervalo de tempo. Se quisermos analisar movimentos envolvendo fôrças variáveis, simplesmente escolheremos intervalos de tempo de tal forma que, dentro dêsses intervalos, a fôrça seja (pràticamente) constante.

COMENTÁRIO. A partir do que foi prèviamente estabelecido, através de observações

experimentais (isto é, que F = ma, se F é constante), não é possível deduzir lògicamente, apenas com argumentos, o que acontece se F não é constante. O fato de realizarmos experiências em que uma fôrça é aplicada e, em seguida removida, significa que temos situações nas quais a fôrça varia com o tempo, e não é observada nenhuma discordância da lei F = ma. A fim de estarmos mais seguros de que a aceleração depende sòmente de F/m, em vez de, por exemplo, $\frac{1}{m}\left(F + \frac{dF}{dt}\right)$, devemos realizar experiências. Colisões, discutidas no Capítulo 21, e movimentos planetários são excelentes fenômenos com que testamos que a aceleração instantânea é igual à fôrça instantânea dividida pela massa, sem adicionar quaisquer têrmos dependentes da razão de variação da fôrça. Nessas experiências, sempre verificamos a lei do movimento, de Newton, exceto nos casos de movimentos com velocidades próximas à velocidade da luz, em que a lei muda para um caso mais amplo no qual a massa efetiva varia com a velocidade.

Seção 9 — Como As Fôrças Se Somam; A Fôrça Resultante

Seção 10 — Natureza Vetorial da Lei de Newton

FINALIDADE. Considerar o efeito de muitas fôrças simultâneas e a extensão da lei de Newton para tais casos.

CONTEÚDO a. As fôrças adicionam-se como vetores.

b. A lei de Newton aplica-se ao vetor soma das fôrças que atuam sôbre um objeto.

c. A lei de Newton pode ser escrita como a relação entre dois *vetores:* a fôrça resultante e a aceleração.

ÊNFASE. Estas conclusões requerem uma prova experimental, que é apresentada no Capítulo 21. A lei de Newton conserva sua forma extremamente simples, ainda mesmo nas situações mais complicadas; assim, não se deve despender muito tempo em discussões detalhadas, nesta altura.

COMENTÁRIOS. A lei de Newton foi estabelecida como a relação entre a aceleração de um objeto e uma fôrça única, atuando sôbre êsse corpo. Quando várias fôrças atuam num dado instante, observa-se apenas uma *única* aceleração. Uma fôrça única efetiva, que satisfaz à lei de Newton, pode ser determinada: ma = $F_{efetiva}$. $F_{efetiva}$ deve estar relacionada com tôdas as fôrças independentes que estão atuando. $F_{efetiva}$ é simplesmente o vetor soma de tôdas as fôrças atuantes, e é chamada fôrça resultante.

Uma observação mais detalhada: A relação F = ma, como sugerida nesta seção, tem mais conteúdo do que o mostrado acima. F = ma implica em que a aceleração é sempre proporcional à fôrça, não importando o ângulo formado entre a fôrça e o vetor-*velocidade,* uma vez que a velocidade não aparece na equação. Por exemplo, a lei de Newton deve ser válida, se empurramos um corpo, lateralmente à direção do seu movimento. Isto será verificado, experimentalmente, no Capítulo 21.

Seção 11 — Fôrças na Natureza

FINALIDADE. Demonstrar que, embora as fôrças na natureza sejam complexas, o movimento resultante pode ser analisado pela lei de Newton.

CONTEÚDO. Para averiguar sôbre fôrças na natureza, podemos estudar os movimentos para achar as acelerações e, em seguida, aplicar a lei de Newton para deduzir as fôrças. Uma vez conhecidas as fôrças, podemos predizer qualquer movimento produzido por tais fôrças.

ÊNFASE. Trate com brevidade. As idéias desta seção conduzem ao Capítulo 22, que fornece um exemplo excitante da aplicação da lei de Newton.

COMENTÁRIO. Ainda que não seja de conseqüência imediata, é interessante observar nesta altura que a resistência do ar aumenta com a velocidade. Compreender isto, agora, reduzirá o número de idéias a serem assimiladas, quando os alunos analisarem a experiência de Millikan (Parte IV), e devem entender que a velocidade constante de uma partícula, movendo-se através do ar, significa fôrça resultante

0, e como a resistência do ar é proporcional à velocidade, diferentes velocidades constantes representam diferentes fôrças aplicadas. No domínio das velocidades utilizadas na experiência de Millikan, a velocidade é proporcional à fôrça aplicada — isto não acontece para tôdas as velocidades.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

A capacidade dos alunos analisarem e resolverem problemas é uma boa maneira de avaliar o seu aprendizado das idéias do Capítulo 20. A análise de problemas típicos, em classe, será de grande proveito.°

A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com seus níveis avaliados de dificuldades e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente apropriados para discussão em classe. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (°).

As respostas de todos os problemas, que requerem uma resposta numérica ou abreviada, são dadas após a tabela. Soluções detalhadas são dadas nas páginas 18-32.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão em classe
2	1*, 3	2		2
3		4*		4
4	5	6*, 7		
5	8*, 9, 10			
6	14			
7	11*, 12*	13, 15*, 16	17, 18, 22	16, 22
8	21*, 19		20	19, 20
9 e 10	23	24, 25*, 26		
11		27*	28	
Geral e revisão		29*	30	30

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. (a) 10 cm.
   (b) 100 cm.
   (c) 200 cm.
2. Veja discussão.
3. Veja discussão.
4. 4,0 m/s.
5. 30 cm/s².

° O Problema 15 é particularmente instrutivo mas, se você pedi-lo como exercício, deve considerar que:

1. Na *primeira impressão* do livro texto, a legenda para a Fig. 20-16 foi omitida. A legenda indica que a escala está em cm, e o intervalo entre os flashes é de 0,2 segundos.

2. Alguns alunos talvez tenham dificuldades em perceber que estão trabalhando com velocidade média dos sucessivos intervalos. Veja NOTA ESPECIAL, no fim da discussão do Problema 15.

6. (a) 1,5.
   (b) 0,9 m/s.
7. Veja discussão.
8. (a) O primeiro objeto.
   (b) 0,36.
9. (a) 0,239.
   (b) Alumínio.
10. Veja discussão.
11. 2 newtons.
12. 5 m/s^2.
13. 6 m/s^2.
14. 1,9 m/s^2.
15. (a) Veja discussão.
    (b) Veja discussão.
    (c) Veja discussão.
    (d) Provàvelmente, sim.
    (e) 1,0 newton.
16. (a) 2,0 kg.
    (b) Usando uma balança.
    (c) Havia atrito.
17. (a) 4,0 s.
    (b) 0,35 m/s, 2,8 m/s.
18. (a) 1,0 s.
    (b) 12 m/s.
19. Fôrça zero.
    Veja discussão.
20. (a) Aceleração aumentando proporcionalmente a t.
    (b) Fôrça aumentando proporcionalmente a t.
21. (a) 0,40 m/s.
    (b) 0,10 m/s.
    (c) Na mesma direção inicial
22. (a) 3,0 m/s^2.
    (b) 9,0 m/s.
    (c) 6,0 m.
    (d) 12 m.
23. (a) $\frac{1}{6}$ m/s^2.

    (b) $\frac{1}{4}$ m/s^2.

    (c) Havia uma fôrça de atrito de 2/3 newton.
24. (a) 0,70 m/s^2 na direção da bissetriz.
    (b) 1,0 m/s^2, 0.
25. (a) 2,0 m/s.
    (b) 25° com a fôrça de 4 newtons.
26. 520 newtons.
27. $F_{aplicada} = 8\,200$ newtons.
28. (a) Veja discussão.
    (b) 3,0 m/s, 6,0 m/s.
    (c) A variação na massa não afeta a velocidade máxima.
    (d) A velocidade máxima deve diminuir.
29. Veja discussão.
30. Veja discussão.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

Uma bola é abandonada a partir do repouso no plano inclinado da esquerda (Fig. 20-4) de uma altura 10 cm acima do ponto mais baixo.

(a) Se não houver atrito, que altura, segundo a vertical, atingirá ela no plano inclinado da direita?

(b) Se a inclinação do plano da direita fôr de 1 cm para cada 10cm de distância horizontal, que distância horizontal a bola percorrerá sôbre o plano?

(c) Se a inclinação fôr apenas 0,5 cm para cada 10 cm de distância horizontal, que distância alcançará a bola?

a) A bola atingirá a mesma altura, isto é, *10 cm.*

b) Como a bola sobe 1 cm para cada 10 cm percorridos horizontalmente, para subir 10 cm, a bola deverá percorrer uma distância horizontal de *100 cm.*

c) A inclinação é reduzida à metade. A altura vertical considerada é ainda 10 cm; portanto, a distância horizontal é agora *200 cm.*

Estamos nos aproximando progressivamente do caso ideal de Galileu, em que inclinação é zero, quando a bola percorre uma distância indefinidamente grande.

PROBLEMA 2

Por que é perigoso saltar de um veículo em movimento? Em que direção tendemos a cair quando fazemos isso?

Isto é perigoso porque, quando seus pés tocam o solo, serão levados ao repouso.

Entretanto, a parte restante do seu corpo tenderá a manter o movimento que tinha no veículo. Se o centro do seu corpo se mover para a frente, além de sua base (seus pés), você cairá. Tenderá a cair na direção do movimento do veículo.

Para evitar a queda, você deve procurar manter o seu centro de gravidade sôbre sua base, isto é, manter o corpo sôbre os pés. Para fazer isto, deve ser capaz de correr tão ràpidamente quanto o veículo em movimento, quando você salta dêle. É mais fácil esperar que o veículo pare.

PROBLEMA 3

Por que é particularmente perigoso dirigir numa estrada molhada?

É necessária uma fôrça para produzir a aceleração, associada com: fazer curvas, freiar e acelerar. Esta fôrça é desenvolvida entre o carro e a terra, através do atrito entre os pneus e a superfície da estrada. A fôrça de atrito entre os pneus e a estrada molhada é bem menor do que a fôrça de atrito entre os pneus e a estrada sêca. A fôrça de atrito relativamente pequena, desenvolvida em uma estrada molhada, torna difícil variar apreciàvelmente o valor ou a direção da velocidade do carro. Portanto, em uma estrada molhada, o carro persiste em manter a sua velocidade e direção, a despeito dos freios, acelerador ou direção do veículo. Em tais casos, um choque eventual com um poste telefônico, um barranco da estrada ou um outro carro pode fornecer a fôrça aceleradora.

PROBLEMA 4

Certa fôrça, exercida durante 1,2s, eleva a velocidade de um objeto de 1,8 m/s, a 4,2 m/s. Depois, esta mesma fôrça é aplicada durante 2,0s. De quanto varia a velocidade no período de 2,0 s? (Em ambos os casos, a fôrça é aplicada no sentido do movimento).

Neste problema, efetivamente estamos dando alguns dados semelhantes aos da Tabela 1. Como a fôrça é a mesma nos dois casos, a variação da velocidade é proporcional ao tempo.

$\frac{\triangle v_1}{\triangle v_2} = \frac{\triangle t_1}{\triangle t_2}$, e $\triangle v_2 = \frac{\triangle t_2}{\triangle t_1} \triangle v_1 = \frac{2{,}0}{1{,}2}\ 2{,}4 = 4{,}0$ m/s.

PROBLEMA 5

Certo corpo é puxado sôbre uma superfície horizontal lisa, por uma mola mantida em distensão constante. Verifica-se que o corpo é acelerado a 15 cm/s². Qual será a aceleração do corpo se êle fôr puxado por duas molas, cada uma exatamente igual à primeira lado a lado, e distendidas igualmente? Veja Fig. 20-8 (a).

Ambas as molas atuam sôbre o corpo. Como as molas são distendidas igualmente, elas puxam com fôrças iguais. Portanto, $F_{total} = F_1 + F_2 = 2F_1$. Como a fôrça foi dobrada, a aceleração resultante deve ser também o dôbro:

Se $\frac{F_1}{m} = 15$ cm/s², $\frac{2F_1}{m} = 2 \times 15$ cm/s² $= 30$ cm/s².

PROBLEMA 6

Um objeto desliza sôbre mancais com atrito desprezível, puxado com fôrça constante. No intervalo de tempo de 0,3 s, a velocidade varia de 0,2 m/s para 0,4 m/s. Numa segunda experiência, o objeto é puxado com outra fôrça; no mesmo intervalo de tempo, a velocidade varia, então, de 0,5 m/s a 0,8 m/s.

a) Qual a razão entre a segunda fôrça e a primeira?

b) Se o corpo fôr puxado pela segunda fôrça durante 0,9 s, qual será a variação de velocidade? (Note que as fôrças têm o sentido do movimento).

a) Visto que as massas e os intervalos de tempo são os mesmos nas duas experiências, a razão das fôrças é igual à razão das *variações* de velocidade:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\triangle v_2}{\triangle v_1} = \frac{0{,}8 \text{ m/s} - 0{,}5 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m/s} - 0{,}2 \text{ m/s}} = 1{,}5.$$

b) Quando uma dada massa é acelerada por uma certa fôrça, a variação de velocidade será proporcional ao espaço de tempo em que a fôrça é aplicada. Na segunda experiência,

como o tempo é três vêzes maior, a variação de velocidade será três vêzes maior.

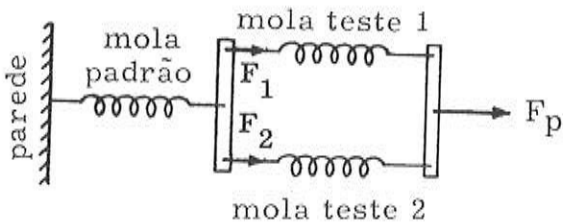
$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta v_1}, \text{ e } \Delta v_2 = \Delta v_1 \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} =$$

$$= 0{,}3 \text{ m/s} \times \frac{0{,}9 \text{ s}}{0{,}3 \text{ s}} = 0{,}9 \text{ metros/s.}$$

PROBLEMA 7

Na seção 20-4, discutimos um modo pelo qual uma mola distendida poderia ser calibrada de forma a exercer o dôbro da fôrça de uma mola padrão, esticada de um dado comprimento. Prepare-se para discutir em classe como você determina se uma mola esticada está exercendo a metade da fôrça da mola padrão.

Uma maneira de fazer isto seria colocar duas molas idênticas, uma ao lado da outra e ligadas à mola padrão. Êste sistema de mola pode ser puxado, até que a mola padrão atinja uma distensão padrão. Quando o sistema de molas é mantido neste ponto, o par de molas não se move (sua aceleração é zero); portanto, as duas molas não possuem fôrça resultante e a fôrça total, exercida pelo par de molas em experiência, deve ser igual à fôrça padrão. $F_p = F_1 + F_2$.



Se as duas molas testadas são idênticas, elas adquirirão uma mesma deformação, e F_1 e F_2 serão iguais. Portanto, $F_1 = F_2 = \frac{F_p}{2}$.

A fim de testar essas fôrças que são a metade da fôrça padrão, podemos realizar experiências em que as molas aplicam, sucessivamente, uma fôrça ao mesmo corpo. Aplicando F_p, F_1 e F_2 separadamente, durante o mesmo intervalo de tempo, observa-se um aumento na velocidade do corpo em experiência. Se $F_1 = F_2 = 1/2\ F_p$, logo, quando F_1 e F_2 atuam separadamente num mesmo corpo, cada uma delas deve produzir sòmente a metade da variação da velocidade produzida por F_p.

PROBLEMA 8

Suponha que você acelera certo objeto com uma fôrça constante e verifica que a variação de velocidade durante o intervalo de tempo $\Delta t = 1$ s é 2,4 m/s. Depois você repete a medida, aplicando a mesma fôrça a um segundo objeto, que adquire a velocidade de 3,3m/s em 0,5 s.

a) Que corpo tem maior massa inercial?

b) Qual a razão entre a massa inercial do segundo objeto e a do primeiro?

a) A variação da velocidade do primeiro objeto é 2,4 m/s em um segundo. A variação da velocidade do segundo objeto é 3,3 m/s em 0,5 segundos, ou 6,6 metros em um segundo. Desde que as fôrças são as mesmas, o *primeiro* objeto deve ter uma massa inercial maior.

b) Uma vez que as fôrças são as mesmas em ambos os casos, $m_1a_1 = m_2a_2$.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{2{,}4 \text{ m/s}^2}{6{,}6 \text{ m/s}^2} = \frac{4}{11} = 0{,}36.$$

PROBLEMA 9

a) Fôrças iguais atuam sôbre dois blocos de metais diferentes, idênticos em forma e tamanho, que deslizam sôbre uma superfície horizontal lisa. Verifica-se que a aceleração do segundo bloco é 4,18 vêzes a do primeiro. Qual a razão entre a massa do segundo bloco e a do primeiro?

b) Sabe-se que o primeiro bloco é de chumbo. Usando as densidades referidas na Tabela 2, Seção 7-4, decida de que material é feito, possìvelmente, o segundo bloco.

a) Como as fôrças aplicadas são iguais, $m_1a_1 = m_2a_2$.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{4{,}18\, a_1} = \frac{1}{4{,}18} = 0{,}239.$$

b) Uma vez que a densidade do chumbo é 11,3, a densidade do segundo objeto deve ser

$\frac{11,3}{4,18} = 2,70$. Pela Tabela 2, o segundo bloco pode ser feito de *alumínio*.

PROBLEMA 10

Por que é fechado o frasco da Fig. 20-10? Esteja preparado para explicá-lo em classe.

O frasco é mantido fechado, para que nenhum produto da reação química possa escapar do sistema. (Realmente, nenhum gás é obtido nesta reação). Portanto, a soma da massa do frasco com o conteúdo permanecem constante.

Observação: Rigorosamente, se calor, luz ou energia sonora são radiados durante a reação, haverá um decréscimo correspondente na massa, de acôrdo com a equivalência de massa e energia. Entretanto, esta variação é desprezível, e talvez seja melhor não discutir o assunto, a menos que a questão seja levantada pelos alunos. Uma variação de massa $\triangle m$ kg corresponde a uma variação de energia $E = \triangle mc^2 = \triangle m\ (3 \times 10^8\ m/s)^2 = 9 \times 10^{16}\ \triangle m$ joules. Um carvão de pedra de elevado teor fornece, aproximadamente, 3×10^7 joules de energia calorífica por kg. Isto corresponde a uma variação de massa de sòmente $\frac{3 \times 10^7}{9 \times 10^{16}} = 3 \times 10^{-10}$ kg por cada kg queimado; isto constitui uma variação de apenas uma parte em 3×10^{10}.

PROBLEMA 11

Um corpo cuja massa é 0,5 kg, é acelerado a 4 m/s². Que fôrça atua sôbre êle?

Uma vez que a massa é dada em quilogramas e a aceleração em metros/s², a fôrça será expressa em newtons.

$F = ma = 0,5\ kg \times 4\ m/s^2 = 2$ newtons.

PROBLEMA 12

Uma fôrça de 3 newtons atua sôbre a massa de 0,6 kg. Qual a aceleração produzida?

$F = ma,\ a = \frac{F}{m} = \frac{3\ \text{newtons}}{0,6\ kg} = 5\ \text{metros/s}^2.$

PROBLEMA 13

Uma fôrça de 5 newtons imprime à massa m_1 a aceleração de 8 m/s² e à massa m_2 a aceleração de 24 m/s². Que aceleração ela imprimiria aos dois corpos reunidos?

Êste problema pode ser resolvido de vários modos. Se fôr resolvido por etapas, podemos escrever:

$$m_1 = \frac{F}{a_1} = \frac{5}{8}\ kg,\ e,$$

$$m_2 = \frac{F}{a_2} = \frac{5}{24}\ kg.$$

Portanto, $m_1 + m_2 = \frac{5}{8} + \frac{5}{24} = \frac{5}{6}$ kg, e

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{5}{5/6} = 6\ m/s^2.$$

Na solução acima, observa-se que F é cancelado. Isto poderia ter sido antecipado, lembrando que a fôrça é proporcional tanto à massa como à aceleração. Poderíamos escrever:

$$m_1 = F/a_1 \text{ e } m_2 = F/a_2.$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{F/a_1 + F/a_2} = \frac{F}{F/8 + F/24} =$$

$$= \frac{F}{F/6} = 6\ m/s^2.$$

PROBLEMA 14

Você tem dois objetos, A e B, que se equilibram quando colocados em pratos opostos de uma balança de braços iguais. Quando você os coloca do mesmo lado, êles equilibram um terceiro objeto, C, do outro lado. O objeto A é acelerado a 3,8 m/s², quando você lhe aplica certa fôrça. Suponha, agora, que você aplica a mesma fôrça a C. Qual será a aceleração?

Como $m_a = m_b$ e $m_a + m_b = m_c$, segue-se que $m_c = 2\,m_a$. Uma vez que uma dada fôrça acelera m_a a uma razão de 3,8 m/s², a mesma fôrça acelerará m_c a metade da razão, ou 1,9 m/s².

Enquanto o equilíbrio é concernente à massa gravitacional, e a aceleração à massa inercial, a equivalência entre as massas gravitacional e inercial, determinada experimentalmente, faz com que o resultado acima seja o esperado, o que na verdade observamos.

PROBLEMA 15

Na Fig. 20-16, meça $\triangle x$, a distância percorrida em cada intervalo, para os intervalos numerados de 5 a 10.

a) Qual é a velocidade $\triangle x/\triangle t$ em cada intervalo?

b) Quais as variações de velocidade $\triangle v$ em cada intervalo?

c) *Qual é a aceleração $\triangle v/\triangle t$ em cada intervalo?

d) Está agindo uma fôrça constante?

e) Admitindo que o disco tem massa de 2 kg, qual a fôrça média aplicada?

Na legenda da Figura 20-16 do texto, foi inadvertidamente omitida a descrição da mesma. Nessa figura a escala está em cm, e o intervalo de tempo entre os flashes é de 0,2 s.

a), b), e c) Os valôres abaixo foram tomados de medidas feitas por um aluno. Êsses valôres são os que comumente se obtém, não necessàriamente "corretos".

Intervalo número	$\triangle x$ (cm)	$\frac{\triangle x}{\triangle t}$ (cm/s)	$\triangle v$ (cm/s)	a (cm/s²)
5	8,9	44,5		
6	10,9	54,5	10,0	50,0
7	12,9	64,5	10,0	50,0
8	14,8	74,0	9,5	47,5
9	16,9	84,5	10,5	52,5
10	18,9	94,5	10,0	50,0

d) A variação no valor para a aceleração pode ser devido a pequenos êrros na medida. Provàvelmente, atuou uma fôrça constante.

e) $a_{média} = 50$ cm/s² $= 0{,}50$ m/s². $F = 2 \times 0{,}50 = 1{,}0$ newton.

Observe que 1 cm, na escala da figura, é ligeiramente menor do que 2 mm. Ainda que o aluno seja cuidadoso, pode cometer um êrro de 0,3 cm na medida de $\triangle x$. Isto corresponde a um êrro de 1,5 cm/s (ou 15%) em $\triangle v$. Se erros são cometidos nos $\triangle v$, adjacentes, erros de 30% ou 15 cm/s² podem ser comuns na aceleração, a.

Observa-se também que certos erros são compensados, quando se toma diferenças sucessivas. Se um dos $\triangle x$ fôr medido maior do que realmente é, isto resultará num valor maior para $\triangle x/\triangle t$, nesse intervalo, e afetará os cálculos de dois dos $\triangle v$, aumentando um dos valôres e diminuindo outro, de uma mesma quantidade. Portanto, ao tomar a média final, os efeitos de tais erros tendem a cancelar-se.

NOTA ESPECIAL: Ao resolver êste problema, alguns alunos talvez tenham dificuldade em perceber que estão tratando com velocidade média de intervalos de tempo sucessivos. Para remover essa dificuldade, você pode orientar uma discussão em classe ou, então, sugerir alguns pontos importantes. Se quiser fornecer-lhes sugestões, apresente a seguinte:

Parte a) "O módulo da velocidade $\triangle x/\triangle t$, em cada intervalo", significa o módulo da velocidade média.

Parte b) "O módulo da variação de velocidade $\triangle v$, em cada intervalo", deve ser interpretado como a variação no módulo da velocidade média *entre* os sucessivos intervalos.

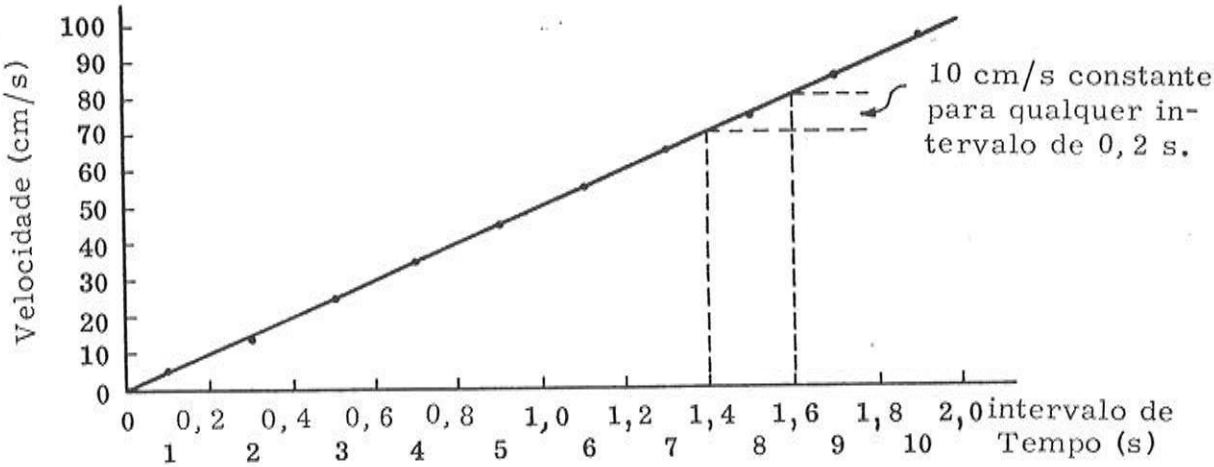
Parte c) "Aceleração $\triangle v/\triangle t$, em cada intervalo", deve estar baseada na variação da velocidade média entre os sucessivos intervalos de tempo, designando-se a velocidade média no ponto médio do intervalo de tempo de 0,2 s.

De qualquer modo, será ilustrativo para muitos alunos, após resolverem êste problema, fazer o gráfico velocidade-tempo no quadro-negro, com êsses dados (veja abaixo), e lembrá-los de que:

1) $\triangle v$ para um intervalo de 0,2 s é constante (aproximadamente 10 cm/s), para *qualquer* intervalo de 0,2 s, não interessando o instante que é escolhido para o início dêsse intervalo, e

2) que a aceleração $\triangle v/\triangle t$ em cm/s² é realmente $\triangle v$ para 1 s, ao invés de um intervalo de 0,2s; ainda que os valôres da aceleração sejam derivados da variação da velocidade média entre os sucessivos intervalos de tempo, a aceleração é constante (o gráfico é uma reta), não importando onde se escolha o início do intervalo de 1 segundo.

* Nota: falta êste ítem no texto do aluno.



PROBLEMA 16

Uma fôrça de 3,0 newtons é aplicada a um objeto, acelerando-o a 1,5 m/s².

a) Admitindo que esta seja a única fôrça exercida sôbre o objeto, qual é sua massa?

b) Com que outro método faria você outra medida da mesma massa?

c) Suponha que esta medida indique que a massa determinada pelo primeiro método é maior. De que suspeitaria você?

a) $F = ma.\ m = \frac{F \text{ newtons}}{a\ m/s^2} =$

$= \frac{3,0}{1,5} = 2,0 \text{ kg.}$

b) Uma possibilidade é colocar o objeto num dos pratos de uma balança de braços iguais, e equilibrá-lo com massas aferidas.

c) Você pode supor que uma fôrça de atrito estivesse atuando sôbre o objeto, em oposição à fôrça medida que foi intencionalmente aplicada, originando uma fôrça *resultante* menor do que 3,0 newtons.

Observação: Se se verificar que o atrito não é uma explicação plausível, suspeitaremos de uma das seguintes causas para o êrro:

(1) Uma das massas aferidas deve estar defeituosa.

(2) A fôrça padrão (3,0 newtons) deve estar incorretamente calibrada.

(3) A régua utilizada para medir o comprimento deve estar incorretamente calibrada.

(4) O medidor de tempo, utilizado para medir a aceleração, pode apresentar êrro.

(5) Cometer alguns enganos, ao fazer leituras ou registros dos dados.

(6) Existir alguma fôrça gravitacional residual atuando, se a superfície não fôr completamente nivelada.

Os ítens (1), (2), (3) e (4) poderiam ser testados, comparando-se cada padrão com um segundo padrão. O ítem (2) é o que tem maior possibilidade de êrro. A fim de testar o (5), pode-se repetir a experiência. Para investigar o (6), a experiência pode ser feita duas vêzes, uma delas em direção oposta. Tomando a média dos dois resultados, eliminamos o efeito do desnível da superfície.

PROBLEMA 17

Dois corpos, de massas 8,0 kg e 2,0 kg, estão em repouso sôbre uma mesa lisa, lado a lado. A massa de 8,0 kg é acelerada a partir do repouso pela fôrça de 0,70 newtons, e a de 2,0 kg é acelerada no mesmo sentido, também a partir do repouso, pela fôrça de 1,4 newtons. Ambos os corpos começam a ser acelerados no mesmo instante.

a) Que tempo decorre até que a distância entre os corpos seja de 5,0 m?

b) Qual a velocidade de cada corpo nesse instante?

a) Quando um corpo está em movimento com uma aceleração constante, (Capítulo 6, Parte I), $d_1 = \frac{1}{2}\, a_1 t^2$, e $d_2 = \frac{1}{2}\, a_2 t^2$.

Neste problema, a duração do movimento, t, é a mesma para os dois corpos.

Estamos interessados em saber quanto tempo decorrerá, até que o valor absoluto da diferença entre d_1 e d_2 seja igual a 5,0 metros. Como a_2 é maior que a_1, d_2 será sempre maior que d_1. Por isso, desejamos determinar o valor de t, sob a condição $d_2 - d_1 = 5{,}0$ metros.

Subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos:

$$d_2 - d_1 = \frac{1}{2}\, a_2 t^2 - \frac{1}{2}\, a_1 t^2 = \frac{1}{2}\,(a_2 - a_1)\, t^2.$$

Dessa expressão, temos:

$$t = \left[\frac{2 \times (d_2 - d_1)}{a_2 - a_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Considerando que $a_1 = \frac{0{,}70}{8{,}0}$ m/s², e $a_2 = \frac{1{,}4}{2{,}0}$ m/s². E que $d_2 - d_1 = 5{,}0$ m.

Substituindo,

$$t = \left(\frac{2 \times 5{,}0}{\frac{1{,}4}{2{,}0} - \frac{0{,}70}{8{,}0}}\right)^{1/2} = \left(\frac{10}{4{,}9/8}\right)^{1/2} =$$

$$\left(\frac{80}{4{,}9}\right)^{1/2} = \left(\frac{800}{49}\right)^{1/2} = \left(\frac{400 \times 2}{49}\right)^{1/2}.$$

$$t = \frac{20}{7} \times \sqrt{2} = 4{,}0 \text{ s.}$$

(Podemos verificar o resultado, encontrando

$$d_1 = \frac{1}{2}\, a_1 t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}70}{8{,}0}\,\text{m/s}^2 \times \frac{400 \times 2}{49}\,\text{s}^2 =$$

$$= 0{,}71 \text{ metros, e}$$

$$d_2 = \frac{1}{2}\, a_2 t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1{,}4}{2{,}0}\,\text{m/s}^2 \times \frac{400 \times 2}{49}\,\text{s}^2 =$$

$$= 5{,}71 \text{ metros.)}$$

b) Para determinar a velocidade de cada corpo, no instante em que estão distanciados 5,0 metros, conhecendo suas acelerações e o tempo, podemos aplicar a relação $v = at$.

$$v_1 = \frac{0{,}70}{8{,}0} \times 4{,}0 = \frac{2{,}8}{8{,}0} = 0{,}35 \text{ m/s.}$$

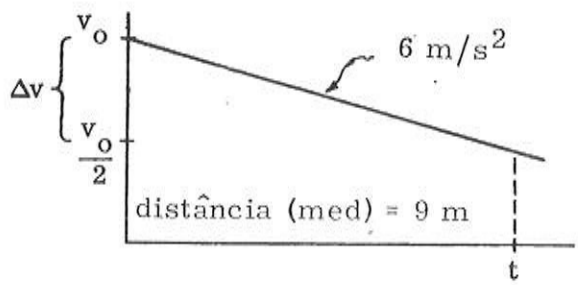
$$v_2 = 0{,}70 \times 4{,}0 = 2{,}8 \text{ m/s.}$$

PROBLEMA 18

Um bloco de massa 3,0 kg move-se sôbre uma superfície horizontal lisa, com velocidade v_o no instante $t = 0$. Aplica-se ao corpo a fôrça de 18 newtons, em sentido contrário ao do movimento. Esta fôrça reduz v_o à metade de seu valor, enquanto o corpo percorre 9,0 m.

a) Que tempo êle gasta para percorrer essa distância?

b) Quanto vale v_o?



a) e b) Um simples gráfico velocidade-tempo do movimento do bloco de 3,0 kg, diminuindo de v_o para $v_o/2$ durante o intervalo de tempo t, será útil. São dadas a aceleração e a distância (a inclinação e a área do gráfico). Devemos determinar v_o e t, numa função linear. Sabemos que $d = v_{med}\, t$. Do gráfico, temos $v_{med} = \frac{3}{4}\, v_o$. Portanto, podemos escrever $d = \frac{3}{4}\, v_o\, t$.

Em $d = \frac{3}{4} v_o t$, conhecemos d, a área. Resolveremos êste problema, se pudermos expressar cada uma das grandezas v_o ou t, uma em função da outra. O que conhecemos? Em primeiro lugar, sabemos que $\triangle v = v_o/2$. Por outro lado, também sabemos que $\triangle v = at$. Portanto,

$$\frac{v_o}{2} = at = 6\ m/s^2 \times t, \text{ e}$$

$$v_o = 12\ m/s^2 \times t.$$

De $d = \frac{3}{4} v_o t$, $t = \frac{4d}{3v_o}$. Substituindo,

$$t = \frac{4d}{3v_o} = \frac{3 \times 12\ m/s^2 \times t}{4 \times 9\ m} = \left(\frac{36\ m}{36\ m/s^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 1{,}0\ s.$$

Como $v_o = 12\ m/s^2 \times t$, $v_o = 12\ m/s$.

PROBLEMA 19

Se a distância percorrida por um móvel varia diretamente com o tempo, que conclusões tiraria você em relação ao movimento e às fôrças?

Se a distância percorrida varia diretamente com o tempo, isto significa que o incremento na distância, $\triangle x$, é proporcional ao incremento no tempo, $\triangle t$. Expresso analìticamente, $\triangle x/\triangle t$ = constante.

Mas $\triangle x/\triangle t$ é simplesmente a velocidade do objeto. Portanto, o objeto está se movendo com velocidade constante, e podemos concluir que não há fôrça resultante atuando *na direção do movimento*. (A fôrça poderia estar atuando perpendicularmente à direção do movimento, mas isto não afetaria o módulo da velocidade. Com uma fôrça constantemente perpendicular, resultaria um movimento de trajetória circular com o módulo da velocidade constante).

PROBLEMA 20

Você observa um objeto que percorre distâncias diretamente proporcionais a t^3, sendo t o tempo decorrido.

a) Que conclusão você tiraria quanto à aceleração? Ela é constante? Aumenta? Decresce? É nula?

b) Que conclusão tiraria você quanto às fôrças? Prepare-se para discutir em classe.

a) Se um objeto está se movendo com *velocidade constante*, a partir de $d = vt$, sabemos que $d \propto t$. Se um objeto está se movendo com *aceleração constante*, de $d = \frac{1}{2} at^2$, sabemos que $d \propto t^2$. Potranto, o objeto em questão não pode ter aceleração zero ou aceleração constante. Além disso, quando $d \propto t^3$, d está aumentando com t mais ràpidamente, do que quando $d \propto t^2$. Portanto, a aceleração deve estar aumentando com t.

Que relação deve existir entre a e t para $d \propto t^3$? Compare o caso de aceleração constante com o caso considerado. Se, ao invés de $d \propto t^3$, escrevermos $d \propto t \times t^2$, será um pouco mais fácil descobrir a relação.

Caso considerado: $d \propto t \times t^2$

Aceleração constante: $d \propto a \times t^2$.

Para o caso de: $d \propto t \times t^2$, se a aceleração é proporcional a t em vez de ser constante, d será proporcional a t^3. Portanto, se $d \propto t^3$, $a \propto t$. A aceleração está aumentando uniformemente com o tempo.

b) A partir de $F = ma$, $F \propto a$. Se $a \propto t$, $F \propto t$. A fôrça aceleradora deve estar aumentando uniformemente com o tempo.

* * *

Alguns alunos talvez necessitem de uma resolução mais concreta. Podemos escrever: $x = Kt^3$, e construir uma tabela de tempo, distância percorrida, velocidade, variação de velocidade e aceleração. Para fazer isto, devemos dar um valor arbitrário para a constante, K, e escolher um intervalo de tempo arbitrário. Para tornar simples, consideraremos que $K = 1\ m/s^3$, e $\triangle t = 1\ s$.

Observando a tabela, vemos que a aceleração aumenta linearmente com o tempo.

t (s)	x (metros)	Δx	$v = \Delta x/\Delta t$ (m/s)	Δv (m/s)	$\Delta v/\Delta t$ m/s²
0	0				
		1	1		
1	1			6	6
		7	7		
2	8			12	12
		19	19		
3	27			18	18
		37	37		
4	64			24	24
		61	61		
5	125			30	30
		91	91		
6	216			36	36
		127	127		
7	343				

PROBLEMA 21

Você puxa um disco deslizante com fôrça constante, a partir do repouso. A velocidade aumenta 0,10 m/s em cada Δt igual a 0,30 s.

a) Qual a velocidade do corpo após 1,2 s?

b) Você agora começa a puxar com a mesma fôrça, mas no sentido oposto, durante 0,90 s. Qual a velocidade do corpo no fim dêsse tempo?

c) Em que sentido está êle se movendo?

a) Como o disco partiu do repouso, $t = 0$, a velocidade instantânea t segundos depois, será dada por $v = at$.

$$v_{1,2} = at = \frac{\Delta v}{\Delta t} \times t = \frac{0{,}10 \text{ m/s}}{0{,}30 \text{ s}} \times 1{,}2 \text{ s} =$$
$$= 0{,}40 \text{ m/s}.$$

b) Aplicando a mesma fôrça no sentido oposto, produz-se uma aceleração oposta (negativa). A variação na velocidade (não a velocidade absoluta, uma vez que o objeto não partiu do repouso) é dada por:

$$v = at = -\frac{\Delta v}{\Delta t} \times t = -\frac{0{,}10 \text{ m/s}}{0{,}30 \text{ s}} \times 0{,}90 \text{ s} =$$
$$= -0{,}30 \text{ m/s}.$$

A velocidade final resultante será o vetor soma da velocidade inicial no instante em que a direção da fôrça foi invertida, com a variação da velocidade que ocorre durante os 0,90 segundos depois,

$$v_f = v_{1,2} + \Delta v = 0{,}40 - 0{,}30 = +0{,}10 \text{ m/s}.$$

c) O sinal positivo de v_f indica que a velocidade final é ainda no mesmo sentido do movimento inicial do disco.

Pergunte à sua classe qual seria a velocidade final do disco, se êle fôsse puxado para a frente sòmente durante 0,30 s, que é a diferença de tempo entre os movimentos para frente e para trás. Êles devem perceber que o resultado seria o mesmo. Isto acontece, porque a fôrça aplicada é a mesma, tanto para a frente como para trás.

PROBLEMA 22

Um bloco de massa 2,0 kg é puxado sôbre uma mesa sem atrito por uma fôrça constante de 6,0 newtons, a partir do repouso.

a) Qual a aceleração do bloco, em m/s²?

b) Qual a velocidade do bloco, 3,0s depois que a fôrça começou a agir?

c) Que distância percorre o bloco, em 2,0 s?

d) Se, no fim de 3,0 s, o bloco se divide em duas partes iguais, uma ainda puxada pela fôrça de 3,0 newtons e a outra livre — qual a distância entre elas, 2,0 s após terem se separado?

a) $F = ma$

$$a = \frac{6{,}0}{2{,}0} = 3{,}0 \text{ metros/s}^2.$$

b) Uma vez que o bloco parte do repouso, após 3,0 segundos, temos,

$$v = at = 3{,}0 \times 3{,}0 = 9{,}0 \text{ m/s}.$$

c) Novamente, como o movimento tem início no repouso, obtemos:

$$d = \frac{1}{2}\ at^2 = \frac{1}{2}\ 3{,}0 \times 2{,}0^2 = 6{,}0 \text{ metros.}$$

d) No fim dos primeiros 3,0 segundos, as duas partes estão se movendo com uma velocidade de 9,0 m/s. Após mais dois segundos, a parte sem aceleração ainda estará com a mesma velocidade e terá percorrido mais $9{,}0 \times 2{,}0 = 18$ metros. A aceleração da outra metade será $a = \frac{F}{m} = \frac{6{,}0}{1{,}0} = 6{,}0\ m/s^2$; portanto, sua velocidade, no fim dos dois segundos adicionais, será $6{,}0\ m/s^2 \times 2{,}0s = 12\ m/s$ maior do que no instante em que se separam. Logo, estará se movendo a $9 + 12 = 21$ m/s. Sua velocidade média, durante o intervalo de 2,0 segundos, deve ter sido $\frac{9 + 21}{2{,}0} = 15$ m/s. Movendo-se com esta velocidade média durante dois segundos, o meio bloco acelerado deve percorrer uma distância de 30 metros, no intervalo de dois segundos. Portanto, a distância entre as duas partes será de $30 - 18 = 12$ metros.

* * *

A parte (d) pode ser resolvida mais fàcilmente, considerando que a diferença na distância, entre as duas partes do bloco, será dada pela aceleração *relativa* × tempo. Após a separação, a aceleração de uma parte é .... $\frac{F}{m} = \frac{6{,}0 \text{ newtons}}{1{,}0 \text{ kg}} = 6{,}0\ m/s^2$. A aceleração da outra parte é zero. Portanto, 6 m/s^2 é a aceleração relativa entre as duas metades do bloco — esta é a razão em que varia a velocidade relativa. Em 2,0 s, esta aceleração relativa resultaria numa separação de

$$d = \frac{1}{2}\ at^2 = \frac{1}{2} \times 6\ m/s^2 \times (2{,}0\ s)^2 =$$

$$= 12 \text{ metros.}$$

PROBLEMA 23

Um bloco de massa 8,0 kg, partindo do repouso, é puxado sôbre uma mesa horizontal pela fôrça constante de 2,0 newtons. Verifica-se que êsse corpo percorre 3,0 m em 6,0 s.

a) Qual a aceleração do corpo?

b) Qual a razão entre a fôrça aplicada e a massa?

c) Como sua resposta à parte (b) não é igual à da parte (a) (pelo menos não deve ser), que conclusões pode você tirar a respeito dêsse movimento? Dê resultados numéricos, se possível.

a) O bloco parte do repouso e está sob a ação de uma fôrça constante. Considerando que seja constante a fôrça que atua sôbre o bloco, a aceleração também será constante. Logo, a distância percorrida será:

$$d = \frac{1}{2}\ at^2, \text{ e } a = \frac{2d}{t^2}$$

$$a = \frac{2 \times 3{,}0 \text{ m}}{36\ s^2} = \frac{1}{6}\ m/s^2.$$

b) Como F = 2,0 newtons, e m = 8,0 kg, $\frac{F}{m} = \frac{2{,}0}{8{,}0} = \frac{1}{4}\ m/s^2$.

c) A aceleração observada, $\frac{1}{6}\ m/s^2$, foi menor do que a aceleração calculada da relação $\frac{F}{m}$, $\frac{1}{4}\ m/s^2$. Portanto, alguma outra fôrça (retardadora) deve também ter atuado. Pode-se supor que tenha sido uma fôrça de atrito. A fim de avaliar essa fôrça, devemos supor que ela também foi constante. Então, podemos determinar a fôrça resultante efetiva que atuou, para produzir a aceleração observada.

$$F_{aplicada} - F_{atrito} = ma, \text{ e } F_{atrito} = F_{aplicada} - ma$$

$$F_{atrito} = 2 - (8 \times \frac{1}{6}) = \frac{2}{3} \text{ newtons.}$$

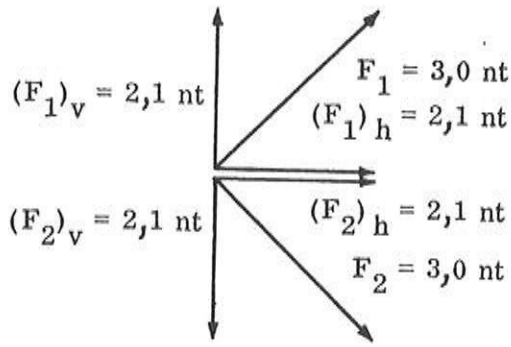
A fôrça de atrito age na direção oposta à do movimento do bloco.

PROBLEMA 24

Sôbre um objeto de 6,0 kg, atuam duas fôrças, cada uma de 3,0 newtons.

a) Se essas fôrças formam um ângulo de 90°, qual a direção e o valor da aceleração?

b) Qual será a aceleração, se as fôrças tiverem o mesmo sentido? Se os sentidos fôrem opostos?



a) Aplica-se a lei de Newton para o vetor soma de tôdas as fôrças que atuam sôbre o objeto. Pode-se decompor F_1 e F_2 em duas componentes, uma horizontal e outra vertical. As componentes estarão ambas dirigidas para a direita. A componente vertical de F_1 estará dirigida para cima, enquanto a de F_2 estará dirigida para baixo. Uma vez que todos os ângulos são de 45°, o módulo de cada componente individual será $\frac{3{,}0 \text{ newtons}}{\sqrt{2}} = \frac{3{,}0}{1{,}41} = 2{,}1$ newtons. A fôrça vertical resultante será zero, e a fôrça horizontal $F_h = 2 \times \frac{3{,}0 \text{ newtons}}{\sqrt{2}} =$ 4,2 newtons para a direita. Portanto, $a = \frac{F}{m} =$ $= \frac{4{,}2}{6{,}0} = 0{,}70$ m/s² na direção da bissetriz do ângulo de 90° formado por F_1 e F_2.

b) Como F = 6,0 newtons, se as fôrças atuarem no mesmo sentido, $a = \frac{6{,}0}{6{,}0} = 1{,}0$ m/s². Uma vez que F = 0, se as fôrças tiverem sentidos opostos, $a = \frac{0}{6} = 0$.

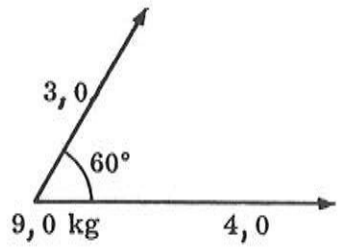
PROBLEMA 25

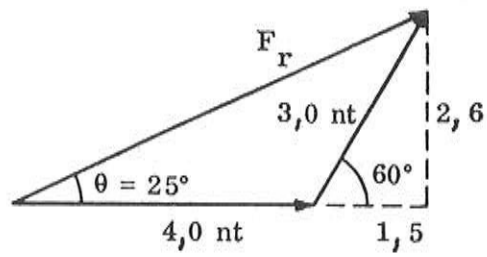
Uma fôrça de 3,0 newtons e uma de 4,0 newtons atuam sôbre a massa de 9,0 kg. As duas fôrças formam entre si o ângulo de 60°.

a) Se o objeto parte do repouso, qual será sua velocidade no fim de 3,0 s?

b) Em que direção êle se moverá?

a) O problema inicial é obter das duas fôrças dadas uma única fôrça resultante, de módulo e direção conhecidos. Isto pode ser obtido gràficamente, com um transferidor e uma régua.





Tal construção dá F_r = 6,1 newtons numa direção que forma um ângulo $\Theta = 25°$ com a fôrça de 4,0 newtons. A fôrça de 6,1 newtons produzirá uma aceleração constante de:

$$a = \frac{6{,}1}{9{,}0} \text{ m/s}^2.$$

A velocidade resultante após 3,0 segundos será

$$v = at = \frac{6{,}1}{9{,}0} \times 3{,}0 = 2{,}0 \text{ m/s}.$$

b) A direção dessa velocidade situar-se-á entre as fôrças de 3,0 e 4,0 newtons, formando um ângulo de *25° com a fôrça de 4,0 newtons.*

Observação: Êste problema vetorial pode ser resolvido analìticamente, fazendo a construção indicada na segunda figura. Vemos que a fôrça de 3 newtons tem uma componente de $3{,}0 \times \cos 60° = 3{,}0 \times \frac{1}{2} = 1{,}5$ newtons na direção da fôrça de 4 newtons (na direção x). Sua componente perpendicular é 3,0 × sen

$60^\circ = 3{,}0 \times 0{,}866 = 2{,}6$ newtons. Portanto, as componentes das acelerações são:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{4{,}0 + 1{,}5}{9{,}0} = \frac{5{,}5}{9{,}0} \text{ m/s}^2, \text{ e}$$

$$a_y = \frac{2{,}6}{9{,}0} \text{ m/s}^2.$$

Após 3,0 segundos,

$$v_x = 3{,}0\ a_x = \frac{5{,}5}{3{,}0} \text{ m/s},$$

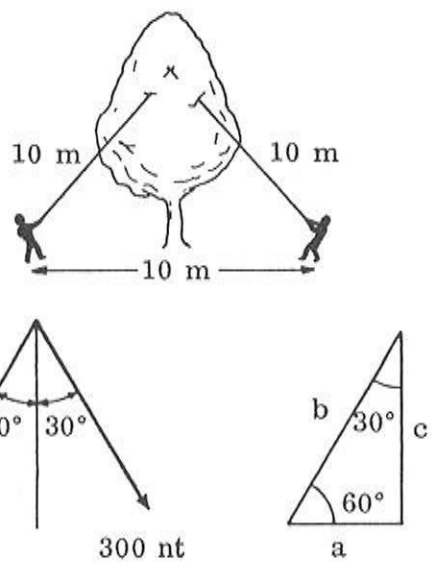
$$v_y = \frac{2{,}6}{3{,}0} \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{3{,}0}\sqrt{30{,}25 - 6{,}76} =$$

$$= \frac{1}{3{,}0}\sqrt{36{,}01} = \frac{6{,}0}{3{,}0} = 2{,}0 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 26

Dois homens querem derrubar uma árvore por meio de uma corda amarrada próximo ao tôpo. Se usarem uma única corda, a árvore cairá sôbre êles. Para evitar isso, amarraram ao mesmo ponto duas cordas de 10,0 m de comprimento, ficando a 10,0 m de distância um do outro, ao puxar. Se a fôrça exercida por cada um é de 300 newtons, qual a fôrça exercida pelas cordas na árvore?



Uma vez que cada corda tem 10,0 m de comprimento e os dois homens estão separados de 10,0 m, as três linhas formam um triângulo equilátero, e o ângulo entre as cordas é igual a 60°.

As duas fôrças são iguais; portanto, a resultante deve estar ao longo da bissetriz do ângulo de 60°. Para determinar a componente de cada uma das fôrças nessa direção, observe que temos um triângulo de 30°, 60°, e 90°. A razão dos lados a:b:c = 1:2: $\sqrt{3}$. Portanto, $\frac{c}{b} = \frac{F_r}{300}$,

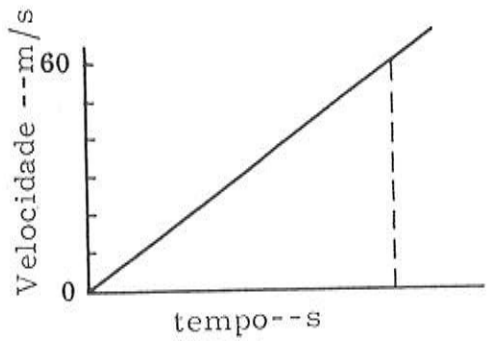
$$F_r = \frac{300c}{b} = \frac{300 \times \sqrt{3}}{2} = 260 \text{ newtons}.$$

Cada uma das cordas, atuando sôbre a árvore, exerce uma fôrça que tem uma componente de 260 newtons na direção da resultante. Portanto, a fôrça exercida pelas cordas na árvore é 520 newtons.

PROBLEMA 27

Determine a fôrça necessária para acelerar um foguete de 450 kg, a partir do repouso até a velocidade de 60 m/s, ao longo de um trilho horizontal de 100 m de extensão. A fôrça retardadora de atrito é de 93 newtons.

A fim de resolver êste problema, devemos considerar que o empuxo do foguete é constante e, portanto, a aceleração é também constante. Assim, a velocidade aumenta linearmente de 0 a 60 metros/segundo, como mostra o gráfico velocidade-tempo.



Para determinar o tempo dêsse trajeto, observamos que a área do triângulo (distância percorrida) é dada como sendo 100 metros, e que, durante o intervalo de tempo requerido para acelerar até 60 m/s, a velocidade média é 30 m/s.

$$d = v_{média}\, t, \text{ e } t = \frac{d}{v_{média}} = \frac{100\ m}{30\ m/s} = 3{,}33 \text{ segundos.}$$

Portanto, $F_{resultante}\, \Delta t = m\Delta v$, e $F_{resultante} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{450 \times 60}{3{,}33} = 8\,100$ newtons.

$F_{resultante} = F_{aplicada} - F_{atrito}$, e $F_{ap} = F_r + F_a = 8\,100 + 93 \cong 8\,200$ newtons.

* * *

Quando êste problema fôr discutido em classe, você poderá ressaltar que não é necessário determinar t para resolvê-lo. Sem fazer a esta altura uma referência especial, dê a alguns alunos uma introdução sôbre energia, mostrando que F é proporcional a $mv^2/2$.

$F_{resultante}\, \Delta t = m\Delta v$.

Mas $d = v_{média}\, t$, e $v_{média} = \frac{\Delta v}{2}$.

Portanto, $\Delta t = \frac{2d}{\Delta v}$.

$\therefore F_{resultante} = \frac{mv^2}{2d}$.

PROBLEMA 28

A fôrça retardadora da resistência do ar sôbre um balão é proporcional ao quadrado da velocidade. Para certo balão, inflado até certo volume, esta fôrça é dada em newtons, por $F_r = 0{,}2\ v^2$, sendo v a velocidade do balão em m/s. A massa do balão e do ar dentro dêle é de 10 g.

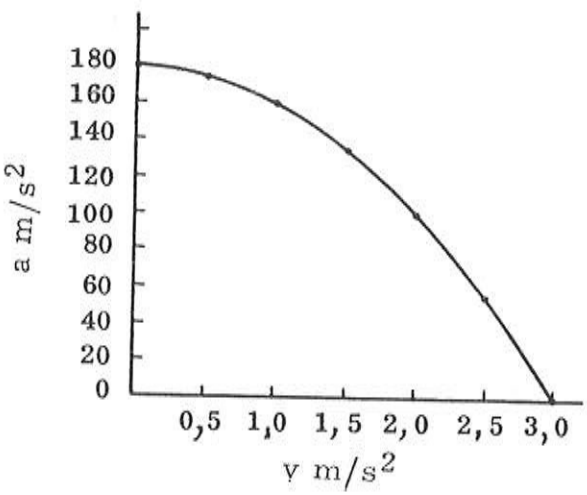
a) Trace um gráfico da aceleração do balão em função da velocidade, quando você o puxa com uma fôrça de 1,8 newtons e com a fôrça de 7,2 newtons.

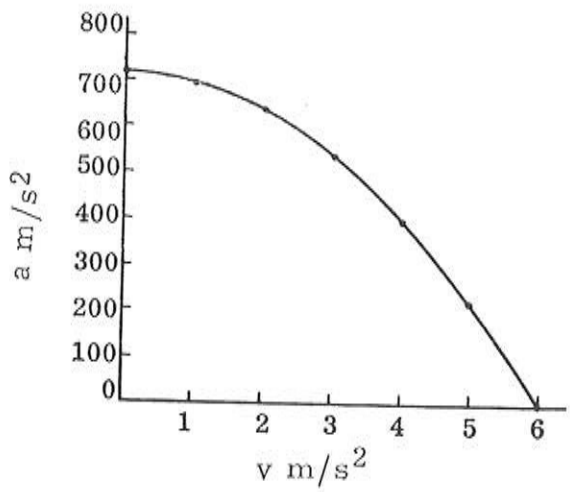
b) Qual a velocidade máxima que o balão alcançará em cada caso?

c) Se a massa fôsse de 5,0 g, como isso afetaria a velocidade máxima?

d) Qual seria, em sua opinião, o efeito sôbre a velocidade máxima, se você inflasse o balão a um volume maior?

a)





$$a = \frac{F_{resultante}}{m} = \frac{F_a - F_r}{m} = \frac{F_a - 0{,}2\ v^2}{m}.$$

Para uma fôrça aplicada de 1,8 newtons, a =

$$= \frac{1{,}8 - 0{,}2v^2}{10^{-2}} = (180 - 20v^2)\ m/s^2.$$

Para uma fôrça de 7,2 newtons, a =

$$= \frac{7{,}2 - 0{,}2v^2}{10^{-2}} = (720 - 20v^2)\ m/s^2$$

b) A velocidade máxima é aquela em que a = 0. No primeiro caso, o balão alcança a velocidade máxima de 3,0 m/s. No segundo caso, êle alcança a velocidade de 6,0 metros/s.

c) A variação na massa do balão não deve afetar a velocidade. A fôrça de resistência do ar depende sòmente da velocidade, não da massa. Assim, a fôrça de resistência será igual à fôrça aplicada a uma determinada velocidade, independentemente da massa. Isto pode ser demonstrado analìticamente, da seguinte forma:

$$a = \frac{F_{\text{aplicada}} - F_{\text{resistência}}}{m}$$

$$ma = F_{\text{aplicada}} - F_{\text{resistência}} = F_{\text{aplicada}} - 0{,}2v^2.$$

Para satisfazer a condição de velocidade máxima, devemos considerar a = 0. Portanto,

$$0 = F_{\text{aplicada}} - 0{,}2v^2_{\text{máx}}$$

$$v^2_{\text{max}} = 5F_{\text{aplicada}}$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{5F_{\text{aplicada (independente de m)}}},$$

onde v é em m/s e F em newtons.

d) Se o balão fôsse maior, teria uma maior área externa, e a fôrça de resistência do ar seria maior para uma dada velocidade. (Isto significa que o coeficiente de v^2 seria maior). O resultado seria que a fôrça de resistência tornar-se-ia igual à fôrça aplicada, a uma velocidade menor do que no caso anterior. Portanto, v_{max} seria menor.

PROBLEMA 29

Aristóteles ensinou que era necessária uma fôrça constante para produzir uma velocidade constante e daí concluiu que, na ausência de fôrças, os corpos pariam.

a) Indique várias situações em que uma fôrça constante parece produzir uma velocidade constante.

b) Como explica você cada uma das situações do ítem (a), à luz da lei do movimento de Newton?

a) Situações em que uma fôrça constante parece produzir uma velocidade constante:

1. Um cavalo puxando uma carroça com uma fôrça constante, a uma velocidade constante.

2. Um carro atinge uma velocidade constante para uma certa posição do acelerador (fôrça constante).

3. Um avião voa a uma velocidade constante em relação ao ar, enquanto o seu motor mantém um ritmo constante.

4. O balão do Problema 28 deverá mover-se com uma velocidade constante, se uma fôrça constante fôr aplicada sôbre êle.

b) Em cada exemplo dêsse tipo, uma verificação cuidadosa mostra que, além da fôrça aplicada, existem outras fôrças que se opõem à fôrça aplicada. Em todos os casos de velocidade constante, a fôrça aplicada é equilibrada por fôrças oponentes. [Comumente, essas fôrças que se opõem não são constantes, mas são proporcionais (não diretamente) a v]. Quando a fôrça aplicada excede as fôrças oponentes para um dado v, ocorre uma aceleração positiva. Se a fôrça aplicada é menor do que as fôrças oponentes, resulta uma aceleração negativa.

Nos exemplos dados na parte a), quando o objeto está se movendo com velocidade constante, as origens das fôrças que se opõem e equilibram a fôrça aplicada são:

1. Para o cavalo e a carroça, o atrito das rodas sôbre os mancais e das rodas sôbre a superfície da estrada.

2. Para o carro, o atrito sôbre a estrada e sôbre os mancais, e (especialmente em alta velocidade) a resistência do ar.

3. Para o avião, a resistência do ar.

4. Para o balão, a resistência do ar.

PROBLEMA 30

Como definiria você uma unidade de massa se, em Sèvres, fôsse mantida uma mola padrão e não uma massa padrão?

Uma vez que êste capítulo trata de dinâmica, primeiramente poderíamos pensar num método dinâmico de definir uma unidade de massa.

Uma maneira direta de estabelecer uma unidade de massa seria realizar uma experiência de aceleração. A unidade de massa constituiria a massa de um objeto, acelerado a um certo valor, pela aplicação de uma fôrça padrão (e que seja a única fôrça). Ainda que a condição para não atuar outra fôrça sôbre o corpo seja muito difícil de conseguir, o disco de gêlo sêco "sem atrito", descrito e usado nos filmes e texto, pode ser empregado de tal modo, que a fôrça resultante seja dada sòmente pela mola.

Um experimentador prático, que conhece a equivalência das massas gravitacional e inercial, pode simplesmente pendurar uma massa numa mola. Êle descobriria que o resultado dependeria de sua posição relativa a outros objetos massivos. Conseqüentemente, a posição dessa mola, sôbre a Terra, devera ser padronizada. Para grande precisão, sua posição relativa ao Sol e à Lua deveria ser também padronizada. Também, dever-se-ia reconhecer que uma apreciável variação na conformação da Terra inutilizaria seu padrão. Mesmo assim, êste seria um padrão mais prático do que o determinado por uma experiência de aceleração.

Um procedimento mais sofisticado seria definir a massa padrão em têrmos de uma freqüência de oscilação, onde o padrão é posto a oscilar, suspenso a uma mola padrão, no vácuo. A freqüência de oscilação varia com o inverso da raiz quadrada da massa oscilante. Êste método seria muito mais prático. Além disso, é uma medida direta da massa inercial.

Ainda que, a esta altura do curso, a maioria dos alunos não esteja familiarizada com o movimento harmônico simples, êste tipo de resposta pode ser sugerido da experiência dos alunos com a balança inercial (Experiência I-1). Uma rápida discussão dêste assunto pode ser desenvolvida racionalmente, sem contudo entrar na análise do movimento harmônico simples.

CAPÍTULO 21

MOVIMENTO NA SUPERFÍCIE DA TERRA

FINALIDADE 1. Generalizar o estudo de dinâmica para o movimento em mais de uma dimensão, começando o estudo de fôrças na natureza e pondo em evidência a validade da lei de Newton como uma lei *vetorial.*

2. Aplicar a lei de Newton a algumas situações simples que, no entanto, são mais complicadas do que aquelas em que atua uma fôrça constante sôbre um objeto, confinado a mover-se em linha reta. As situações consideradas são:

a. Uma fôrça constante que não está na direção do movimento (Seções 3 e 4).

b. Uma fôrça constante em módulo, mas de direção variável, de tal modo que seja perpendicular ao vetor velocidade em qualquer instante (Seções de 5 a 7).

c. Uma fôrça confinada a uma única direção, mas variando em módulo e mudando de sentido (isto é, sinal algébrico). (Seção 8).

3. Estabelecer as bases para as considerações dinâmicas do movimento planetário, no Capítulo 22.

CONTEÚDO

A *Seção 1* discute pesos e massas. Na Terra, o pêso de qualquer massa é cêrca de 10 newtons/kg.

A *Seção* 2 trata da queda livre sem a componente horizontal da velocidade. Êste movimento é devido a uma fôrça constante na direção do movimento e, por isso, é uma extensão da matéria do Capítulo 20. A êste assunto dá-se ênfase especial, porque a queda livre é uma componente do movimento de projétil a ser discutido como o primeiro exemplo vetorial.

As *Seções 3 e 4 estudam* o movimento de projéteis. A idéia fundamental é de que as componentes do movimento podem ser tratadas separadamente:

$$x = v_{ox}\, t$$

$$y = v_{oy}\, t - \frac{1}{2}\, gt^2.$$

As *Seções de 5 a 7* discutem o movimento circular. A velocidade é $v = \frac{2\pi R}{T}$. A aceleração centrípeta é: $a = \frac{2\pi v}{T}$, que pode também ser escrita como $\vec{a} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{R}$, ou $a = \frac{v^2}{R}$.

Aplicando a lei de Newton para a aceleração deduzida, prediz-se que uma fôrça centrípeta deve atuar, a fim de produzir um movimento circular uniforme.

A *Seção 8* discute o movimento harmônico simples, por meio da projeção do movimento circular. A importância é dada à fôrça que produz o movimento harmônico simples.

As *Seções de 9 a 11* tratam da importância de utilizar um referencial não acelerado na aplicação $\vec{F} = m\vec{a}$.

ÊNFASE. Êste capítulo contém duas idéias muito importantes. Uma é a de que a lei de Newton é uma lei vetorial. Isto é verificado pelo movimento de projéteis e movimento circular.

A outra idéia é a de que a lei de Newton pode ser usada ou:

a. para predizer o movimento, se as fôrças são conhecidas, ou

b. para determinar as fôrças, se o movimento é conhecido.

À medida que você fôr desenvolvendo êste capítulo, êsses pontos serão realçados alterna-

damente. A verificação da natureza vetorial da lei de Newton será o assunto das discussões desenvolvidas no texto. A aplicação da lei de Newton para determinar o movimento ou a fôrça é atribuída aos problemas. Os alunos devem captar êsses dois aspectos excitantes da matéria. Assim, a familiaridade com o assunto desperta muito interêsse.

Enquanto vão estudando a queda livre, os projéteis, o movimento circular, o movimento harmônico simples, os alunos devem ser lembrados da grande variedade de situações, a que se aplica a lei de Newton. Quando você terminar o capítulo, será interessante enumerar, como uma forma de revisão, as características das fôrças e movimentos que foram estudados:

Tipo de Movimento	Módulo da Fôrça	Direção da Fôrça	Movimento
Queda Livre	constante	constante, na direção do movimento	aceleração uniforme
Projétil	constante	constante, mas não na direção do movimento	parabólico, aceleração uniforme
Movimento Circular	constante	variável e sempre perpendicular ao movimento	movimento circular uniforme
Movimento harmônico simples	proporcional ao deslocamento	restauradora, i.e., oposta ao deslocamento	oscilatório

Ao estudar o movimento de projéteis, a independência das componentes da fôrça deve ser realçada. Esta é a base principal da natureza vetorial da fôrça. Uma das razões de dar importância à queda livre e fazer problemas práticos é induzir os alunos a avaliar a grande simplificação que é possível, quando as componentes são separadas. É também essencial considerar as componentes para descrever o movimento harmônico simples, a partir do movimento circular.

Ao discutir o movimento circular, será sensato reservar tempo para desenvolver a cinemática da aceleração centrípeta; os alunos devem, êles mesmos, determinar a aceleração gràficamente, antes de aplicarem a lei de Newton ao movimento circular.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 21

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp.
Sec. 1	1/2	0	-	1/2	0	-
Sec. 2	2	0	-	1	0	-
Secs. 3, 4	2 1/2	1	III-5	2	0	-
Secs 5, 6, 7	5	1	III-6	3	1	III-6
Sec. 8	3	0	-	1	0	-
Secs. 9 10, 11	1	0	-	1/2	0	-

MATERIAIS RELATIVOS AO CAP. 21

Laboratório. A Experiência III-5, *Fôrças Exercidas sôbre uma Bola no Espaço,* envolve a análise de variações de velocidade, a partir de fotografias de flashes múltiplos. A experiência pode ser dada após a Seção 4.

As Notas de Laboratório incluem sugestões sôbre o manejo dessas experiências.

Casa, Classe e Laboratório. A análise e resolução de problemas em classe serão especialmente úteis, em conexão com o Capítulo 21. Os alunos devem ser estimulados a esbôçar gráficos relacionando fôrças e movimentos envolvidos.

A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com o nível avaliado de dificuldades e as seções a que se referem. Estão indicados os problemas que são especialmente apropriados para a discussão em classe. Problemas que são particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas dos problemas são dadas no CCL.

Os Problemas 17 e 18 serão provàvelmente mais fáceis de serem resolvidos, após os alunos ganharem um pouco de maturidade no que se refere às idéias do capítulo, do que se fôrem tratados juntamente com a Seção 2.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe	Projetos para casa
1	1*, 2			1*, 2	
2	3	4, 5, 8*, 7, 10*, 17, 18	6, 9, 11	4, 5, 6, 7, 8*, 9, 10*, 11, 17, 18	5
3, 4	12*, 15*	13, 14, 16		12*, 13, 14, 15*	12
5, 6, 7	20, 21*, 22*	19, 23, 24*, 25, 26, 27*		19, 21*, 22*, 23, 24*, 25, 26, 27*	
8	31	28*, 29, 30		29, 30	28
9, 10, 11			32	32	

Filmes: "Falling Bodies", por N. H. Frank, do Massachusetts Institute of Technology. A partir da observação da aceleração constante de um corpo em queda livre e $F = ma$, é demonstrada a proporcionalidade entre as massas gravitacional e inercial. Para objetos em queda livre, é considerada a independência das componentes verticais e horizontais do movimento, esta independência é demonstrada com a experiência do macaco e a espingarda. Êste filme pode ser projetado durante o estudo das Seções 2, 3 e 4. Tempo de projeção: 30 minutos.

"Deflecting Forces", por N. H. Frank, do Massachusetts Institute of Technology, mostra como uma fôrça, atuando em ângulo reto com a direção do movimento, varia a direção do movimento, mas não o módulo da velocidade. Uma fôrça defletora constante (perpendicular à direção do movimento) produz um movimento circular, com o módulo da velocidade constante. Usando vetores, $F = \frac{mv^2}{R}$ é deduzida de $F = ma$. Uma mesma intensidade da fôrça é utilizada para produzir acelerações num movimento circular e num movimento retilíneo. A igualdade na intensidade das acelerações mostra a validade vetorial da lei de Newton. Êste filme está relacionado com a Seção 5. Tempo de projeção: 29 minutos.

"Periodic Motion", por Donald Ivey e Patterson Hume, da University of Toronto. Utiliza-se um objeto em movimento harmônico simples, para traçar um gráfico do deslocamento em função do tempo. A análise dêste gráfico mostra que $\vec{a} \propto -\vec{x}$; a partir da lei de Newton, segue-se que $\vec{F} \propto -k\vec{x}$. Isto é verificado experimental-

mente. A relação entre o movimento harmônico simples e a componente vertical do movimento circular uniforme é observada e analisada, para concluir que o período do movimento harmônico simples é dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, onde o movimento resulta de uma fôrça proporcional à distância, cuja constante de proporcionalidade é k. Esta relação é, então, testada e confirmada pela experiência. Êste filme é para ser utilizado com a Seção 8. Tempo de projeção: 30 minutos.

"Frames of Reference", por Donald Ivey e Patterson Hume, da University of Toronto, demonstra como diferentes sistemas de referência conduzem a diferentes descrições do movimento. O movimento de uma bola, que cai de um carrinho em movimento, quando êste carrinho se move primeiro com a velocidade constante e, em seguida, com aceleração constante, é observado de um sistema de referência que se move com o carrinho, e de um sistema de referência fixo. Tais observações são usadas para distinguir os sistemas de referência inercial e não inercial, e para mostrar como fôrças "fictícias" surgem em um sistema não inercial. Experiências com o disco de gêlo sêco, sôbre uma mesa em rotação, mostram a natureza fictícia da fôrça centrífuga num sistema de referência em rotação. O filme termina com um breve estudo da evidência, dada pelo pêndulo de Foucault, da rotação da Terra num sistema de referência newtoniano. Êste filme pode ser utilizado com vantagem, durante o estudo das Seções 9, 10 e 11. Tempo de projeção: 26 minutos.

Seção 1 — Pêso e Campo Gravitacional da Terra

FINALIDADE. Fazer distinção entre massa e pêso.

CONTEÚDO a. O pêso de um objeto é a intensidade da fôrça gravitacional sôbre êsse objeto.

b. Enquanto a massa independe da posição, o pêso por unidade de massa varia de um lugar para outro, mas em qualquer lugar, os pesos são proporcionais às massas.

c. O pêso de um objeto na superfície da Terra é, aproximadamente, 9,8 newtons/kg, mas o valor exato dêsse fator de proporcionalidade varia ligeiramente com sua posição sôbre a Terra.

d. A fôrça gravitacional por quilograma, num dado lugar, define o valor do campo gravitacional, $\vec{g}$, nesse lugar. O campo gravitacional total é a configuração formada por tais valôres de $\vec{g}$, em todo o espaço.

ÊNFASE. Estas idéias são importantes, mas não requerem muito tempo de aula.

DESENVOLVIMENTO. Os Problemas 1 e 2 podem ser resolvidos em classe. Os cálculos podem ser simplificados, usando $g \approx 10$ newtons/kg, como é sugerido no CCL do Problema 1, após os alunos compreenderem que $\vec{g}$ varia ligeiramente de um lugar para outro. Para ter idéia da intensidade de um newton, os alunos podem calcular os seus próprios pesos em newtons.

COMENTÁRIOS. Adiar a discussão da razão da variação de $\vec{g}$ de um lugar para outro, até o próximo capítulo que trata da lei da gravitação universal.

Talvez nenhum assunto particular de Física tenha sido mais confundido pelo alunos, do que a distinção entre *pêso* e *massa*. É importante que os alunos compreendam claramente a distinção entre estas duas propriedades diferentes (veja Capítulos 7 e 20).

Uma vez que o pêso de um objeto é a fôrça, F, exercida pela gravidade sôbre a massa, m, do objeto, é mais conveniente, quando trabalhar com tais têrmos, expressar g como 9,8 newtons/kg. De outro modo, quando tratamos de aceleração em problemas de queda livre, é melhor considerar g na sua unidade equivalente, 9,8 m/s^2. Deve-se utilizar, neste ponto do capítulo, a forma 9,8 newtons/kg.

O conceito de *campo* de fôrça é introduzido nesta seção. Ainda que uma breve discussão do significado de um campo certamente seja recomendada, a esta idéia não se deve dar muita ênfase, nesta altura do curso. Êste assunto será bastante explorado no próximo capítulo e na Parte IV.

Seção 2 — Queda Livre

FINALIDADE. Estudar o movimento vertical na superfície da Terra, como uma simples aplicação da lei de Newton.

CONTEÚDO a. Ùnicamente sob a ação da fôrça gravitacional, um objeto experimenta uma aceleração constante a = − 9,8 m/s², para baixo.

b. Para objetos movendo-se na atmosfera, a resistência do ar é freqüentemente desprezada; mas, quando aumenta a velocidade, aumenta a resistência do ar. Conseqüentemente, para uma velocidade específica para baixo (a velocidade limite), a fôrça de resistência do ar iguala-se à fôrça gravitacional, e cessa a aceleração.

ÊNFASE. Esta matéria é muito importante. Mostra como o movimento pode ser determinado, quando uma fôrça constante atua ao longo da mesma linha, na mesma direção do movimento. O tempo de aula, necessário para dar esta seção, depende do número de problemas resolvidos no Capítulo 20 e do grau de necessidade que sua classe tem de rever a cinemática. Êles devem estar aptos para trabalhar com problemas de queda livre, antes de se defrontarem com complicações adicionais do movimento de projétil.

FILME. "Falling Bodies", por N. H. Frank, (veja descrição no resumo do capítulo) pode ser apresentado para auxiliar as idéias das Seções 2, 3 e 4. Convém planejar o filme quase no fim dos trabalhos dessas seções.

DESENVOLVIMENTO. Tanto na discussão do texto como na resolução de problemas, o aluno deve lembrar-se dos três passos distintos, envolvidos na determinação do movimento que resulta da ação de uma ou mais fôrças conhecidas:

1. Determinar a fôrça resultante, o vetor soma de tôdas as fôrças atuantes.
2. Utilizando a lei de Newton, determinar a aceleração.
3. Com esta aceleração, a, conhecida, determinar o movimento, aplicando as equações da cinemática.

Esta separação é particularmente interessante, porque ela põe em evidência a larga aplicabilidade da lei de Newton. Algumas vêzes, as fôrças podem ser complexas; na verdade, a seqüência anterior pode estar invertida, de tal modo que a fôrça é encontrada a partir do movimento.

A fim de ilustrar tais técnicas nesta seção, a fôrça é simplificada, considerando a resistência do ar, F_a, desprezível. Além disso, supõe-se que g seja constante na região em que a experiência é realizada. (Um tratamento mais detalhado do campo gravitacional será feito no Capítulo 22).

Todos os objetos densos e compactos caem com uma mesma aceleração, no ar, e *todos* os objetos caem com a mesma aceleração, no vácuo. A lei de Newton relaciona a aceleração com a fôrça, $F = m_i a$, onde m_i é a massa inercial do objeto. Mas, se F é a fôrça da gravidade sôbre o objeto, pela definição, $F = km_g$, onde m_g é a massa gravitacional do objeto. Portanto, $a = k\frac{m_g}{m_i}$, e visto que a é uma constante (g) para todos os objetos, $\frac{m_g}{m_i}$ deve também ser constante para todos os objetos. Portanto, a observação da igualdade das acelerações sob a ação da gravidade, para todos os objetos, é uma verificação da equivalência das massas gravitacional e inercial. Na prática, estabelecemos que k = g; em conseqüência, a proporcionalidade entre m_g e m_i torna-se uma igualdade numérica.

Para determinar o movimento a partir de uma aceleração conhecida, devemos evitar a mera substituição de fórmulas. Cada nova situação deve ser tratada separadamente, traçando um diagrama esquemático, convencionando os sinais apropriados e construindo os gráficos, tanto de *a* como de *d* em função de t. A Figura 21-2 e a Tabela II constituem uma boa revisão para a relação entre movimento e aceleração.

Os Problemas 8 e 10 são particularmente recomendados. Uma discussão qualitativa do Problema 9 fornece um bom exemplo da utilidade dos gráficos, na compreensão de uma situação. Os Problemas 17 e 18 podem ser feitos neste ponto, ainda que êstes problemas sejam difíceis e provàvelmente, reservados para a hipótese de uma revisão.

Nota: A pergunta feita sôbre a velocidade limite, no texto (página 30), é idêntica à pergunta da parte (c) do Problema 5. Quando um objeto está se movendo para baixo, com uma velocidade maior do que sa velocidade limite, êle diminui de velocidade, porque a fôrça retardadora provocada pelo ar excede a fôrça aceleradora provocada pela gravidade.

DEMONSTRAÇÃO — A Constância da Aceleração.

O filme do PSSC sôbre queda livre começa com uma demonstração convincente da igualdade da aceleração de todos os objetos leves ou pesados, quando caem livremente, ùnicamente sob a influência da fôrça de gravidade. Se não exibiu o filme, você mesmo pode fazer esta demonstração em classe. O procedimento é o seguinte:

Primeiramente, tome um livro e uma fôlha de papel (um pouco menor em área do que o livro); mantenha-os um ao lado do outro, a uma mesma altura, e abandone-os simultâneamente. A fôrça de resistência do ar é comparável à fôrça gravitacional sôbre o papel, enquanto é muito menor em relação à fôrça gravitacional sôbre o livro. Portanto, a fôrça resultante sôbre a fôlha de papel diminui ràpidamente, fazendo com que o papel caia mais lentamente. (O papel logo atinge a sua velocidade limite, enquanto o livro continua acelerado).

Peça sugestões para explicar a falta da constância da aceleração, e para fazer o papel cair mais ràpidamente. Duas sugestões comuns são: uma, deixar cair a fôlha com um dos bordos voltado para baixo; outra, amarrotar a fôlha antes da queda. Tente estas sugestões.

Caso ninguém sugira, proponha manter o papel junto ao livro, acima ou abaixo dêle. Em ambos os casos, êles cairão juntos. Com o livro sôbre o papel, a experiência não é convincente, porque é óbvio que o livro empurra o papel para baixo. Mas, quando o papel é colocado sôbre o livro (sem ultrapassar os bordos do livro), o livro simplesmente protege o papel da fôrça de resistência do ar. Os dois cairão juntos, permanecendo o papel sôbre o livro, durante a queda.

DEMONSTRAÇÃO — Um Gráfico Mecânico de $y = -\frac{1}{2} gt^2$.

(Particularmente útil nas demonstrações de movimento e trajetórias de projéteis).

Utilize uma longa haste rígida como eixo do t e mantenha-a horizontalmente. Os valôres de y serão mostrados pelo comprimento de fios ou barbantes, mantidos a intervalos iguais. A maneira de fixar o barbante no suporte é fazer um entalhe ou um furo na haste. (Em aplicações posteriores, esta haste deverá ser enclinada, e os fios tenderão a deslizar ao longo da haste, se não estiverem firmemente fixos). Cada fio deve ser cortado a um comprimento particular de y, correspondente ao valor de t, valor êsse que corresponde ao ponto de suspensão. Prenda pequenos pesos (tais como argolas ou porcas) às extremidades dos fios, para mantê-los verticais e tornar as extremidades mais fàcilmente visíveis.

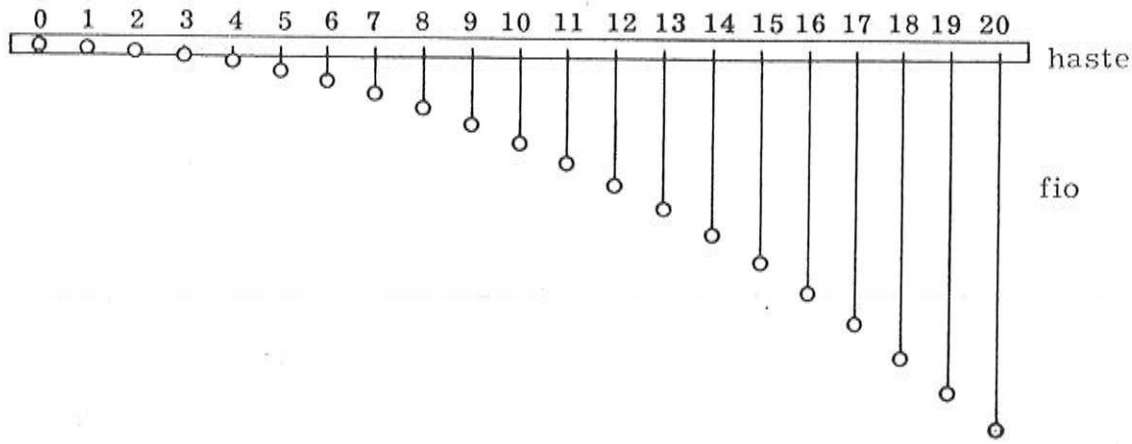
Devem ser utilizados, no mínimo, dez fios; há pouca vantagem em usar mais de 20.

t =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
−y =	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64

t =	9	10	11	12	13	14	15	16
−y =	0,81	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56

t =	17	18	19	20
−y =	2,89	3,24	3,61	4,00

Se os valôres de y fôrem expressos em metros, cada unidade de t corresponderá a 1/22,2 segundo.



Veja a discussão sôbre a demonstração nas Seções 3 e 4 do Guia, para a utilização dêsse dispositivo no tratamento de movimentos de projéteis.

Seção 3 — Movimento de Projéteis: Natureza Vetorial da Lei do Movimento de Newton

Seção 4 — Movimento de Projéteis: Determinação da Trajetória

FINALIDADE. Investigar a *natureza vetorial* da lei de Newton, considerando o movimento genérico de uma partícula sob a ação da gravidade. (Uma extensão da Seção 2, para o caso em que o movimento tem tanto uma componente horizontal como uma vertical.)

CONTEÚDO a. Na queda livre, observa-se que o movimento vertical é independente do movimento horizontal.

b. Isto é consistente com ponto de vista de que a lei de Newton é uma relação vetorial, $\vec{F} = m\vec{a}$.

c. Para um objeto lançado com uma velocidade inicial v_0 na direção horizontal,

$$x = v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} gt^2.$$

ÊNFASE. Êste é um assunto importante, que deve ser desenvolvido detalhadamente. A maioria dos alunos interessar-se-á e poderá dominar os problemas, se você lhes der uma boa orientação.

LABORATÓRIO. A Experiência III-5, Fôrças Exercidas sôbre uma Bola no Espaço, pode ser feita após completado o estudo destas seções. Veja as Notas de Laboratório.

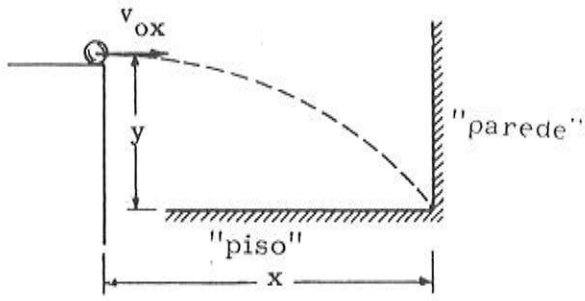
FILME. "Falling Bodies" pode ser utilizado juntamente com estas seções.

DESENVOLVIMENTO. Deve ser realçada a independência entre os movimentos vertical e horizontal. Esta é a essência da natureza vetorial da lei de Newton; cada componente do movimento obedece à lei de Newton. Primeiramente, assegure-se de que os alunos observam esta independência. Em seguida, certifique-se de que êles se utilizam dessa independência para resolver alguns problemas, como o sugerido abaixo.

Após demonstrar o fato de que o tempo de queda é independente da velocidade horizontal, as equações descrevendo cada componente do movimento (como na página 31) podem ser desenvolvidas em classe. As discussões baseiam-se no movimento mostrado nas Figuras 21-4 e 21-5, (páginas 30 e 31). (Uma descrição da trajetória ou a dedução da equação para y em têrmos de x deve ser adiada temporàriamente).

Peça aos alunos a equação que descreve a coordenada y de um corpo em queda livre, caindo verticalmente. Após escrever a resposta, $y = -1/2\ gt^2 = -4{,}9t^2$ (ou $y = -5t^2$), no quadro-negro, peça a equação para y se $v_{xo} = 10$ m/s. A maioria dos alunos verificará ràpidamente que $y = -4{,}9t^2$ se aplica, independentemente de v_x; mas, isto deve ser dado em classe, para que todos os alunos compreendam. Peça a equação para o movimento horizontal e escreva a resposta, $x = v_{ox} t$, no quadro-negro. (Talvez você queira utilizar alguns valôres de v_{ox}, tais como 2 m/s, 10 m/s, etc).

Dê à classe alguns exemplos de problemas práticos, que tenham soluções fáceis, se as componentes do movimento são separadas. É sugerida abaixo uma seqüência de problemas dêsse tipo. Em cada caso, um objeto deixa a mesa com uma velocidade horizontal, v_{ox}, e $t = 0$. Podemos considerar, nos primeiros problemas, o caso de velocidade vertical inicial igual a zero.



Considere números simples, a fim de tornar o cálculo mais simples, de modo a concentrar os alunos na natureza do movimento. (O uso de $y = -5t^2$ é mais útil para essa simplificação).

1. Os problemas mais simples são os que envolvem o intervalo de tempo, t.

(a) Dadas duas das grandezas em $x = v_{ox}t$, pedir a terceira.

(b) Dada uma das incógnitas em $y = -4{,}9t^2$, pedir a outra.

2. Dadas duas das três grandezas v_{ox}, x, e y, pedir a terceira.

(a) Peça primeiramente t e, em seguida, a outra incógnita. Por exemplo:

Se $x = 20$ m, e $v_{ox} = 2$ m/s, qual o valor de t? Qual é o valor de y?

Se $y = -4{,}9$ m e $x = 10$ m, qual o valor de t? Qual é o valor de v_{cx}?

Se $y = -4{,}9$ m e $v_{ox} = 3$m/s, qual o valor de t? Qual é o valor de x?

(b) Depois você poderá dar duas das três grandezas, v_{ox}, x, e y; peça a terceira, sem pedir explìcitamente t. Entretanto, os alunos habituar-se-ão a encontrar t, como um passo intermediário. Se y fôr dado, t poderá ser determinado imediatamente. Se x e v_{ox} fôrem dados, t poderá ser determinado.

3. Talvez você queira ampliar êsses problemas, a fim de incluir uma velocidade inicial vertical.

Na escolha dos problemas, deve-se lembrar que o aspecto mais importante do movimento de projétil é a independência das componentes. A melhor maneira de ensinar esta independência é utilizá-la, freqüentemente, na solução de problemas. Tal independência merece muito mais atenção do que a determinação da trajetória do movimento.

Questões como o Problema 15 do CCL poderão ser resolvidas, após a introdução dos tipos de exercícios apresentados acima.

DEMONSTRAÇÕES 1. *Independência dos Movimentos Vertical e Horizontal.* Será conveniente fazer uma ou mais demonstrações para o fato de dois objetos idênticos caírem juntos, independentemente de seu movimento horizontal. Comece perguntando aos alunos o que esperam que aconteça. Muitos alunos, intuitivamente, acham que o objeto com velocidade horizontal leva mais tempo para cair, porque "êle percorre maior distância". A igualdade dos tempos de queda pode ser demonstrada fàcil e efetivamente; tais demonstrações podem ser utilizadas para introduzir um desenvolvimento detalhado da conseqüência analítica da natureza vetorial da lei do movimento, de Newton.

O Problema 12 sugere que os alunos tentem observar isso, com bolinhas de gude. Êste problema pode ser dado nesse período. Pràticamente, qualquer par de objetos pode ser utilizado. Comece pelo uso de objetos comuns, ao invés de uma peça do "equipamento de demonstração". O filme "Falling Bodies" e a solução do Problema 15, nas páginas do CCL, mostram a possibilidade do uso de moedas para tal demonstração. Um dispositivo melhor elaborado pode ser utilizado para demonstrar a independência do tempo de queda, após você ter dado exemplos mais simples. O filme do PSSC "Falling Bodies" inclui alguns bons exemplos.

2. *Trajetórias.* Como foi mencionado acima, merece maior ênfase a independência das componentes do movimento do que o estudo das trajetórias. Por esta razão, é mais conveniente uma demonstração gráfica das trajetórias, em lugar de um tratamento analítico. Esta demonstração particular realçará mais ainda a independência das componentes do movimento. O equipamento é simples e será descrito no Guia para a Seção 2 dêste capítulo.

a. Movimento Inicial Horizontal.

(1) Mantenha uma haste semelhante àquela em que se prendeu os fios, descrita anteriormente, e peça a um aluno para mostrar onde um objeto, movendo-se com velocidade horizontal uniforme (sem movimento vertical) estaria em diferentes instantes. Assinale iguais intervalos de distância, que correspondem a iguais intervalos de tempo.

(2) Para algumas dessas distâncias, peça aos alunos que indiquem qual a posição em y, se o objeto estivesse em queda livre.

(3) Chame a atenção dos alunos para a haste com os fios suspensos. Tome o compri-

mento zero para o ponto onde a gravidade não está presente. Suspender os fios é o mesmo que introduzir o efeito da gravidade.

b. Movimento Inicial com um Ângulo.

(1) Qual seria a trajetória de um corpo quando atirado com um certo ângulo (se não houvesse gravidade) com a mesma velocidade da experiência acima? Isto poderia ser mostrado simplesmente, apontando a haste marcada (sem fios) numa direção apropriada.

(2) Qual seria a trajetória, se se considerasse a gravidade? Os alunos devem compreender que os fios foram tomados de acôrdo com a queda livre (para uma velocidade inicial particular, ao longo da haste). Isto é verdadeiro, quer a haste esteja horizontal, em ângulo ou mesmo vertical.

c. Resolvendo Problemas. Desde que os alunos compreendam que a linha ligando os pequenos pesos às extremidades dos fios representa a trajetória, você pode utilizar a haste e os fios suspensos para fazer problemas. O número de fios é a medida do tempo. A inclinação da trajetória (como nos Problemas 13 e 16) dá a razão das velocidades. Você achará particularmente útil essa haste com os fios, para demonstrar, qualitativamente, como a trajetória varia com o ângulo inicial. Em particular, será fácil ver que o ângulo de 45° dá o máximo alcance.

INFORMAÇÃO SUPLEMENTAR 1. *Trajetória como uma função do ângulo de lançamento, Θ.* Talvez você não queira desenvolver as equações apropriadas para diferentes ângulos iniciais Θ, em classe, ainda que tais equações não sejam muito complicadas. Entretanto, as seguintes fórmulas irão auxiliá-lo nas respostas de questões que possam ser levantadas.

Em têrmos de Θ, $v_{ox} = v \cos \Theta$, $v_{oy} = v \operatorname{sen} \Theta$. Logo, $x = v (\cos \Theta)\, t$, $y = v (\operatorname{sen} \Theta)\, t - \frac{1}{2} gt^2$.

A fim de encontrar a distância percorrida na direção horizontal, quando o objeto atinge o solo, determinamos o tempo, T, no qual y é zero. Fatorando a equação de y, obtemos:

$$y = t \left[v \operatorname{sen} \Theta - \frac{1}{2} gt\right].$$

Portanto, $y = 0$ para $t = 0$, e para $t = T$ que é dado por:

$$v \operatorname{sen} \Theta - \frac{1}{2} gT = 0, \text{ ou } T = \frac{2v \operatorname{sen} \Theta}{g}.$$

Para êsse intervalo de tempo, a distância X percorrida é:

$$X = v (\cos \Theta)\, T = \frac{2v^2 (\operatorname{sen} \Theta)(\cos \Theta)}{g}.$$

Esta expressão pode ser escrita numa forma mais simples, considerando que $\operatorname{sen} 2\Theta = 2 \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta$. Utilizando isto,

$$X = \frac{v^2}{g} \operatorname{sen} 2\Theta.$$

Para verificar como X varia para um dado v, necessitamos apenas examinar os valôres de $\operatorname{sen} 2\Theta$. Êste apresenta um valor máximo 1 para $2\Theta = 90°$ ou $\Theta = 45°$.

2. *Complicações Oriundas da Resistência do Ar.* As equações do movimento tomar-se-ão excessivamente complicadas, se se levar em consideração a resistência do ar; neste caso, os problemas podem ser resolvidos numèricamente, ao invés de utilizar fórmulas. (Por esta razão, usa-se tabelas balística em lugar de fórmulas).

Para dar uma idéia dêsse problema, considera-se a simplificação aproximada de que a fôrça, devido à resistência do ar, é proporcional ao quadrado da velocidade total. (Esta é, aliás, uma boa aproximação para a bola de pingue-pongue ou balas).

A fôrça de resistência total do ar pode, portanto, ser escrita como $F_a = -kv^2$, onde k é uma constante. Esta fôrça está dirigida na direção $-\vec{v}$.

As fôrças horizontal e vertical são dadas por:

$$F_{ax} = F_a \frac{v_x}{v} = -kv^2 \frac{v_x}{v} = -kv\, v_x, \text{ e}$$

$$F_{ay} = F_a \frac{v_y}{v} = kv^2 \frac{v_y}{v} = -kv\, v_y.$$

Uma vez que $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, F_x depende de v_y, e F_y depende de v_x. Portanto, a aceleração na direção x depende do movimento na direção y, e a aceleração na direção y depende do movimento na direção x.

Seção 5 — Fôrças Deflectoras e Movimento Circular

Seção 6 — Satélites da Terra

Seção 7 — O Movimento da Lua

FINALIDADE. Aplicar a lei de Newton ao caso em que a fôrça é constante em módulo, mas atua em uma direção que é sempre perpendicular à direção do movimento em cada instante, dando origem, assim, ao movimento circular uniforme.

CONTEÚDO a. Uma fôrça perpendicular ao movimento produz uma aceleração perpendicular que varia a direção do vetor velocidade, sem variar o seu módulo.

b. Uma fôrça de módulo constante, atuando numa direção perpendicular ao movimento, produz um movimento circular uniforme.

c. As equações cinemáticas do movimento circular uniforme são:

$$v = \frac{2\pi R}{T};$$

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{v^2}{R}.$$

d. A fôrça centrípeta, F, é

$$F = ma = \frac{m4\pi^2 R}{T^2} = \frac{mv^2}{R}.$$

e. Aplicando as relações acima, calcula-se o período e a velocidade de um satélite artificial e a aceleração centrípeta da Lua.

ÊNFASE. Normalmente, é muito difícil dominar esta matéria. Reserve cêrca de três períodos de aula, para desenvolver as idéias contidas nestas seções.

LABORATÓRIO. Deve-se realizar a Experiência III-6, antes da dedução das fórmulas relativas à fôrça centrípeta e aceleração centrípeta.

FILME. Uma discussão destas seções pode ser organizada em tôrno do filme "Deflecting Forces".

DESENVOLVIMENTO. Há três etapas importantes na compreensão dêste assunto; tais etapas devem ser desenvolvidas independentemente, embora as duas primeiras estejam bastante relacionadas.

1. A primeira etapa envolve uma apreciação da idéia qualitativa de que uma aceleração, que ocorre na direção perpendicular à velocidade instantânea, não varia o módulo da velocidade. Esta idéia é comumente difícil para o aluno, e alguma discussão detalhada ou revisão é normalmente necessária. O desenvolvimento repousa na idéia de que o vetor aceleração é definido como a razão da variação da velocidade vetorial. O módulo do vetor velocidade pode permanecer invariável.

2. A segunda etapa envolve um desenvolvimento detalhado (ou revisão) da cinemática do movimento circular. Exercícios sôbre gráficos da velocidade e aceleração serão necessários para fornecer aos alunos um entendimento básico da direção e módulo da aceleração centrípeta. São importantes as fórmulas finais deduzidas, mas fórmulas sòmente não são suficientes; sua origem deve ser entendida.

3. Apenas na terceira etapa, passamos da cinemática para a dinâmica. Entendendo a aceleração e conhecendo a lei de Newton, estaremos preparados para investigar as fôrças envolvidas no movimento circular.

° ° °

O desenvolvimento da cinemática do movimento circular exige dos alunos um trabalho gráfico. Alguns dêsses trabalhos podem ser feitos em classe, mas outros podem ser passados para o aluno fazer em casa. Sugestões para o tratamento da parte de cinemática dêste desenvolvimento são encontradas no Apêndice 1 do Guia para a Parte 1. Outras sugestões serão encontradas no Apêndice 1 dêste Guia para a Parte III do texto.

Deve-se dar ênfase às duas equações similares do movimento circular:

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \text{ e}$$

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Isto lembrará os alunos da dedução da expressão para a. Inicialmente, é melhor utilizar $a = \frac{2\pi v}{T}$ como o primeiro passo na resolução de um problema, e deduzir novamente $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right) R$ e $a = \frac{v^2}{R}$, quando fôrem necessárias. Após algum tempo, os alunos lembrar-se-ão de $a = \frac{v^2}{R}$ e aplicarão direntamente. A forma $a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ é particularmente útil no movimento harmônico simples. Observe que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{R}$ têm sentidos opostos. Portanto, se você escrever a última equação na forma vetorial, deve introduzir um sinal negativo:

$$\vec{a} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{R}.$$

° ° °

A lei de Newton prevê que, se um objeto se move em uma trajetória curva, deve haver uma componente da fôrça, perpendicular ao movimento. Para ressaltar isto, peça aos alunos para identificarem a fôrça centrípeta em situações comuns.

Por exemplo, que fôrça atua sôbre um carro numa curva? Os alunos terão de compreender que deve existir uma fôrça externa, atuando sôbre o carro. Por esta razão, deve ser uma fôrça da estrada sôbre os pneus; esta fôrça é de atrito, no caso de uma estrada plana (e pode ser uma fôrça normal, no caso de uma estrada inclinada).

Quais as fôrças que mantêm o passageiro na trajetória, enquanto o carro faz a curva? Essas fôrças são externas ao passageiro (mas, naturalmente, provêm das partes do carro). Elas são as fôrças exercidas pelo piso sôbre os pés, pelo assento sôbre o corpo e, freqüentemente, pela porta, ou passageiros adjacentes sôbre o corpo.

° ° °

Movimento sem fôrça centrípeta. Muitos alunos devem lembrar-se de que, quando a fôrça centrípeta é removida, como na Figura 21-11, o movimento subseqüente é linear e tangente ao círculo. A intuição muitas vêzes falha aqui, porque os alunos supõem que, se a fôrça que puxa para o centro fôr removida, o objeto mover-se-á radialmente para fora. Pergunte sôbre isto aos alunos, preferìvelmente associado a uma demonstração.

Seção 8 — Movimento Harmônico Simples

FINALIDADE. Utilizar a lei de Newton para predizer o movimento, quando está atuando uma fôrça um tanto mais complicada: uma fôrça que sempre está dirigida ao longo de uma reta, mas varia em módulo e sentido.

CONTEÚDO a. Quando um objeto é ligeiramente deslocado de sua posição de equilíbrio, aparece freqüentemente uma fôrça restauradora proporcional ao deslocamento: $F = -kx$.

b. A componente da fôrça centrípeta, ao longo de qualquer diâmetro, satisfaz à mesma equação $F_x = ma_x = -m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$, onde x é a distância ao longo do diâmetro a partir do centro.

c. Em vista da natureza vetorial da lei de Newton, o movimento produzido por $F = -kx$ deve ser o mesmo que a projeção do movimento circular ao longo do diâmetro.

d. A partir dessas equações, $k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$, ou $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

e. Se um pêndulo fôr deslocado de um pequeno ângulo, êle oscilará com um movimento harmônico simples, e $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

ÊNFASE. A não ser que você pretenda despender mais de 9 semanas para a Parte III, não será capaz de tratar do movimento harmônico simples, detalhadamente. Com um tempo limitado, você deve utilizar sòmente o filme "Periodic Motion", ou apenas demonstrações sem um exame detalhado dos argumentos do texto, que mostram a relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular.

Pode também fazer uma demonstração, para verificar a predição das fórmulas em que T é independente da amplitude. Um mínimo tratamento dêste tópico seria completado com tais demonstrações e a solução de um ou dois problemas, como exemplo.

Seria interessante mencionar o fato de que a lei de Newton é válida para tôdas as fôrças, e que esta fôrça particular foi escolhida, porque ela é um caso comum aplicável a pequenas vibrações em geral.

Se não dispuser de tempo, poderá omitir esta seção completamente, sem sacrificar os conhecimentos básicos para os trabalhos que se seguem.

FILME. "Periodic Motion" é uma fonte valiosa no ensino do movimento harmônico simples, tanto para um desenvolvimento mínimo como para um desenvolvimento normal.

COMENTÁRIOS. O Apêndice 2 para a Parte III do Guia apresenta um tratamento aritmético minuncioso, passo a passo, do problema do movimento harmônico simples.

O Apêndice 3 fornece um estudo rigoroso do problema, pela solução da equação diferencial do movimento.

DEMONSTRAÇÃO. Pode mostrar que a projeção do movimento circular é idêntica à do movimento harmônico simples. Montando uma mesa giratória na vertical, ao invés de montar num plano horizontal, permite-se a comparação da projeção do movimento circular com uma massa oscilando verticalmente em uma mola. Se você dispõe de uma montagem relativamente sem atrito, é possível utilizar a massa oscilando horizontalmente. Isto é semelhante às demonstrações contidas no filme "Periodic Motion".

Se não tiver uma demonstração dêsse tipo, talvez queira utilizar o aparelho descrito abaixo.

O movimento harmônico simples pode ser demonstrado pela observação da sombra de um objeto, movendo-se em um círculo, com o módulo da velocidade constante. Na tela, a sombra mover-se-á para a frente e para trás com um movimento harmônico simples. Uma comparação do movimento de um pêndulo, com o movimento da sombra de um objeto movendo-se em um círculo, mostra que o pêndulo, que oscila com pequena amplitude, também realiza o movimento harmônico simples. A montagem da Figura (a) pode ser aplicada para demonstrar isto.

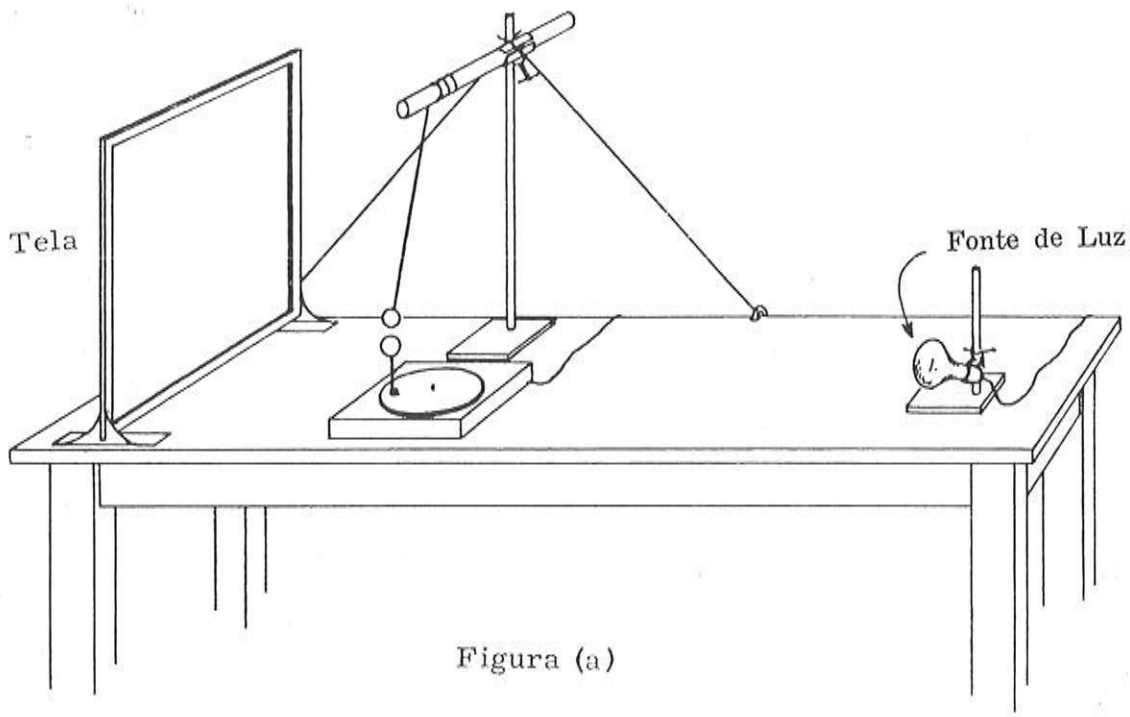


Figura (a)

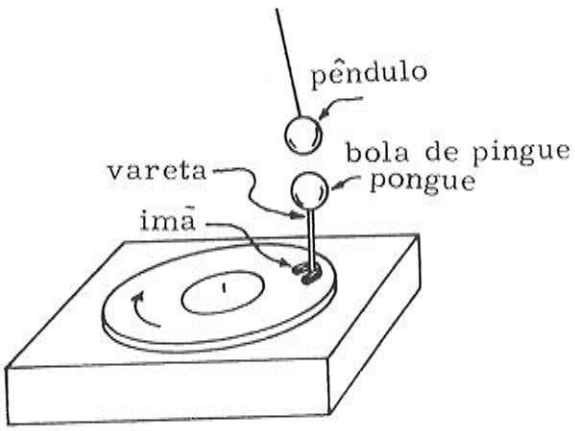


Figura (b)

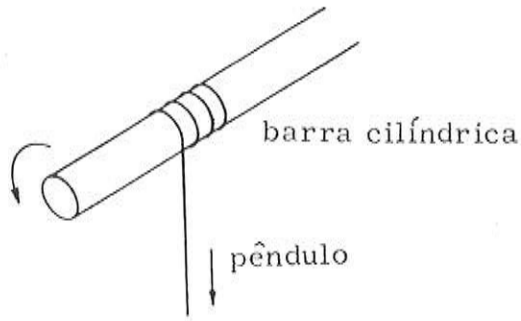


Figura (c)

Uma bola de pingue-pongue é colada à extremidade de uma vareta, enquanto a outra extremidade é prêsa com fita adesiva a um imã que adere ao prato giratório do fonógrafo (Figura b). Prende-se um pêndulo simples a um suporte rijo, mantido a uma certa altura, estando o comprimento do pêndulo ajustado de tal modo, que oscile com a mesma freqüência de rotação do prato do fonógrafo. O comprimento do pêndulo deve ser, aproximadamente, 80 cm para 33 1/3 r.p.m.. Ésta freqüência de rotação do prato é a melhor, uma vez que para uma freqüência mais elevada, necessitaríamos de um pêndulo mais curto, que oscilaria num ângulo grande demais. Mantenha a esfera do pêndulo acima do prato do fonógrafo, de modo que ela esteja a uma altura ligeiramente maior do que a bola de pingue-pongue (como mostra a Figura b).

Uma barra cilíndrica, fixada a um suporte por uma presilha em forma de anel, serve de eixo para o pêndulo. Êste eixo pode ser girado (Figura c), para ajustar o comprimento do pêndulo até que o período seja igual ao do prato do fonógrafo.

A fonte de luz deve estar a uma distância do pêndulo e do fonógrafo tal, que possibilite reduzir os efeitos de paralaxe devido à variação da distância entre a fonte e a bola em rotação.

Inicialmente, a amplitude do pêndulo deve ser maior do que o raio do prato; assim, as amplitudes serão iguais após o pêndulo e a bola terem sido sincronizados.

Afrouxe o pêndulo até o instante em que o movimento de sua sombra atrasa-se um pouco, em relação à sombra da bola de pingue-pongue. Os movimentos podem, então, ser sincronizados, mantendo-se o dedo contra os bordos do prato do fonógrafo, diminuindo sua rotação até que as duas sombras coincidam.

Seção 9 — Sistemas Experimentais de Referência

Seção 10 — Fôrças Fictícias em Sistemas Acelerados

Seção 11 — A Lei de Newton e a Rotação da Terra

FINALIDADE. Ilustrar o significado do sistema de coordenadas (ou sistema de referência), no qual a experiência de dinâmica é observada.

CONTEÚDO a. Uma vez que a aceleração $\vec{a}$ depende do sistema de coordenadas, $\vec{F} = m\vec{a}$ é correta sòmente para os sistemas de coordenadas não acelerados.

b. O princípio de inércia, de Galileu, aplica-se sòmente ao sistema de referência não acelerado (chamado sistema inercial). A lei de Newton é válida apenas para sistemas inerciais.

c. Observadores que estão em um sistema acelerado (e que não têm consciência disso), atribuiriam uma aceleração a um objeto que, na realidade, não está acelerado relativamente

ao sistema inercial. Êssses observadores concluiriam, a partir desta aceleração aparente, que existe uma fôrça. Tais fôrças são chamadas fôrças fictícias.

d. A Terra está em rotação. Um observador sôbre a Terra, utilizando o pêndulo de Foucault, pode detectar esta rotação. Objetos e observadores sôbre a superfície da Terra devem, portanto, mover-se com uma (muito pequena) aceleração centrípeta. Quase em tôdas as experiências, seguramente, pode-se ignorar esta aceleração, exceto nas experiências mais precisas.

ÊNFASE. Se você tiver pressa, deixe que o texto e, se possível, o filme transmitam a mensagem destas seções. Tenha cuidado, a fim de que os alunos não fiquem com a impressão de que a lei de Newton tem uma validade limitada; ela é sempre válida, se $\vec{a}$ é medida no sistema inercial.

FILME. "Frames of Reference" apresenta vivas demonstrações do efeito do sistema de referência de um observador. O número e a natureza das demonstrações apresentadas seriam difíceis de repetir em classe.

DESENVOLVIMENTO. Antes de mencionar os pequenos efeitos da rotação da Terra, é interessante discutir o caso de um carrossel girando ràpidamente. Lembre aos alunos que, para se manterem em equilíbrio sôbre o carrossel, devem inclinar-se para o centro (ou segurar-se em alguma coisa). Um homem que vivesse num gigantesco carrossel sentiria a existência, em seu mundo, de um intenso campo de fôrça empurrando as coisas para fora do centro. Êle poderia denominar tal fôrça (como algumas vêzes fazemos) fôrça centrífuga. Para um homem perceber seu mundo giratório em relação ao mundo exterior, poderia colocar o pêndulo de Foucault no tôpo do poste central. O plano de oscilação do pêndulo giraria *sôbre o carrossel.* (O plano permaneceria fixo em relação ao sistema inercial). Assim, poder-se-ia concluir que o carrossel é um sistema em rotação. Do ponto de vista de um sistema inercial, um homem sôbre o carrossel está constantemente sujeito a uma aceleração centrípeta. Seus pés estão em contato com o carrossel, e o atrito transmite a fôrça centrípeta necessária a seus pés. A fim de manter o seu corpo sôbre seus pés, o homem deve ficar numa posição tal, que a fôrça centrípeta também atue sôbre seu corpo. Para fazer isto, êle deve apoiar-se num poste vertical ou inclinar o corpo para dentro. Considerada sob êste ponto de vista, não há fôrça atuando para fora. A fôrça aparente dirigida para fora, observada pelo homem no carrossel, é uma fôrça fictícia.

COMENTÁRIO. A percepção de que algumas vêzes recorremos a fôrças "fictícias", para explicar fenômenos comuns, talvez leve certos alunos a fazer perguntas perspicazes sôbre a natureza fundamental da fôrça. Afinal, não podemos realmente "ver" as fôrças da gravidade, elétricas ou magnéticas, mas sòmente seus efeitos. Não é possível que essas fôrças ou algumas delas sejam também fictícias, em relação a algum sistema de referência que desconhecemos? Até agora, não sabemos o suficiente acêrca das causas das fôrças gravitacionais ou fôrças elétricas, para dizer se essas fôrças de "ação à distância" são reais ou "fictíciais". Einstein, em sua teoria da relatividade geral (veja o suplemento para o próximo capítulo, Apêndice 4), fêz uma consideração formal para a fôrça da gravidade em têrmos das propriedades de espaço e tempo, mas até agora, não tivemos uma "teoria de campo unificado" para explicar a similaridade dos efeitos gravitacionais com os efeitos elétricos e magnéticos. Portanto, pelo menos no presente estágio do desenvolvimento da Física, devemos considerar essas ações à distância como efeitos de fôrças reais. Simplesmente, desconhecemos outros sistemas de referência (como acontece com a fôrça "centrífuga") que façam desaparecer as fôrças elétricas e magnéticas.

° ° °

Embora para muitas experiências e cálculos seja conveniente e aceitável considerar a Terra como um sistema inercial, podemos demonstrar, experimentalmente, que êste não é o caso. Por sua vez, as estrêlas fixas, ainda que consideradas um "bom" sistema de referência, não são realmente fixas, umas em relação a outras, mas estão se movendo com enorme velocidade. Linhas imaginárias, ligando uma estrêla à outra, podem girar num sistema verdadeiramente newtoniano. Entretanto, a distância da Terra às estrêlas é tão grande que, numa escala de tempo de uma vida humana, elas podem ser consideradas "fixas".

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

É sempre conveniente a análise e resolução de problemas em classe. Será especialmente proveitosa a resolução de problemas, em conexão com o Capítulo 21. Boa parte dos alunos necessitará de auxílio, a fim de que, pela análise e compreensão dêsses problemas, possam chegar à sua solução. Alguns alunos devem ser estimulados a fazer esboços e gráficos relacionando a fôrça e o movimento envolvido, ainda que o problema proposto não exija isso.

Os Problemas 7, 8 e 9 são problemas simples de dinâmica, mas, se sua classe não fêz uma revisão de cinemática durante os Capítulos 20 e 21, talvez você queira assinalar (ou rever) alguns problemas mais simples de queda livre, antes de resolver os Problemas 7, 8, ou 9. O Problema 7 trata dos intervalos de distância, requerendo o uso de $d = v_i t + \frac{1}{2} at^2$. Uma solução direta do Problema 8 exige uma convenção de sinais, para distinguir o movimento para cima do movimento para baixo. O Problema 9 envolve fórmulas gerais e gráficos.

A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com seu nível avaliado de dificuldade e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente apropriados para discussão em classe e projetos para casa. Problemas, que são particularmente recomendados, estão marcados com um asterisco (*).

As respostas dos problemas que requerem uma resposta numérica ou abreviada são dadas após a tabela. Soluções detalhadas são dadas nas páginas 48-69.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe	Projetos para casa
1	1*, 2			1*, 2	
2	3	4, 5, 8*, 7, 10*, 17, 18	6, 9, 11	4, 5, 6, 7, 8*, 9, 10*, 11, 17, 18	5
3, 4	12*, 15*	13, 14, 16		12*, 13, 14, 15*	12
5, 6, 7	20, 21*, 22*	19, 23, 24*, 25, 26, 27*		19, 21*, 22*, 23, 24*, 25, 26, 27*	
8	31	28*, 29, 30		29, 30	28
9, 10, 11			32	32	

RESPOSTA ABREVIADAS

1. (a) 1 newton. } usando 10 newtons/kg
   (b) 4,9 kg. } para g.
2. (a) 120 newtons; 700 newtons. } usando
   (b) 70 kg; 70 kg } g = 10 newton/kg
3. 5 m/s².
4. Não.
5. (a) Sim.
   (b) Zero.
   (c) Diminui de velocidade, até atingir sua velocidade limite.
6. A pedra aceleraria, enquanto se movesse para o centro da Terra, e desaceleraria após ultrapassá-lo. A aceleração diminuiria, enquanto se aproximasse do centro.
7. (a) 1 segundo.
   (b) $v = -9{,}8$ m/s.
   (c) $\Delta t = 0{,}27$ s.
   (d) $v = -12{,}4$ m/s.
   (e) $\Delta d = -24{,}5$ metros.
8. (a) $v = 3{,}2$ m/s.
   (b) $d = 10{,}9$ metros.
   (c) $v = -7{,}5$ m/s.
   (d) $d = 8{,}6$ metros.

(e) $a = -9{,}8\ m/s^2$.

9. (a) $t = \frac{h}{v_i}$ se $v_i \geqq (4{,}9\ h)^{1/2}$.
(b) A bola está subindo, se $v_i > (9{,}8\ h)^{1/2}$; está descendo, $v_i < (9{,}8\ h)^{1/2}$; o encontro ocorre quando a bola está no ponto mais alto, se $v_i = (9{,}8\ h)^{1/2}$.

10. (a) 9,8 newtons.
(b) $9{,}8\ m/s^2 \approx 10\ m/s^2$.
(c) $4{,}9\ m/s^2 \approx 5\ m/s^2$.

11. (a) $F = 1/2\ mg = 5m$ newtons; (ou 4,9 m newtons) ao longo do plano.
(b) $a = 1/2\ g = 5\ m/s^2$ (ou $4{,}9\ m/s^2$) para baixo, ao longo do plano.

12. As duas bolas de gude atingem o chão, ao mesmo tempo.

13. (a) Veja gráfico.
(b) 0,64 segundos.
(c) 31 m/s, 12° abaixo da horizontal.

14. As bolas caem ao mesmo tempo. Para discussões sôbre o efeito da resistência do ar durante o último estágio do movimento, veja a discussão.

15. 11,0 metros.

16. (a) 2,55 metros.
(b) 10,2 m.
(c) 10 m/s.

17. 19,4 metros.

18. 12,0 m/s, para baixo (ou 11,5 m/s, para baixo).

19. $\frac{v^2}{R} = \left[\frac{(L/T)^2}{L}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right] = a.$

20. (a) $3{,}5 \times 10^{-3}$ m/s, para baixo.
(b) $6{,}1 \times 10^{-6}\ m/s^2$, para o centro.

21. (a) $1{,}8 \times 10^2\ m/s^2$.
(b) $1{,}3 \times 10^3$ newtons.

22. 99 m/s.

23. (a) De acôrdo com a definição, não tem sentido.
(b) Isto se refere à fôrça total de sustentação, mais do que àquela parte da fôrça de sustentação necessária, quando não há aceleração e nenhuma outra fôrça.

24. T = pêso + 0,2 newtons = 4,1 newtons.

25. (a) O cordão arrebentará; êle deverá suportar uma fôrça centrípeta adicional.
(b) O cordão deve ser duas vêzes mais resistente. O diâmetro deve aumentar de um fator $\sqrt{2}$; 2,8 mm.

26. $7{,}1 \times 10^4$ m/s.

27. (a) A partícula espirala para dentro.
(b) O módulo da sua velocidade não varia.

28. Variar o período pela variação do comprimento do pêndulo.

29. (a) Veja gráfico.
(b) y = −0,10 m.
(c) Oscila em tôrno de y = −0,10, com um movimento harmônico simples; atinge o extremo, y = −0,20 m, em 0,317 segundos.

30. (a) T = 0,628 s.
(b) $a = +\ 9{,}8\ m/s^2$.
(c) 19,6 m newtons para cima (m significa massa).

31. (a) T = 3,1 segundos.
(b) g poderia ser 10,5 newtons/kg.

32. O ônibus move-se com velocidade uniforme, quando a trajetória da bolinha é retilínea, e o ônibus está desacelerado, quando a trajetória é parabólica.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

(a) Qual é, aproximadamente, a fôrça gravitacional que atua sôbre a massa de 100 g na superfície da Terra?
(b) Qual é, aproximadamente, a massa de um objeto que pesa 49,0 newtons?

É esclarecida, neste problema, a distinção importante entre pêso e massa. O problema deve ser suplementado com exemplos, envolvendo objetos familiares aos alunos, de tal modo que tenham uma noção física do pêso expresso em newtons.

Observação: Certos professôres acham que fazer a aproximação para $g = 10$ *newtons por quilograma* é extremamente útil, para eliminar números complicados. (Sem esta simplificação, muitos alunos tendem a falar de "o pêso de 22 kg massa" ou "um pêso de 22 kg", porque êles não querem ter o trabalho de multiplicar 22 por 9,8. Entretanto, através do Problema 1 e extensões dêle, você pode fàcilmente conse-

guir que os alunos convertam automàticamente 22 kg para 220 newtons, e 39 newtons para 3,9 kg). Com prejuízo de sòmente 2% na precisão, consegue-se, freqüentemente, um notável aumento na compreensão.

a) Uma vez que g é aproximadamente 10 nt/kg, a fôrça sôbre 100 g = 0,1 kg é 0,1 kg × 10 nt/kg = *1 nt.*

b) 49 newtons é, aproximadamente, $\frac{49{,}0\ \text{nt}}{10\ \text{nt/kg}} =$ = 4,9 kg. (Se se der ao trabalho de calcular, utilizando 9,8 nt/kg, a resposta será 5,0 kg).

PROBLEMA 2

O campo gravitacional na superfície da Lua é um sexto do campo gravitacional na superfície da Terra.

(a) Quanto pesaria, na Lua, um homem de massa igual a 70 kg? E na Terra?

(b) Qual seria sua massa na Terra? E na Lua?

Êste problema evidencia a distinção entre massa e pêso.

a) Um homem de 70 kg teria um pêso de *700 newtons* sôbre a Terra ($70\ \text{kg} \times \frac{10\ \text{nt}}{\text{kg}} =$ = 700 nt).

Sôbre a Lua, seu pêso seria 1/6 dêsse valor ou $\frac{700\ nt}{6} \approx 120\ newtons.$

b) Sua massa é *70 kg* sôbre a Terra, sôbre a Lua ou em qualquer outro lugar.

Nota: Ainda que você não pretenda despender muito tempo aqui, os dados acima podem ser utilizados como base para uma interessante discussão, em classe, sôbre as características da vida cotidiana de um terrestre vivendo na Lua.

As fôrças que um homem pode exercer seriam as mesmas. Tôdas as atividades em que essas fôrças são utilizadas para vencer a *gravidade* seriam, na Lua, consideràvelmente alteradas: um homem *saltaria*, na superfície da Lua, uma altura seis vêzes maior do que a altura que salta na superfície da Terra. *Ergueria* objetos, cujas massas são seis vêzes aquelas que pode erguer na Terra. Por outro lado, processos em que não entra agravidade (por exemplo, puxar um corpo acelerando-o horizontalmente) *não* seriam afetados. Um exemplo interessante de um ato, envolvendo os dois tipos de processos, é observado no lançamento de uma bola de basebol. A velocidade máxima que um homem pode imprimir à bola de basebol (um processo independente da gravidade, e governado sòmente pelas massas da bola, do braço do homem e seus músculos) seria a mesma que na Terra. Contudo, a distância que a bola percorreria após deixar a mão do lançador até atingir a superfície da Lua, depende de g. Portanto, para um dado ângulo de lançamento, a bola alcançaria uma distância seis vêzes maior na Lua do que na Terra. A bola "mais rápida" de um lançador não teria maior velocidade do que na Terra, mas alcançaria cêrca de 800 metros na Lua! Imagine um jôgo de basebol na Lua!

Apresente aos alunos o problema de dirigir um carro comum na Lua. Poderia você fazer uma curva fechada a 80 km/h, como na Terra? Deveriam as curvas na rodovia ter mais, menos, ou a mesma inclinação que na Terra?

Provàvelmente, os alunos serão capazes de dar outros exemplos. Nas discussões, deve-se frisar que tôdas as características, relacionadas ùnicamente com massas são invariáveis; inércia, reações químicas, conteúdo térmico, colisões, etc., são exemplos de características que não variam.

PROBLEMA 3

O campo gravitacional da Terra em determinado ponto do espaço imprime à massa de 1 kg a aceleração de 5 m/s². Qual seria a aceleração comunicada à massa de 3 kg?

Êste é um problema simples, que acentua a relação entre a massa inercial e a gravitacional.

A partir de F = ma, $a = \frac{F}{m}$. Portanto, a aceleração diminui quando aumenta a massa, e aumenta quando a fôrça aumenta. *Se* a fôrça aceleradora fôsse constante, a massa maior teria uma aceleração menor. Porém, determinamos experimentalmente que a fôrça gravitacional é proporcional à massa. Assim, se a massa aumenta de um fator 3, acontece o mesmo com a fôrça gravitacional, e a aceleração devido à gravidade permanece constante — ela é independente da variação da massa. Em um ponto do espaço, onde o campo gravitacional da Terra

acelera a massa de 1 kg a 5 m/s², uma massa de 3 kg será acelerada também a 5 m/s^2.

PROBLEMA 4

Se a razão da massa gravitacional para a massa inercial fôsse diferente para diferentes objetos, adquiririam êles a mesma aceleração no campo gravitacional da Terra? Explique.

Êste problema chama a atenção para a mais simples implicação da relação entre massas gravitacional e inercial.

A resposta mais direta pode ser dada, baseando-se nas equações da página 28 do livro texto. Uma vez que $\vec{a} = \frac{m_g}{m_i}\vec{g}$, uma razão variável para m_g/m_i implica numa aceleração variável. Assim, por exemplo, se objetos de materiais diferentes tivessem diferentes razões para $\frac{m_g}{m_i}$, seriam acelerados diferentemente, no campo gravitacional da Terra.

Observe que a constância de m_g/m_i não é uma relação deduzida; está baseada em experiências que demonstram a universalidade da aceleração causada pela gravidade. Se m_g/m_i não fôr constante, as únicas variações que se deve esperar são nos fenômenos diretamente ligados à fôrça de gravidade. Outros aspectos da dinâmica permaneceriam completamente invariáveis.

Visto que a constância de m_g/m_i é determinada diretamente pela experiência, um físico experimental pode planejar experiências para testar mais cuidadosamente esta constância. Experiências diretas com aceleração não são realizáveis com extrema precisão ou com uma larga escala de massas, mas, em tôdas as experiências realizadas, verificou-se a consistência da constante m_g/m_i, dentro do limite de precisão da experiência. As experiências mais precisas até agora realizadas envolvem, essencialmente, a comparação dos períodos de pêndulos feitos de materiais diferentes.

Tais experiências mostram que, cêrca de 1 parte em 10^8, a razão m_g/m_i é a mesma, independentemente de que o pêndulo seja feito de um material leve (tal como o alumínio) ou um material pesado (tal como o chumbo). Experiências com satélites artificiais da Terra, freqüentemente projetadas, estenderão a precisão das experiências referidas a cêrca de 1 parte em 10^{10}.

PROBLEMA 5

Jogue uma bola de borracha com a máxima fôrça que puder (ao ar livre) e observe sua velocidade. Jogue, agora, com a mesma fôrça, uma bola de papel amassado.

(a) Parece esta última retardar-se consideràvelmente?

(b) Qual é a velocidade limite, na direção horizontal, para qualquer objeto lançado no ar?

(c) Na sua opinião, o que aconteceria a um objeto lançado para baixo, com velocidade maior que a velocidade limite?

a) O papel diminui, notadamente, de velocidade; normalmente quase pára entre 3 e 5 metros.

b) A velocidade limite na direção horizontal, para qualquer objeto lançado no ar, é zero. Uma vez que atua apenas a fôrça desaceleradora devido à resistência do ar, a velocidade horizontal final será zero.

c) Para um objeto lançado para baixo com uma velocidade maior do que a sua velocidade limite, inicialmente a fôrça de resistência para cima será maior do que a fôrça gravitacional, e o objeto desacelerará até a sua velocidade limite. Nessa velocidade, a fôrça de gravidade é equilibrada pela fôrça de resistência do ar.

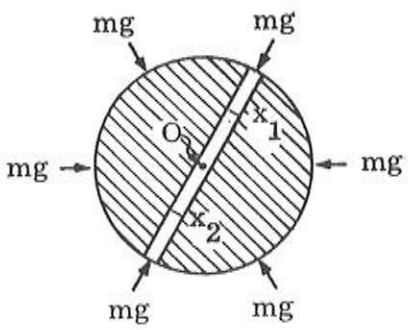
PROBLEMA 6

Na sua opinião, o que aconteceria a uma pedra que caísse num buraco que varasse a Terra de Norte a Sul, passando pelo centro da Terra? Acha você que a aceleração da pedra seria constante, enquanto ela estivesse se dirigindo para o centro? Raciocinando grosseiramente, pode você dizer como o campo g varia dentro do buraco? Prepare-se para discutir isso em classe.

Êste problema deve ser tratado qualitativamente. Um aluno, que tentar a solução quantitativa, verá malogrados seus esforços.

Uma pedra abandonada no Polo Norte seria acelerada, até atingir o centro da Terra; depois, seria desacelerada. A fôrça que atua sôbre a pedra e, portanto, a aceleração, decresceria gradualmente, porque a parte da massa da Terra que a pedra já tivesse ultrapassado, na sua trajetória para baixo através do buraco, puxaria a pedra para fora, ao invés de puxá-la para o centro da Terra.

É difícil decidir exatamente como o campo g varia com a posição no buraco, sem utilizar integração ou processos equivalentes. Entretanto, é possível descrever o movimento com algum detalhe, mesmo que a fôrça não seja conhecida exatamente. Considere a simetria em relação ao centro da Terra. Devido a esta simetria, o módulo da fôrça depende ùnicamente da sua distância ao centro. O sentido da fôrça está voltado para o centro da Terra. Portanto, a pedra será acelerada contìnuamente (desprezando a resistência do ar, etc.) e começará a ser desacelerada, logo que ultrapasse o centro da Terra (uma vez que o sentido da fôrça resultante inverte). Considere dois pontos quaisquer no buraco, x_1 e x_2, equidistantes do centro O da Terra. A pedra será acelerada por uma fôrça variável, enquanto percorer a distância de x_1 a O, e desacelerará por uma fôrça oposta, mas igual, enquanto percorrer a distância de O a x_2. Devido à simetria, a pedra alcança a sua velocidade máxima no centro e, então, podemos descrever suas velocidades como uma função da distância a partir do centro. Se a pedra fôr abandonada (em vez de ser atirada) no Polo Norte, ela atingirá o Polo Sul com a velocidade zero e, em seguida, voltará para o centro. O movimento será oscilatório.



Observação: Talvez seja levantada a seguinte questão: Por que escolher o eixo Polo Norte-Polo Sul? É difícil cavar um buraco através da Terra, mas se isso fôsse feito, haveria boas razões para usar êsse eixo, uma vez que êle é o eixo de rotação da Terra. Se o buraco fôsse em uma outra direção (porém ainda passando pelo centro da Terra) a pedra não cairia em linha reta, mas desviar-se-ia lateralmente. Isto porque o sistema de referência, que era fixo relativamente ao buraco (no caso anterior) agora giraria relativamente ao sistema que é fixo em relação ao eixo da Terra. No sistema em rotação, apareceriam fôrças "fictícias" (a fôrça centrífuga é uma delas) que não seriam paralelas à direção do buraco e moveriam a pedra para um dos lados do buraco. Nenhuma fôrça fictícia entraria, se adotássemos o sistema de referência fixo em relação ao sistema inercial das estrêlas fixas, e poderíamos explicar o mesmo resultado, dizendo que a Terra gira, enquanto a pedra cai de tal modo, que mantém a velocidade transversal que tinha na superfície da Terra, chocando-se com as paredes do buraco.

PROBLEMA 7

Uma pedra cai da borda de um telhado.

(a) Quanto tempo leva para percorrer 4,9 m?

(b) Qual a sua velocidade no fim dêsse tempo?

(c) Quanto tempo mais será preciso para que ela percorra uma distância adicional de 3 m?

(d) Qual a sua velocidade no fim desta queda de 7,9 m?

(e) Que distância a pedra percorre durante o terceiro segundo?

a) $d = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}(9{,}8)\,t^2 = -4{,}9\,t^2$,

onde o valor negativo de *a* indica que a aceleração é para baixo, e o valor negativo de *d* indica uma queda.

Mas $d = -4{,}9$ m. Conseqüentemente, $-4{,}9\,m = -4{,}9\ m/s \times t^2$, e $t = 1$ *segundo.*

b) Após 1 segundo, a velocidade é $v = at = -9{,}8 \times 1 = -9{,}8$ m/s.

c) Uma solução mais direta é determinar o tempo gasto para cair 7,9 m.

$-7{,}9\ \text{m} = -4{,}9\ \text{m/s}^2 \times t^2$, ou $t = \left(\frac{7{,}9}{4{,}9}\right)^{1/2}$, e $t = 1{,}27$ s.

Portanto, os três metros adicionais necessitam 1,27 — 1,00 = 0,27 segundos.

d) A velocidade final pode ser encontrada a partir de $v = v_i + at$. Pode-se utilizar tanto $v_i = 0$ e $t = 1{,}27$ segundos, ou $v_i = -9{,}8$ e $t = 0{,}27$ segundos.

$$v = 0 - 9{,}8\ (1{,}27) = -12{,}4\ \text{m/s, ou}$$
$$v = -9{,}8 - 9{,}8\ (0{,}27) = -12{,}4\ \text{m/s.}$$

e) Após 2 segundos, a velocidade é $v_2 = (-9{,}8)\ (2) = -19{,}6$ m/s. Semelhantemente, após 3 segundos, $v_3 = (-9{,}8)\ (3) = -29{,}4$ s. Portanto, onde v_m é a velocidade média entre $t = 2$ e $t = 3$ s,

$$v_m = \frac{-19{,}6 - 29{,}4}{2} = -24{,}5\ \text{m/s.}$$

A distância é $d = v_m t = (-24{,}5)\ (1\ \text{s}) = -24{,}5$ metros.

PROBLEMA 8

Uma bola é lançada verticalmente para cima, com velocidade de 15 m/s.

(a) Que velocidade terá depois de 1,2 s?

(b) A que distância acima do solo estará nesse instante?

(c) Que velocidade terá depois de 2,3 s?

(d) A que distância acima do solo estará nesse instante?

(e) Qual é a aceleração da bola no ponto mais alto da trajetória?

Êste problema pode ser resolvido, utilizando as duas equações $v_f = v_i + at$ e $d = v_m t$.

a) A velocidade da bola para cima é 15 m/s. Portanto, $v_i = +15$ m/s; $a = -9{,}8\ \text{m/s}^2$, devido à gravidade.

$$v_f = v_i + at$$
$$v_{1,2} = 15\ \text{m/s} + (-9{,}8\ \text{m/s}^2)\ (1{,}2\ \text{s}) = +3{,}2\ \text{m/s.}$$

b) $d = v_m t$

$$d_{1,2} = v_m\ (1{,}2\ \text{s}) = \left(\frac{15 + 3{,}2}{2}\ \text{m/s}\right) \times 1{,}2 = +10{,}9\ \text{metros.}$$

c) $v_f = v_i + at$

$$v_{2,3} = 15\ \text{m/s} + (-9{,}8\ \text{m/s}^2) \times 2{,}3\ \text{s} = -7{,}5\ \text{m/s.}$$

d) $d = v_m t$

$$d_{2,3} = v_m\ (2{,}3\ \text{s}) = \left(\frac{15 - 7{,}5}{2}\ \text{m/s}\right) \times 2{,}3\ \text{s} = +8{,}6\ \text{metros.}$$

e) A aceleração da bola, no ponto mais alto da trajetória e em qualquer outro instante durante o seu movimento, é $-9{,}8\ \text{m/s}^2$.

PROBLEMA 9

Uma pedra é abandonada de uma escarpa de altura h (em metros). No mesmo instante, uma bola é atirada verticalmente para cima, da base da escarpa, com a velocidade de v m/s.

(a) Supondo que a bola seja lançada com fôrça suficiente, em que instante t a bola e a pedra se encontrarão?

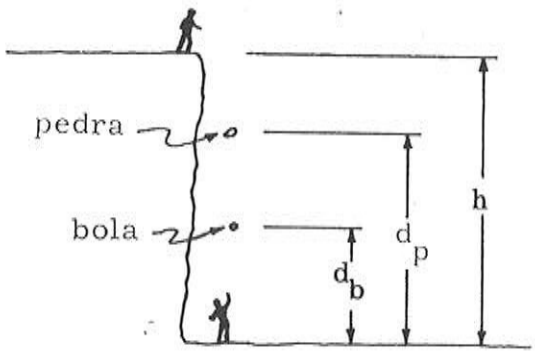
(b) Nesse instante, a bola ainda está subindo?

Embora êste problema seja um pouco difícil, tem, particularmente, duas boas características. Primeiramente, os alunos devem pensar no problema físico de escrever as equações corretas. Em seguida, devem reexaminar a situação física para interpretar seus resultados.

a) A chave para uma solução apropriada a êste problema é medir a distância de um modo consistente. Resolve-se, medindo as distâncias d_p e d_b a partir da base da escarpa. Portanto,

$$d_p = h - \frac{1}{2}\ gt^2$$
$$d_b = v_i t - \frac{1}{2}\ gt^2.$$

$\therefore$ Quando $d_p = d_b$, $h = v_i t$ e $t = \frac{h}{v_i}$.



Realmente, $t = h/v_i$ não é válida, *a menos que* a bola encontre a pedra acima do solo. Se v_i é muito pequena, a bola e a pedra não se encontram, antes da bola ter voltado ao solo. Isto pode ser verificado, constatando que t deve ser menor do que o tempo, t_h, que a pedra leva para atingir o solo. Êste tempo é dado por

$$h = \frac{1}{2}(9{,}8)\ t_h^2 \text{ ou } t_h = \left(\frac{h}{4{,}9}\right)^{1/2}.$$

b) Quando a bola e a pedra se encontram, a bola pode estar subindo, caindo, ou em repouso. Podemos verificar isto, determinando a velocidade v_e em t, o instante em que a bola e a pedra se encontram.

Isto é,

$$v_e = v_i - gt.$$

Mas, já sabemos que $t = h/v_i$; portanto,

$$v_e = v_i - gh/v_i.$$

Se a bola e a pedra se encontrarem quando a bola estiver em repouso, então, $v_e = 0$, e

$$v_i = gh/v_i \text{ ou}$$

$$v_i^2 = gh.$$

Isto é: Se a bola fôr lançada para cima com uma velocidade exatamente igual a $\sqrt{gh}$, ela estará parada quando se encontrar com a pedra. Se fôr atirada com uma velocidade maior, ainda estará subindo; e a uma velocidade menor, descendo.

PROBLEMA 10

Dois discos de gêlo sêco estão sôbre uma mesa lisa, ligados por um cordão. A massa de cada um é 0,5 kg.

(a) Qual é a fôrça gravitacional total que atua sôbre os discos?

(b) Qual será a taxa de aumento de suas velocidades, se fôrem puxados por uma fôrça horizontal igual à fôrça gravitacional encontrada em (a)?

(c) Se um disco ficar sôbre a mesa e o outro dependurado pelo cordão, qual será a aceleração dos discos? Despreze o atrito.

Êste problema trata da queda livre, que é um caso especial da lei de Newton. Introduz um nôvo tipo de problema no qual a fôrça gravitacional, sôbre parte do sistema, acelera todo o sistema.

a) A fôrça gravitacional total é aproximadamente 10 newtons, porque, sôbre cada massa de 0,5 kg, atua uma fôrça de 5 newtons. (Utilizando 10 nt/kg para g). Realmente, $F = 2 \times 0{,}5 \times 9{,}8 = 9{,}8$ *nt.*

(Observe que, como os discos não aceleram neste caso, a mesa deve empurrar para cima cada um dos discos com uma fôrça igual ao pêso dos discos).

b) Se um único objeto é puxado com uma fôrça resultante igual à fôrça gravitacional, o objeto deve adquirir a mesma aceleração que teria em queda livre, $9{,}8 m/s^2$ (ou, aproximadamente, 10 m/s^2). Matemàticamente:

$F = \text{massa} \times a$, mas $F = 2mg$ e massa $= 2m$

$F = 2mg = 2ma$

$a = g.$

c) Alguns alunos verão imediatamente que, com uma das massas de 0,5 kg sôbre a massa e a outra pendurada nos bordos da mesa, temos uma massa total de 1 kg, e que a fôrça aceleradora (não equilibrada) é apenas a fôrça de gravidade sôbre a massa de 0,5 kg. Esta fôrça é 0,5 kg $\times$ 9,8 newtons/kg $=$ 4,9 newtons. Uma fôrça de 4,9 newtons, atuando sôbre a massa de 1 kg, produz uma aceleração de 4,9 m/s^2. Uma solução um tanto formal:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}5\ \text{kg} \times g}{1\ \text{kg}} =$$

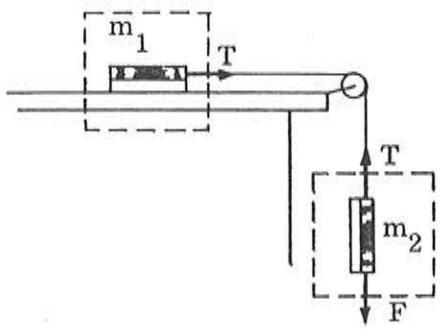
$$= \frac{1}{2} g = 4{,}9\ \text{m/s}^2.$$

Outros alunos podem pensar que "percebem", mas não estão certos e exigem um tratamento mais detalhado. Há muitas maneiras de fazer isso. Uma alternativa é pedir aos alunos para considerarem cada disco como um sistema isolado (utilizando linhas pontilhadas para demarcar os limites do sistema e as fôrças externas que atuam), e lembrá-los de que:

1. A tensão em todos os pontos do fio é T, e
2. uma vez que os discos se movem ligados, o módulo de $\vec{a}_1$ é igual ao módulo de $\vec{a}_2$, ainda que suas direções sejam diferentes. Chamando de a êste módulo,

$T = m_2 a$ $\qquad$ $T = m_1 a$

Para m_2: $F - T = m_2 a$



$$\therefore F - m_1 a = m_2 a.$$

mas $F = m_2 g$. Substituindo,

$$m_2 g - m_1 a = m_2 a$$

$$a \cdot (m_1 + m_2) = m_2 g$$

$$a = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) g = 4{,}9\ \text{m/s}^2.$$

PROBLEMA 11

Um objeto de massa *m* move-se num plano inclinado sem atrito, que forma um ângulo de 30° com a horizontal.

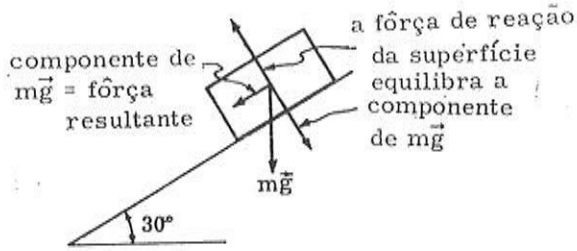
(a) Qual é a fôrça resultante sôbre o objeto?

(b) Qual é sua aceleração ao descer o plano?

Êste problema sôbre atração gravitacional requer uma decomposição do pêso, mg, em duas componentes, uma das quais ao longo do plano inclinado. A solução exige trigonometria ou um desenho em escala.

a) Podemos decompor a fôrça $\vec{mg}$ em duas componentes, uma ao longo de AB e outra perpendicular a ela. Como o objeto não penetra na superfície, não há componente da fôrça *resultante*, perpendicular à superfície. A componente perpendicular de $\vec{mg}$ é equilibrada pela fôrça de reação da superfície.

Como não há atrito, a fôrça de reação da superfície do plano não possui componente paralela ao plano. A única componente que é paralela ao plano é a componente paralela de $\vec{mg}$. Esta componente de $\vec{mg}$ é a fôrça resultante. Para determiná-la, constrói-se DE com um módulo igual a $\vec{mg}$, numa escala escolhida. Constrói-se DF perpendicular à AB, passando por D, e EF paralela à AB, passando por E.



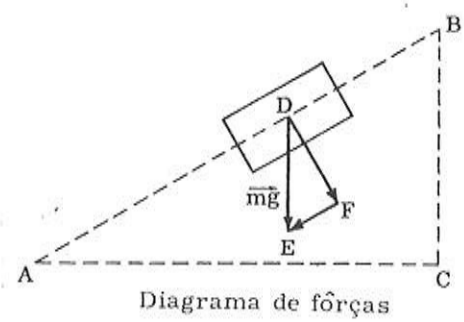


Diagrama de fôrças

Para maior clareza, ao invés de traçar as fôrças sôbre o esquema do plano inclinado, é aconselhável desenhar um diagrama de fôrças, no qual as direções AB, BC, e CA são mostradas em linhas pontilhadas. Os comprimentos, neste nôvo diagrama, evidentemente representam fôrças, e há menor possibilidade de serem confundidos com distâncias. Utilizando a geometria, os alunos seriam capazes de mostrar que o triângulo EDF é semelhante ao triângulo BAC, o que $\angle EDF = \angle BAC = 30°$. Portanto, $\overline{FE}$, que representa a componente da fôrça paralela ao plano, é dada por:

$$\text{sen } 30° = \frac{\overline{FE}}{mg}, \text{ ou } \overline{FE} = mg \text{ sen } 30° = \frac{1}{2} mg.$$

A fôrça normal $\overline{DF}$ é equilibrada pela fôrça de reação da superfície do plano; cada uma dessas fôrças tem um módulo mg cos 30°, e sua soma vetorial é zero.

Portanto, a fôrça resultante $= \frac{1}{2}$ mg ao longo do plano inclinado.

b) A aceleração, ao descer o plano, é dada por:

$$F = ma = \frac{1}{2} mg, \text{ e}$$

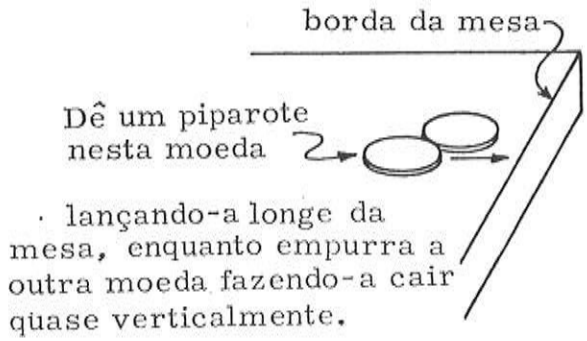
$$a = \frac{1}{2} g, \text{ ao descer o plano.}$$

PROBLEMA 12

Tente deixar cair uma bola de gude da beirada de uma mesa ao mesmo tempo que lança horizontalmente (da beirada da mesa) uma outra bola. Atingirão elas o solo ao mesmo tempo? Explique.

Ainda que êste projeto possa ser feito em classe como uma demonstração, é tão fácil e instrutivo, que vale a pena que os próprios alunos o façam.

Se a experiência fôr feita sôbre um assoalho duro, o tempo de impacto pode ser fàcilmente detectado pelo som. Uma técnica apropriada de "lançamento" para moedas é descrita no filme "Falling Bodies". A mesma técnica pode ser utilizada para bolinhas ou outros objetos.



PROBLEMA 13

Uma bola é lançada horizontalmente da altura de 2,0 m com velocidade de 30 m/s.

(a) Trace a trajetória da bola, marcando suas posições de décimo em décimo de segundo.

(b) Quanto tempo leva a bola para atingir o chão?

(c) Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade da bola no instante em que ela atinge o chão.

Na escolha da escala para traçar a curva, será útil conhecer o tempo gasto no movimento.

Podemos determinar êste tempo, utilizando

$$y = h - \frac{1}{2} gt^2.$$

A bola choca-se com o solo a $y = 0$. Quando $y = 0$,

$$h = \frac{1}{2} gt^2, \text{ ou}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}0 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = 0{,}64 \text{ s.}$$

Podemos determinar a distância horizontal percorrida pela bola antes de chocar-se com o solo, a partir de

$$x = vt = 30 \text{ m/s} \times 0{,}64 \text{ s} = 19{,}2 \text{ m.}$$

Dêsses valôres, nosso gráfico necessita ter "2 m" de altura por "20 m" de largura.

a) Se as componentes horizontal e vertical, relativamente ao ponto de lançamento da bola, são x e y, podemos escrever em função de t,

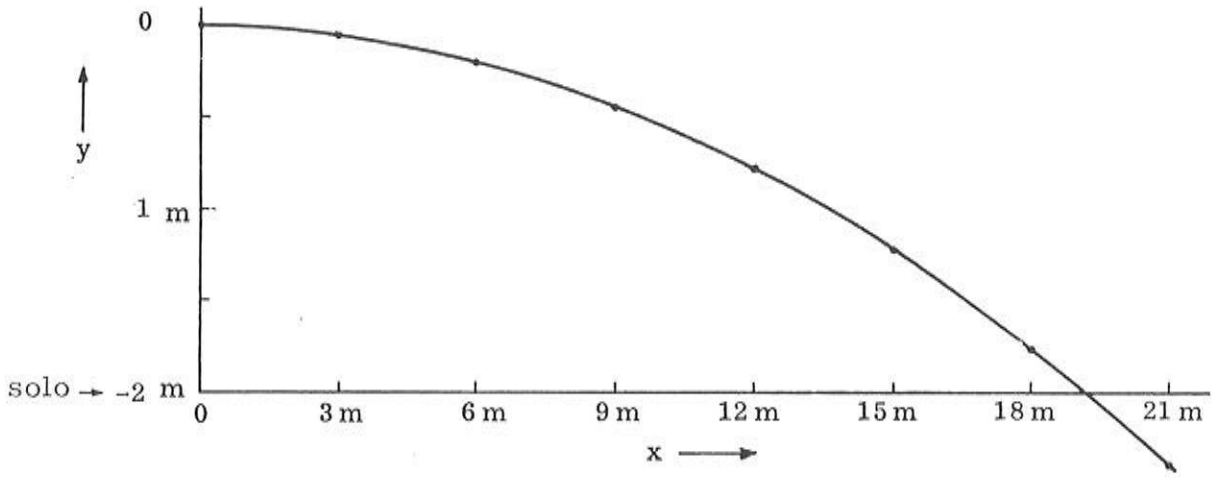
$$x = vt = 30\ t$$

$$y = h - 1/2\ gt^2 = -4{,}9\ t^2,$$

onde y é positivo para cima e, logo, é negativo aqui. Intervalos iguais de t correspondem a intervalos iguais de x. Obtemos a seguinte tabela:

t	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
x	0	3,0	6,0	9,0	12,0	15,0	18,0	21,0
y	0	-0,05	-0,20	-0,44	-0,78	-1,22	-1,76	-2,40

Determinamos y com duas casas decimais, porque necessitaremos de uma escala maior para y do que para x. Também determinamos os valôres até t = 0,7 (isto é, abaixo do solo), para possibilitar a resposta de (c) com maior precisão.



b) Pelo gráfico, o tempo gasto para a bola atingir o solo está entre 0,6 e 0,7 s. Quanto mais cuidadosa fôr a interpolação em x(como x é proporcional a t), obter-se-á resultados mais precisos (em princípio). $t \approx 0{,}65$ s. (Realmente, $t = 0{,}64$ *s*, como vimos acima).

c) Lembre-se de que a inclinação dêste gráfico não é uma velocidade. Ela é a *razão* da velocidade vertical pela horizontal. Como sabemos que a velocidade horizontal é constante e igual a 30 m/s, podemos obter a velocidade vertical, medindo a razão.

Uma interpolação grosseira (entre t = 0,6 e t = 0,7, a partir da tabela) fornece esta razão como:

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{-2{,}40 - (-1{,}76)}{21{,}0 - 18{,}0} = -0{,}21$$

isto é, $v_y = -0{,}21 \times 30 = -6{,}3$ m/s.

Poderíamos obter resultados mais precisos, traçando cuidadosamente uma curva e medindo a inclinação no ponto onde ela cruza a linha y = −2. Ou, a partir de $v_y = -gt$, podemos também determinar que $v_y = -6{,}3$ m/s.

A partir das componentes vertical e horizontal da velocidade, a velocidade real no instante do impacto pode ser medida, utilizando o teorema de Pitágoras:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{30^2 + 6{,}3^2} = 31 \text{ m/s}.$$

As componentes vertical e horizontal da velocidade também fornecem a inclinação no instante do impacto, o que possibilita determinar a direção da bola.

$$\text{tg}\ \Theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{6{,}3}{30} = 0{,}21.$$

$\Theta = 12^o$, *abaixo da horizontal.*

Em antecipação ao Problema 14, deve-se salientar mais uma vez que a componente *vertical* do movimento é exatamente a mesma que a de um corpo caindo de 2 metros, sem movimento horizontal.

PROBLEMA 14

Uma bala cai da mesma altura e no mesmo instante em que uma outra é disparada horizontalmente. Discuta o movimento de cada bala.

Êste problema de movimento de projétil deve se seguir ao problema 13. A resposta é quase óbvia; de acôrdo com as nossas considerações, não há, em princípio, diferença entre o movimento de bolas de basebol e o movimento de balas.

Como foi observado no fim do último problema, o movimento *vertical* da bala disparada horizontalmente é idêntico ao da bala abandonada verticalmente. Portanto, as alturas das duas balas serão as mesmas em qualquer instante, embora a bala disparada possa percorrer uma grande distância *horizontal*.

Os alunos devem entender que esta é uma solução idealizada (a resistência do ar é desprezada). A menos que alguns alunos insistam em mais informações, provàvelmente, você não desejará ir além nas discussões dêste problema.

° ° °

Se os alunos perguntarem qual das balas cai mais depressa, pode explicar que, se as balas são idênticas, aquela que é abandonada cairá mais ràpidamente. A resistência do ar é muito maior para a bala disparada, ou seja a componente para cima da resistência do ar sôbre a bala disparada retarda mais a sua queda.

PROBLEMA 15

Uma bola é lançada do centro de um campo de futebol para o gol. Se ela permaneceu no ar durante 3,00 s, que altura vertical terá alcançado? (Despreze a resistência do ar).

Êste é um problema simples e interessante sôbre projéteis, que comumente origina uma boa discussão em classe.

À primeira vista, parece haver pouca informação sôbre o problema. Mas a solução poderá ser determinada, se se fizer sòmente uma consideração adicional de que a bola é agarrada no mesmo nível em que foi lançada. Nesse caso, a simetria da trajetória mostra que a bola subiu durante 1,50 segundos e caiu durante 1,50 segundos.

Considerando o movimento vertical, temos:

$$v_y = v_{yo} - gt.$$

Sabemos que, quando $t = 1{,}5$ s, $v_y = 0$.

$$\therefore\ 0 = v_{yo} - g\ (1{,}5), \text{ ou } v_{yo} = 14{,}7 \text{ m/s}.$$

A altura alcançada pela bola pode ser determinada de $h = \frac{1}{2}\ gt^2$, ou da velocidade média vertical $\times$ tempo:

$$h = v_m t = \frac{14{,}7 + 0}{2} \times 1{,}5 = 11{,}0 \text{ metros}.$$

° ° °

Êste problema provàvelmente fornecerá questões adicionais para entusiastas de basebol (considerando que a bola seja de basebol); talvez você queira aproveitar o interêsse de alguns alunos, para calcular a velocidade inicial de lançamento. Para isso, devemos considerar uma certa distância horizontal. Um valor razoável pode ser 90 metros. Isto implica em uma velocidade inicial horizontal de $v_x = \frac{d}{t} = \frac{90}{3} =$ $= 30$ m/s. A velocidade total, v, é dada por

$$v^2 = v_{xo}^2 + v_{yo}^2 = 900 + 216$$

$$v = 33 \text{ m/s}.$$

Esta velocidade é grande para um lançamento de basebol; talvez seja possível para um jogador profissional, mas é demasiado grande para a maioria dos alunos.

PROBLEMA 16

Trace a trajetória de um objeto que é lançado no ar com velocidade de 10 m/s, a um ângulo de 45° com a horizontal.

(a) Que altura atingirá?
(b) Que distância alcançará (segundo a horizontal)?
(c) Com que velocidade atingirá o solo?

Êste problema de construção de trajetória é semelhante ao Problema 13. O cálculo dos valôres de x e y, ou melhor, as coordenadas horizontais e verticais do objeto podem ser agora obtidas de uma maneira mais elegante. Como as componentes horizontal e vertical da velocidade inicial são iguais a $\frac{10\sqrt{2}}{2} = 7{,}07$ m/s, a equação cinemática $d = v_i t + \frac{1}{2} at^2$ fornece x e y como funções de t:

$$x = 7{,}07t$$

$$y = 7{,}07t - 4{,}9t^2.$$

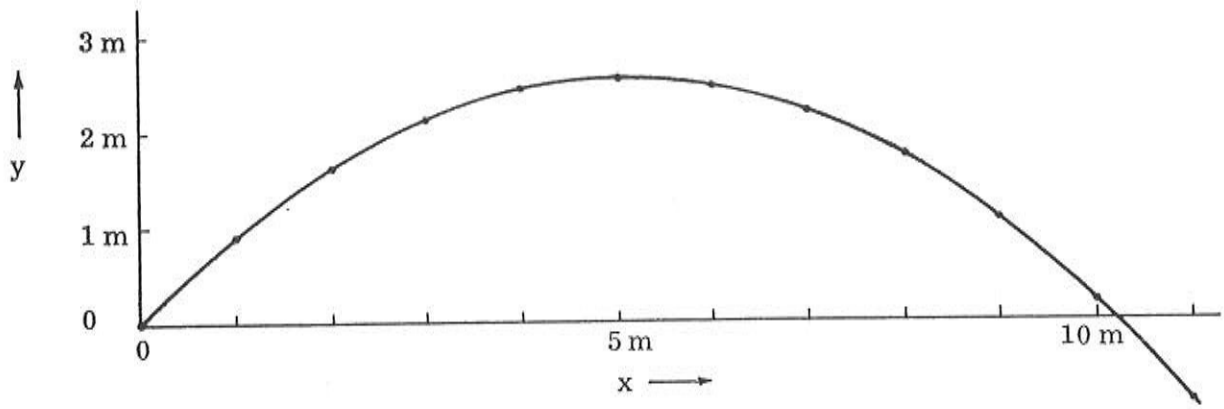
Poderíamos, como no Problema 13, calcular x e y, considerando vários valôres de t. É um pouco mais simples, entretanto, eliminar t das equações acima e obter uma equação relacionando x e y.

$$t = x/7{,}07$$

$$y = 7{,}07\,(x/7{,}07) - 4{,}9\,(x/7{,}07)^2 = x - 0{,}098\,x^2.$$

Agora, podemos construir y em função de x. A curva é uma parábola, e podemos calcular o seu traçado. A curva corta o eixo do x, tanto em $x = 0$, como em $x = 1/0{,}098 = 10{,}2$ m. O máximo valor de y está a meio caminho dêsses dois pontos, isto é, quando $x = 5{,}1$; neste ponto, $y = 2{,}55$ m. Em forma de tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	0,90	1,61	2,12	2,43	2,55	2,48	2,20	1,73	1,06	0,20	-0,86



a) $y_{max} = 2{,}55\,m$; veja a tabela.

b) $10{,}2\,m$; veja a tabela.

Os resultados de (a) e (b) podem ser obtidos por vários meios como, por exemplo, trabalhando com as equações originais envolvendo t. Por exemplo, $y = 0$ para $t = 0$ ou para $t = \frac{7{,}07}{4{,}9}$.

y_{max} corresponde a $t = \frac{7{,}07}{2\,(4{,}9)}$. A distância total $x = 7{,}07t = 7{,}07\left(\frac{7{,}07}{4{,}9}\right) = 10{,}2$ m.

c) Quando o objeto atinge o solo novamente, sua velocidade vertical é igual em módulo (mas oposta em direção) à velocidade vertical inicial; $v_{fy} = -7{,}07$ m/s. A velocidade na direção x é invariável; $v_x = 7{,}07$ m/s. O módulo da velocidade é, portanto, *10 m/s*, como antes. Isto pode ser observado pela simetria da trajetória que foi construída. Porém, lembre-se de que a velocidade é um vetor; embora o módulo da velocidade seja invariável, a direção é ↘ ao invés de ↗.

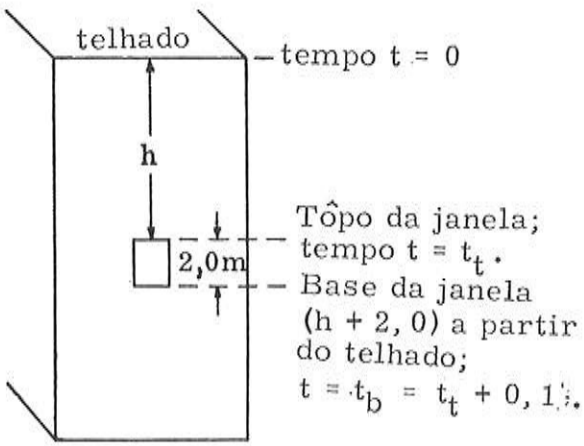
PROBLEMA 17

Uma pedra cai de cima de um telhado e gasta 0,10 s para percorrer o vão de uma

janela de 2,0 m de altura. Qual é a distância entre o telhado e o tôpo da janela?

A distância desconhecida, h, do tôpo da janela ao telhado, está relacionada com o tempo de queda, t_t, por:

$$h = \frac{1}{2} g t_t^2.$$



Da mesma forma, o tempo até a base da janela:

$$h + 2{,}0 = \frac{1}{2} g t_b^2 = \frac{1}{2} g (t_t + 0{,}1)^2.$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$2{,}0 = \frac{1}{2} g (t_t + 0{,}1)^2 - \frac{1}{2} g t_t^2$$

$$2{,}0 = \frac{1}{2} g (t_t^2 + 0{,}2\, t_t + 0{,}01) - \frac{1}{2} g t_t^2$$

$$4{,}0 = 0{,}2\, g t_t + 0{,}01\, g.$$

Mas $g = 9{,}8$:

$$4{,}0 - 0{,}098 = 1{,}96\, t_t$$

$$3{,}90 = 1{,}96\, t_t$$

$$t_t = 1{,}99 \text{ s}.$$

Êste valor de t_t pode ser usado para determinar h:

$$h = \frac{1}{2} g t_t^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times (1{,}99 \text{ s})^2 =$$

$$= 19{,}4 \text{ metros.}$$

Uma Alternativa. Determinar t_t, evitando as duas equações do segundo grau:

Considerando v_m o módulo da velocidade média da pedra, quando ela passa pela janela, temos:

$$v_m (t_b - t_t) = 2 \text{ m}.$$

$$v_m (0{,}1 \text{ s}) = 2 \text{ m}$$

$$v_m = 20 \text{ m/s}.$$

Mas $v_{top} = g t_t$; $v_{base} = g t_b = g(t_t + 0{,}1)$

$$v_m = 1/2 (v_{top} + v_{base}) = 1/2\, g\, (2t_t + 0{,}1)$$

$$v_m = g t_t + 0{,}05\, g$$

$$20 = 9{,}8 t_t + 0{,}49$$

$$9{,}8 t_t = 19{,}51$$

$$t_t = 1{,}99 \text{ s}.$$

Você pode também determinar h, sem empregar uma equação do segundo grau. Consideremos v_m a velocidade média durante a queda, através de h:

$$h = v_m t_t.$$

Mas $v_m = 1/2 (v_{telhado} + v_{top}) =$
$= 1/2 (0 + 9{,}8 t_t)$

$$v_m = 1/2\, (9{,}8)\, (1{,}99) = 9{,}75 \text{ m/s}.$$

Portanto, $h = v_m t_t = 9{,}75 \text{ m/s} \times 1{,}99 \text{ s} = 19{,}4$ metros.

° ° °

Outra Alternativa. (Aproximada).

Êste problema pode ser resolvido mais fàcilmente, com uma boa aproximação, do seguinte modo:

Quando a pedra está no vão da janela, v_m é:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{2{,}0 \text{ m}}{0{,}1 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}.$$

A pedra atinge, realmente, uma velocidade de 20 m/s no instante t_c, no ponto médio, entre t_t e t_b. Do instante em que ela caiu do telhado até

o instante em que alcançou a velocidade de 20 m/s, decorreu o tempo:

$$t_c = \frac{v}{g} = \frac{20 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = 2{,}04 \text{ segundos.}$$

Durante êsse tempo, a pedra teve uma velocidade média, $v_m = \frac{1}{2}(0 + 20 \text{ m/s})$.

Portanto, durante t_c, ela caiu uma distância h', dada por $h' = v_m t_c = 10 \text{ m/s} \times 2{,}04 \text{ s} = 20{,}4 \text{ m}$. Assim, o telhado está a 20,4 m acima da pedra, quando ela tem uma velocidade de $v = 20 \text{ m/s} = v_m$. Mas, como isto ocorre no instante médio entre o tôpo e a base da janela, a pedra está ligeiramente acima do centro da janela. Assim, o ponto médio da janela está cêrca de 20,4 m abaixo do telhado; portanto, o tôpo da janela está 19,4 metros abaixo do telhado.

Conseqüentemente, com o número de algarismos significativos que consideramos, esta aproximação fornece exatamente o mesmo resultado. A posição exata da pedra, no instante médio, é de sòmente 0,01 m acima do centro da janela!

PROBLEMA 18

Um garôto deixa cair uma pedra de uma escarpa de 49 m de altura e, um segundo mais tarde, lança uma segunda pedra. Ambas chegam ao solo ao mesmo tempo. Com que velocidade lançou êle a segunda? Despreze a resistência do ar.

Êste problema é um tanto mais difícil do que os problemas comuns de queda livre; os cálculos serão um pouco mais extensos do que os usuais.

Primeiramente, determine o tempo para a primeira pedra atingir o sol. De $d = \frac{1}{2} gt^2$,

$$t = \sqrt{2d/g} = \sqrt{\frac{2 \times 49 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{10} = 3{,}16 \text{ s}$$

(ou 3,2 s).

Como a segunda pedra foi lançada um segundo após a primeira, leva t = 2,16 segundos (ou 2,2 s) para cair 49 metros. Sua velocidade média é, portanto,

$$v_m = \frac{-4{,}9}{2{,}16} = -22{,}7 \text{ m/s.}$$

$$(\text{ou } v_m = \frac{-49}{2{,}2} = -22{,}3 \text{ m/s}).$$

$$\text{Mas, } v_m = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{v_i + (v_i + at)}{2} =$$

$$= v_i + \frac{1}{2} at.$$

Usando $t = 2{,}16$, e $v_m = -22{,}7$, $v_i = -22{,}7 + (4{,}9 \times 2{,}16) = -12{,}0 \text{ m/s.}$

(Usando $t = 2{,}2$, e $v_m = -22{,}3$, $v_i = -22{,}3 + (4{,}9 \times 2{,}2) = -11{,}5 \text{ m/s.}$)

Êste problema poderia também ser feito, determinando v_i em $d = v_i t + \frac{1}{2} at^2$, uma vez que t = 2,16 (ou 2,2) é conhecido. Os cálculos seriam, portanto:

$$v_i = \frac{d - 1/2at^2}{t} = \frac{-49 + 4{,}9 \times 2{,}16^2}{2{,}16} =$$

$$= -12{,}0 \text{ m/s.}$$

PROBLEMA 19

Mostre que a expressão v^2/R para a aceleração centrípeta tem unidades de aceleração.

Êste é um exercício de análise dimensional, relacionado ao movimento circular.

As grandezas fundamentais da velocidade são: comprimento/tempo; assim, as unidades de v^2/R são: $(\text{comprimento/tempo})^2 \times \frac{1}{\text{comprimento}} = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}^2}$, que são as mesmas unidades da aceleração.

* * *

Para situações mais complicadas, é interessante ter uma notação para o cálculo de dimensões. Comumente, indicamos a *dimensão* de uma grandeza, escrevendo-a entre colchêtes. As dimensões de tôdas as grandezas que conhecemos até aqui podem ser expressas em têrmos de comprimento, tempo e massa, que indicamos por L, T, e M. Portanto, $[v] = LT^{-1}$, de modo que

$$\left[\frac{v^2}{R}\right] = L^2T^{-2} \times L^{-1} = LT^{-2} = [\text{aceleração}].$$

A análise dimensional é extremamente útil para testar fórmulas deduzidas, a fim de certificar-se de que nenhum fator foi omitido. Você talvez queira ilustrar, considerando outros exemplos. Por exemplo, está a equação $d = v_i\, t + \frac{1}{2}\, at^2$ dimensionalmente correta?

PROBLEMA 20

O ponteiro dos minutos do relógio de uma tôrre tem 2,0 m de comprimento.

(a) A uma hora e um quarto qual a direção, o sentido e o módulo da velocidade da extremidade do ponteiro dos minutos?

(b) Qual é sua aceleração?

a) Para determinar a direção de $\vec{v}$, considere uma tangente ao círculo onde se move a extremidade do ponteiro dos minutos. A um quarto de hora, o sentido de $\vec{v}$ é *para baixo*.

O módulo de $\vec{v}$ pode ser determinado, considerando que a extremidade do ponteiro dos minutos percorre uma trajetória circular igual a $2\pi R$, em uma hora.

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 12{,}6 \text{ metros/h} =$$

$$= 12{,}6\ \frac{m}{h} \times \frac{1\,h}{3\,600\,s} = 3{,}5 \times 10^{-3} \text{ m/s}.$$

b) O vetor aceleração, no movimento circular uniforme, é sempre perpendicular ao vetor velocidade. Êle é sempre dirigido para o centro do círculo. Neste caso, está dirigido do número três para o nove, no relógio. Seu módulo é:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(3{,}5 \times 10^{-3}\ m/s)^2}{2\,m} = 6{,}1 \times 10^{-6}\ m/s^2.$$

PROBLEMA 21

(a) Qual é a aceleração centrípeta do martelo de um lançador de martelo, se o eixo de rotação está a 2,0 m do martelo e se êste leva 2/3 de segundo para dar uma volta?

(b) Se o martelo pesa 70 newtons, que fôrça deve o lançador exercer para manter essa aceleração centrípeta?

Êste problema é fácil, mas entusiasma alguns alunos, porque fornece números típicos para um esporte conhecido, mas pouco entendido. Possíveis extensões do problema são apresentadas.

a) Como o atleta gira uma vez em cada 2/3 do segundo, e a esfera do martelo percorre $2\pi R = 2\pi \times 2{,}0 = 4{,}0\pi$ metros por volta, a velocidade do martelo é:

$$v = \frac{4{,}0\pi}{2/3} = 6{,}0\pi \text{ m/s} \approx 19 \text{ m/s}.$$

Portanto, a aceleração é

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right) v = \frac{2\pi}{2/3}\,(6\pi) = (3\pi)$$
$$(6\pi) = 18\pi^2 = 1{,}8 \times 10^2\ m/s^2.$$

b) Para determinar a fôrça necessária para essa aceleração, devemos primeiramente achar a massa, m, a partir do pêso. Um martelo de 70 newtons corresponde a uma massa de 7 kg (7,14 kg mais precisamente). A fôrça centrípeta necessária é, portanto,

$$F = ma = 7 \times 1{,}8 \times 10^2 = 1{,}3 \times 10^3 \text{ nt}.$$

* * *

Uma Extensão Possível:

A. Que distância alcançará o martelo, se fôr abandonado a um ângulo de 45° com a horizontal?

A velocidade vertical inicial deve ser $v_{iy} = 6\pi \text{ sen } 45° = 6\pi \times 0{,}707 = 13{,}3$ m/s. O tempo para o martelo atingir o ponto mais alto é determinado por $v_y = v_{iy} - gt$.

$$t = \frac{v_{iy} - v_y}{g} = \frac{13{,}3}{9{,}8} = 1{,}35 \text{ segundos}.$$

O tempo total de vôo é, portanto, 2,70 segundos. A distância horizontal percorrida é, então, $d = v_{ix}t = 13{,}3 \text{ m/s} \times 2{,}7 \text{ s} = 45{,}9$ metros.

B. Os alunos talvez se interessem em saber o recorde mundial de lançamentos de martelo,

Com um martelo de 7,3 kg, o lançamento é de 70 metros. Para conseguir um lançamento de 70 metros, a velocidade inicial deve ser maior. A distância de lançamento é proporcional a v^2:

$v_{ix} = v_{iy} = 0{,}707v$, porque $\Theta = 45°$.

Para o movimento na direção de x, $x = 0{,}707\ vT$. T pode ser obtido a partir do movimento na direção de y, porque o martelo leva T/2 segundo para atingir o ponto mais alto (no qual $v_y = 0$).

Como $v_y = v_{iy} - gt$, $T = \dfrac{v_{iy} - v_y}{g} = \dfrac{0{,}707v}{9{,}8}$.

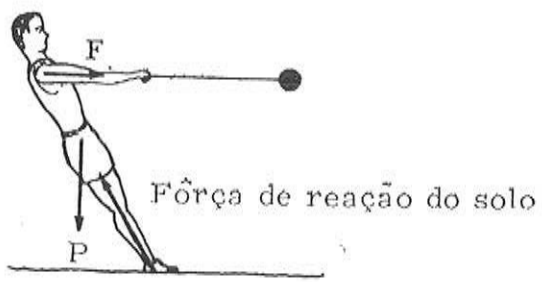
Como $T = \dfrac{t}{2}$, $T = \dfrac{0{,}707v}{4{,}9}$. Portanto,

$$x = 0{,}707v \times \frac{0{,}707v}{4{,}9} = \frac{v^2}{9{,}8}.$$

Se $x = 70$ m, $v^2 = 9{,}8\ m/s^2 \times 70$ m, ou $v = 26{,}2$ m/s. Se $R = 2$ metros, $a = \dfrac{v^2}{R} = 343\ m/s^2$. A fôrça centrípeta necessária para um martelo de 7,3 kg ser lançado a 70 m é:

$7{,}3\ kg \times 343\ m/s^2 = 2{,}5 \times 10^3$ nt.

C. Provàvelmente, você não quer discutir a posição do lançador de martelo, em classe. Porém, caso alguns alunos manifestem interêsse, a explicação seguinte pode lhe ser útil.



Em que posição o lançador abandona o martelo? O martelo deve ser abandonado, quando a *velocidade* está na direção adequada, isto é, quando o cabo do martelo e os braços do arremessador estão perpendiculares à direção desejada.

O martelo exerce uma fôrça horizontal sôbre o lançador. Por que êle não cai para a frente? De onde provém a fôrça contrária que atua horizontalmente?

A resposta está ilustrada na figura. O lançador inclina-se para trás, até que o momento da fôrça do martelo, em tôrno do centro de rotação (seus pés), seja equilibrado pelo momento do seu próprio pêso. Embora nesta altura os alunos não tenham um conceito formal de *momento*, o tratamento dêste assunto pode ser convincente, ainda que feito por meio de um esbôço.

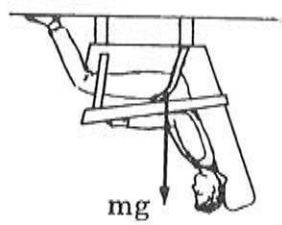
PROBLEMA 22

Qual deve ser a velocidade de um avião num "loop-the-loop" de raio 1,00 km para que o pilôto, no tôpo da curva, não sofra a ação de nenhuma fôrça, quer do assento, quer do cinto de segurança?

(Nestas circunstâncias, diz-se que o pilôto está "sem pêso").

Êste é um problema interessante, em que a aceleração centrípeta deve ser igualada ao pêso.

Como o pilôto não pode "interromper" a gravidade, mesmo que outras fôrças estejam atuando ou não, êle está sempre sujeito à fôrça da gravidade, mg. Ùnicamente sob a ação desta fôrça, resulta uma aceleração para baixo, como em queda livre, $a = -9{,}8\ m/s^2$. Se não há fôrça aparente do assento ou do cinto, opondo-se ao movimento do pilôto, êles devem também estar acelerados com $a = -9{,}8\ m/s^2$. Esta condição ocorreria, se o pilôto, o assento e o cinto estivessem caindo livremente. Isto também ocorre, quando os três estão em movimento numa trajetória circular com uma aceleração centrípeta de $9{,}8\ m/s^2$ para baixo.



A velocidade que fornece esta aceleração centrípeta pode ser determinada por $a = \dfrac{v^2}{R}$.

$v = \sqrt{aR} = \sqrt{9{,}8\ m/s^2 \times 10^3 m} = 99$ m/s.

Diz-se que o pilôto está sem pêso, porque não sente nenhum apoio para o seu pêso, tal como o normalmente fornecido pelo piso quando um homem está de pé.

A partir de $a = \frac{v^2}{R}$, podemos ver que um aumento na velocidade (e/ ou um decréscimo no raio) aumentará a aceleração. Conseqüentemente, se a velocidade do avião em "looping" de raio 1 km fôr maior do que 99 m/s, a aceleração centrípeta será maior do que 9,8 m/s², e o pilôto será empurrado para baixo pelo assento, quando estiver no tôpo do "looping". Uma velocidade menor resultará uma aceleração menor, e o pilôto ficará suspenso pelo assento.

PROBLEMA 23

Dizem que o pilôto de um avião a jato, quando efetua um mergulho violento, pesa várias vêzes o seu próprio pêso. Dizemos que o mesmo pilôto, em queda livre, antes de abrir o pára-quedas, não tem pêso.

(a) Têm sentido tais afirmações, quando consideramos a definição de pêso como a fôrça gravitacional sôbre o objeto?

(b) Que queremos dizer por "várias vêzes o seu próprio pêso" e "sem pêso"? Prepare-se para discutir essas questões em classe.

Êste problema, designado para uma discussão qualitativa, está relacionado aos cálculos quantitativos da aparente inexistência de pêso, no Problema 22, e com o aparente aumento extra de pêso, nos Problemas 24 e 25.

a) Se o pêso fôr considerado no seu sentido técnico como a fôrça da gravidade sôbre o objeto, afirmações referentes à falta de pêso ou ao aumento de pêso de um certo homem, em um campo gravitacional particular, não terão sentido. De outro modo, sim, significando que mg é 0 ou está aumentando, etc. O pêso de um objeto pode depender de sua posição (com referência à variação do campo gravitacional com a posição), mas êle não depende do movimento.

b) "Várias vêzes o seu próprio pêso" e "sem pêso" referem-se mais à fôrça de sustentação, do que meramente à parte da fôrça utilizada para se sobrepor à fôrça gravitacional. Por exemplo, considere um homem dentro de um elevador. Êle avalia seu próprio pêso pela fôrça para cima, exercida pelo piso do elevador; esta fôrça seria igual ao seu próprio pêso, se o elevador não estivesse acelerando. Essa fôrça pode ser avaliada pela pressão sob seus pés; poderia, também, ser medida por uma balança de mola, se o homem estivesse sôbre o prato da balança, no elevador.

Agora, considere o elevador acelerando para cima. O piso do elevador deve empurrar para cima o homem, a fim de acelerá-lo com uma fôrça maior do que a anterior. Esta fôrça é real e pode ser medida acuradamente por uma balança de molas ou por um homem, cujos pés percebam quantitivamente a pressão. Portanto, se o homem não perceber que está sendo acelerado, poderá pensar que seu pêso aumentou. Êste mesmo afeito ocorre quando um pilôto está completando um violento mergulho, ou quando um objeto oscila pendurado a um fio, como nos Problemas 24 e 25.

Se o elevador acelera para baixo, há uma fôrça menor para cima exercida pelo elevador. (Naturalmente, a fôrça da gravidade é sempre a mesma, mas aqui, não é medida diretamente, a fôrça resultante é aquela que é avaliada pela balança ou sentida sob os pés). Se o elevador acelera para baixo a 9,8 m/s², não há fôrça para cima exercida pelo elevador, e o homem não sente pressão alguma. Êste efeito pode também ser obtido no tôpo da trajetória circular, como no Problema 22.

Em resumo, a variação aparente no pêso é devido a variações na fôrça de sustentação. A variação real do pêso será avaliada pela fôrça de sustentação, sòmente se não houver aceleração.

PROBLEMA 24

A massa de um pêndulo é 0,40 kg e sua velocidade na parte mais baixa da trajetória é 0,70 m/s. O comprimento do pêndulo é 1,0 m. Qual é a tensão no cordão, no ponto mais baixo da trajetória?

Êste problema requer o cálculo da fôrça necessária para produzir uma certa aceleração centrípeta.

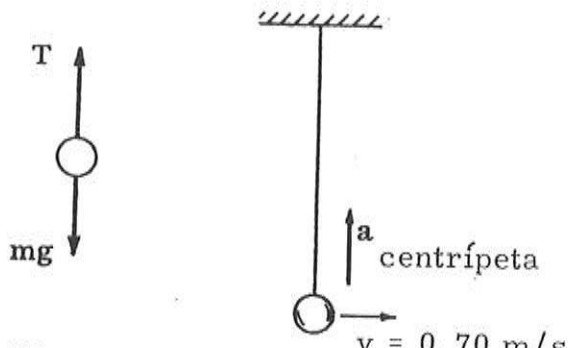


Diagrama das fôrças

Situação física

Sabemos que $\vec{F} = m\vec{a}$ onde $\vec{F}$ é a fôrça resultante. Nesse caso, $F = T - mg = T - 3{,}9$ nt.

A aceleração centrípeta é:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(0{,}70\ m/s)^2}{1{,}0\ m} = 0{,}49\ m/s^2.$$

Substituindo em $\vec{F} = m\vec{a}$,

$$(T - 3{,}9)\ nt = 0{,}4\ kg\ (0{,}49\ m/s^2)$$

$$T = 3{,}9\ nt + 0{,}2\ nt$$

$$T = 4{,}1\ nt.$$

PROBLEMA 25

Um cordão de 5,0 m de comprimento e 2,0 mm de diâmetro mantém uma bola dependurada, mas está em ponto de arrebentar.

(a) Se fizermos a bola oscilar, o cordão arrebentará. Por que?

(b) Qual deveria ser o diâmetro de um cordão feito do mesmo material para que fôsse capaz de manter a bola oscilando, de modo que ela tivesse a velocidade de 7,0 m/s no ponto mais baixo da trajetória, sem arrebentar o fio?

Êste problema diz respeito à fôrça resultante necessária para produzir aceleração centrípeta. Êle é semelhante ao Problema 24. Se a classe fêz o Problema 24, resolverá fàcilmente a parte (a) dêste problema. A parte (b) refere-se à resistência de materiais, discutida no Capítulo 4, Seção 4, sôbre escalas.

a) O cordão arrebentará, porque haverá uma fôrça além do pêso, para cima, a fim de produzir a aceleração (centrípeta).

b) A tensão pedida é dada por:

$$F = ma,$$

$T - mg = ma$, e $T = mg + ma = m\,(g + a)$.

Podemos determinar $\vec{a}$ a partir de v e R:

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(7{,}0)^2}{5} = \frac{49}{5} = 9{,}8\ m/s^2.$$

Como $T = m\,(g + a)$, e nesse caso, $g = a$, $T = 2\ mg$.

Portanto, a tensão no fio para o pêndulo em oscilação deve ser duas vêzes mais intensa do que quando em repouso. O cordão para o pêndulo oscilante deve ser duas vêzes mais resistente.

A fim de fornecer o dôbro da resistência, o cordão deve ter uma área de secção duas vêzes maior (veja Capítulo 4, página 64).

$$A_1 = 2A_2, \text{ ou } \frac{\pi d_1^2}{4} = 2 \times \frac{\pi d_2^2}{4}, \text{ ou } d_1^2 = 2 \times d_2^2.$$

$$d_1 = \sqrt{2} \times d_2 = \sqrt{2} \times 2{,}0\ mm = 2{,}8\ mm.$$

PROBLEMA 26

Um elétron (massa $0{,}90 \times 10^{-30}$kg), sob a ação de uma fôrça magnética, percorre uma circunferência de 2,0 cm de raio com a velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s. Com que velocidade se moveria um próton (massa $1{,}6 \times 10^{-27}$kg) segundo a mesma circunferência, se atuasse sôbre êle a mesma fôrça?

Foram dados a massa, o módulo da velocidade e o raio da trajetória de um elétron movendo-se em um círculo. Dêsses dados, podemos calcular a fôrça centrípeta necessária para produzir êste movimento. Em seguida, foi dada a massa do próton, pedindo-se para determinar sua veloci-

dade, quando se move em um círculo de mesmo raio, sob a ação de uma mesma fôrça.

A partir de $F = \frac{mv^2}{R}$, podemos calcular a fôrça centrípeta sôbre o elétron. Então, conhecendo essa fôrça e a massa do próton, podemos determinar a velocidade do próton, quando percorre o mesmo círculo percorrido pelo elétron.

Entretanto, o desenvolvimento pormenorizado do cálculo não é necessário:

Para o elétron, $F_e = \frac{m_e v_e^2}{R}$. Para o próton, $F_p = \frac{m_p v_p^2}{R}$.

Temos que $F_e = F_p$. Portanto, $\frac{m_e v_e^2}{R} = \frac{m_p v_p^2}{R}$, ou $m_e v_e^2 = m_p v_p^2$, e $v_p^2 = \frac{m_e v_e^2}{m_p}$.

$$v_p^2 = \frac{m_e v_e^2}{m_p} = \frac{0{,}90 \times 10^{-30}}{1{,}6 \times 10^{-27}} (3{,}0 \times 10^6)^2 =$$

$$\frac{9{,}0}{1{,}6} \times 10^{-4} \times (3{,}0 \times 10^6)^2.$$

$$v_p = \frac{3{,}0}{1{,}26} \times 10^{-2} \times 3{,}0 \times 10^6 = 7{,}1 \times 10^4 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 27

Um corpo dotado de velocidade v fica sujeito a uma fôrça sempre perpendicular a v, mas que aumenta de intensidade regularmente.

(a) Faça um esquema da trajetória do corpo.

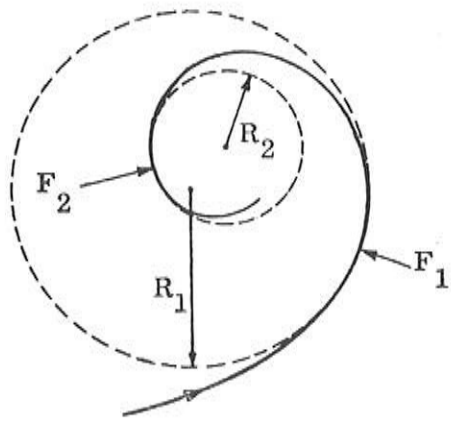
(b) O módulo da velocidade do objeto aumenta, diminui, ou permanece invariável?

Êste problema sôbre o movimento circular deve ser estudado qualitativamente. Um tratamento quantitativo está além do nível dos alunos do colégio.

a) Sabemos que, se a fôrça fôsse *constante* e perpendicular ao vetor velocidade, sòmente a direção de v variaria, fazendo o corpo percorrer um círculo. Se considerarmos o que acontece com uma fôrça aumentando constantemente, podemos dizer que, *durante um pequeno intervalo de tempo*, a fôrça perpendicular é aproximadamente constante e igual a, digamos, F_1; assim, a trajetória, durante êsse intervalo de tempo é, aproximadamente, parte de um círculo de raio R_1, onde $F_1 = \frac{mv^2}{R_1}$.

Em qualquer instante depois, o mesmo argumento pode ser usado a respeito de um segmento da trajetória, exceto que, agora, a fôrça é maior (digamos, F_2); assim, a trajetória nesse instante posterior é, aproximadamente, parte de um círculo de raio R_2, onde $F_2 = \frac{mv^2}{R_2}$.

Como F_2 é maior do que F_1, R_2 será menor do que R_1. Em terminologia matemática, pode-se dizer que o *raio de curvatura* da trajetória está diminuindo com o tempo. Na figura, traçamos a curva e também alguns círculos aos quais o trajeto pertence em diferentes instantes.



velocidade v de *módulo* constante

A solução exata dêste movimento mostra que o trajeto da partícula, para uma fôrça que aumenta linearmente com o tempo, é a "Espiral de Cornu", que é citado em óptica. A solução correta é muito complicada para ser tentada com alunos do colégio; assim, não estimule os alunos a irem além da descrição das características qualitativas do movimento.

b) A fôrça que atua sôbre o corpo é sempre perpendicular à velocidade. Portanto, a aceleração produzida por esta fôrça é também

perpendicular à velocidade em todos os pontos. Em consequência disso, o módulo da velocidade *não varia,* mas a sua direção varia.

PROBLEMA 28

Como trabalho para casa, realize a experiência indicada na Fig. 21-14. Você poderá usar um pêndulo, em vez de um objeto prêso à extremidade de uma mola. Faça seu próprio pêndulo. Se o período do pêndulo não combinar com o período da vitrola, que deve você fazer?

Se o período do prato do fonógrafo e do pêndulo não combinarem, o comprimento do pêndulo poderá ser aumentado ou diminuído, variando o seu período de modo a combinar com o período do prato. Certas vitrolas modernas têm um contrôle para variar a velocidade contìnuamente. [O período de oscilação do pêndulo é: $T = 2\pi\ (l/g)^{1/2}$.]

PROBLEMA 29

Uma mola cuja constante de fôrça vale $k = 196$ newtons/metro está dependurada verticalmente com sua extremidade inferior no ponto $y = 0$. Dependura-se a ela um objeto de massa 2,00 kg.

(a) Faça um gráfico da fôrça resultante sôbre a mola como função da coordenada y, desde $y = -0{,}250$ m até $y = +\ 0{,}250$ m.

(b) De que posição, no eixo y, deverá a massa ser abandonada para que permaneça em repouso?

(c) Suponha que a massa seja abandonada do repouso, na posição $y = 0$. Descreva seu movimento subseqüente. Que distância percorerá ela até ficar de nôvo momentâneamente em repouso? Quanto tempo transcorrerá até que isto aconteça?

Êste problema e o Problema 30 tratam de molas em posição vertical, executando movimento harmônico simples. Qualquer um dêsses problemas é adequado para ser discutido em classe. Se desejar, poderá mesmo utilizar um problema mais simples da oscilação horizontal de uma massa, sob a ação de uma mola, para uma discussão preliminar.

a) A fôrça resultante sôbre a massa é o vetor soma da fôrça variável devido à mola e ao pêso constante = — 19,6 nt (onde o sinal negativo indica que o sentido é para baixo). A fim de construir o gráfico da fôrça resultante, faça uma tabela da fôrça da mola e da fôrça resultante, como a que se segue:

y	(m)	— 0,25	— 0,20	— 0,15	— 0,10	+0,05	0	+ 0,05	+ 0,10	+ 0,15	+ 0,20	+ 0,25
F_{mola}	(nt)	+ 49,0	+39,2	+29,4	+19,6	+9,8	0	— 9,8	—19,6	—29,4	—39,2	—49,0
$F_{resultante}$	(nt)	+ 29,4	+19,6	+ 9,8	0,0	−9,8	—19,6	—29,4	—39,2	—49,0	—58,8	68,6

Uma outra alternativa é escrever a equação para a fôrça resultante, $F_{resultante}$:

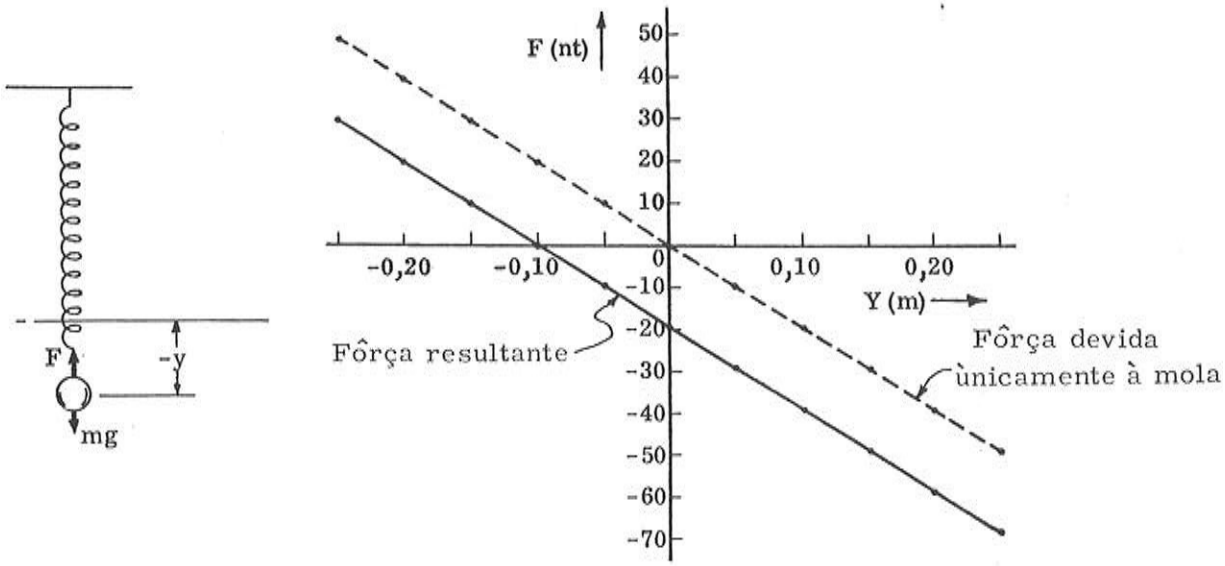
$$F_{resultante} = F_{mola} + \text{pêso} = -ky - mg.$$

Esta equação é linear; portanto, determina-se $F_{resultante}$ para os dois extremos, $y = -0{,}25$ e $y = +\ 0{,}25$, e em seguida emprega-se, uma régua para obter a reta. Então, pode-se obter o gráfico.

Nota: Como $F = kx$ é evidentemente uma reta, sòmente dois pontos da tabela foram necessários.

b) A massa permanecerá em repouso, sòmente quando $F_{resultante} = 0$. Observando o gráfico, constatamos que isso ocorre quando $y = -0{,}10$ *metros*, isto é, 0,1 m abaixo da sua posição inicial de repouso. [Analìticamente, $F_{resultante} = -mg - ky = -19{,}6 - 196\ y = 0$. Portanto, $y = -\ 0{,}1$].

c) Quando $y = 0$, a massa está sujeita à ação de uma fôrça resultante dirigida para baixo, de 19,6 nt; portanto, a massa de 2,00 kg possui uma aceleração de 9,8 m/s². (Isto é exatamente como em queda livre, porque para $y = 0$, a mola não exerce fôrça). A massa oscilará simètricamente em tôrno do ponto onde a



fôrça resultante é zero, isto é, em tôrno de $y = -0{,}10$. A massa mover-se-á de $y = 0$ a $y = -0{,}20$ m, a uma distância de *0,2 metros*. Ao mover-se de $y = 0$ para $y = -0{,}20$ m, a massa percorre meio ciclo. O tempo para realizar um ciclo completo, o período T, é

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \times 3{,}14 \left(\frac{2{,}00}{196}\right)^{1/2} =$$

$= 0{,}634$ s.

O tempo gasto para atingir o ponto mais baixo é metade dêsse valor, isto é, 0,317 s.

PROBLEMA 30

Um objeto de massa m repousa sôbre uma plataforma horizontal. Comunica-se à plataforma um movimento harmônico simples vertical, de amplitude 0,098 m. No ponto mais alto da trajetória, o objeto está apenas tocando a plataforma sem chegar a se apoiar nela. (Isto significa que, nesse ponto, a aceleração da plataforma é 9,8 m/s² para baixo).

(a) Qual é o período do movimento harmônico simples?

(b) Qual é a aceleração do objeto no ponto mais baixo da trajetória?

(c) Qual é a fôrça exercida pela plataforma sôbre o objeto, nesse ponto?

Como o objeto acompanha a plataforma no seu movimento, êle também executa um movimento harmônico simples, o que significa que a equação para a fôrça resultante sôbre o objeto deve ser:

$$F_{resultante} - ma = ky,$$

onde y é medido a partir do ponto médio do movimento.

a) O período do movimento é $T = 2\pi \sqrt{m/k}$. Como determinar k? Se conhecemos o valor de F para um dado valor de y, podemos calcular k. Uma informação exatamente essencial para isso é dada no problema: afirmou-se que no ponto mais alto da trajetória, (insto é, quando $y = R$; amplitude de oscilação) o objeto deixa de apoiar-se na plataforma. Logo, nesse ponto, o objeto não está em contato com a plataforma, e a única fôrça que atua sôbre êle é o seu próprio pêso, mg. Portanto,

$$kR = mg, \text{ e } k = \frac{mg}{R}.$$

O período T é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2 \times 3{,}14 \left(\frac{0{,}098}{9{,}80}\right)^{1/2} = 0{,}628$ s.

b) No tôpo da trajetória, a fôrça sôbre o corpo é mg dirigida para baixo; assim, na parte mais baixa, a fôrça deve ser mg para cima, e a aceleração g está *dirigida para cima.*

c) No ponto mais baixo, a fôrça resultante sôbre o objeto é mg para baixo. Esta é a resultante do seu pêso mg para baixo e da fôrca exercida pela plataforma sôbre êle. Portanto, nesse ponto, a fôrça deve ser 2 *mg para cima.*

PROBLEMA 31

(a) Qual é o período de um pêndulo constituído por um pequeno objeto de massa 2,0 kg, suspenso por uma corda de comprimento 2,4 m, se $g = 9{,}8$ newtons/kg?

(b) Observe que podemos usar um pêndulo para determinar *g*. Se o período dêsse pêndulo fôr 3,0 s, qual é o valor de *g*?

Êste problema ilustra como um pêndulo pode ser empregado para medir g, acuradamente.

a) O período, T, para um pêndulo simples é dado pela equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \times 3{,}14 \left(\frac{2{,}4}{9{,}8}\right)^{1/2} = 6{,}28 \times 0{,}495 = 3{,}1 \text{ s.}$$

b) Se *l* fôr ainda 2,4 m, mas T tornar-se 3,0 s ao invés de 3,1 s, qual será o valor de g? A relação acima fornece:

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{l}{g}, \text{ e } g = l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 2{,}4\left(\frac{6{,}28}{3{,}00}\right)^2 = 10{,}5 \text{ nt/kg.}$$

Certifique de que os alunos compreendem como é fácil achar essa diferença. Se as oscilações do pêndulo fôssem contadas durante seis minutos, por exemplo, seriam 116 oscilações para a parte a) e 120 oscilações para a parte b). É fácil montar um pêndulo simples para demonstração em aula. Valôres acurados do período podem ser obtidos, cronometrando um grande número de oscilações. Você pode verificar que o período v aria com $\sqrt{l}$, e obter também uma precisão surpreendente para o valor de g.

A fórmula que empregamos foi deduzida sob a suposição de que o ângulo de oscilação fôsse "pequeno". Se o ângulo de oscilação fôr menor do que 30°, o êrro não será apreciável.

PROBLEMA 32

Enquanto um ônibus se movimenta sôbre uma estrada retilínea e horizontal, fazemos uma bola de gude rolar sôbre o assoalho do ônibus, transversalmente ao veículo. A trajetória da bola é retilínea em relação ao ônibus. Depois, fazemos a bola rolar de nôvo, mas, desta vez, a trajetória é uma parábola cuja concavidade está voltada para a frente do ônibus. Descreva o movimento do ônibus, em cada caso. Prepare-se para discuti-lo em classe.

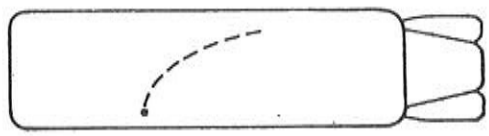
Êste é um problema envolvendo o movimento relativo e o efeito de um sistema de referência em movimento uniforme ou acelerando.

Na resolução dêste problema, devemos considerar (idealizar) que a bolinha não está sujeita à qualquer fôrça oriunda do ônibus. Portanto, enquanto está rolando, a bolinha deve mover-se em linha reta, *relativamente a um sistema inercial tal como o das estrêlas fixas.* A bolinha pode, evidentemente, ter uma velocidade inicial, mas esta não pode variar.

Quando a bolinha se movimenta em linha reta relativamente ao ônibus, um observador no ônibus não vê a bolinha acelerar-se; assim, êle conclui que não há fôrças atuantes sôbre a bolinha. Já observamos que se o sistema fôsse inercial, não haveria fôrça atuando sôbre a bolinha; logo, nesse caso, o ônibus deve ser um sistema inercial, isto é, está se movendo a uma velocidade constante (ou está em repouso).

Quando a bolinha descreve uma parábola com a concavidade voltada para frente, o observador no ônibus vê uma aparente aceleração constante, $\vec{a}$, (relativa ao ônibus) para a frente do ônibus. Êle conclui que uma fôrça $F = ma$ puxa a bolinha para a frente.

Entretanto, *sabemos* que, num sistema inercial, não há fôrça atuando sôbre a bolinha. Por esta razão, podemos concluir que, ao invés da bolinha estar sendo acelerada para a frente, o ônibus deve estar sendo acelerado para trás, em relação a um sistema inercial.



Esta é uma desaceleração e deve ter o valor $\vec{a}$, deduzido pelo passageiro. A fôrça que o passageiro percebe é a que denominamos fôrça fictícia. Num sistema não inercial, esta fôrça deve ser considerada, a fim de explicar o movimento observado; todavia, num sistema inercial, tal fôrça não existe.

CAPÍTULO 22

A GRAVITAÇÃO UNIVERSAL E O SISTEMA SOLAR

FINALIDADE. Introduzir a lei de Newton, da gravitação universal, no seu contexto histórico e apresentar uma descrição do contínuo esfôrço do homem, para compreender o funcionamento do universo.

RESUMO DO CAPÍTULO

O Capítulo 22 apresenta uma descrição histórica dos esforços feitos para se obter um modêlo cinemático e dinâmico do sistema solar, culminando com a lei da gravitação universal.

As Seções de 1 a 5 apresentam um pouco da história de séculos de especulações sôbre a natureza do sistema solar, começando com as idéias dos antigos gregos. Estas seções discutem com brevidade como Kepler se fundamentou no trabalho de Copérnico e Brahe, até chegar a uma descrição cinemática simples, mas satisfatòriamente precisa.

Seção 6. Do ponto de vista da cinemática, a escolha do sistema de referência é arbitrária. Contudo, quando são levadas em consideração as condições dinâmicas, um sistema de referência pode se tornar sumamente favorável, como uma necessidade lógica.

As Seções de 7 a 11 discutem algumas das muitas contribuições de Newton, evidenciando a origem e o uso de sua lei da gravitação universal. No término das seções, há um esclarecimento de que mesmo esta lei de grande aplicação tem suas limitações e não explica, precisamente, tôdas as observações.

ÊNFASE. Os Capítulos 20, 21 e 22 formam uma unidade natural, na qual as idéias dos Capítulos 20 e 21 são conduzidas à dinâmica planetária e gravitação universal, no Capítulo 22. Assim, o Capítulo 22, além de introduzir um nôvo assunto, propicia uma revisão substancial do trabalho anterior. Se o tempo fôr limitado, o Capítulo 22 pode ser dado livremente, como leitura, com um mínimo de discussão em classe e resolução de problemas, sem quebra de continuidade no desenvolvimento do assunto do livro.

Todavia, um exame excessivamente rápido dêste capítulo omitirá algumas das partes mais excitantes da Física. Um estudo de ciência não pode divorciar-se completamente do estudo da história da ciência, nem pode uma apreciação das contribuições dos grandes homens de ciência ser completada, sem o conhecimento dos fatos da ciência. O entusiasmo do cientista profissional pelo seu trabalho pode ser delineado, em parte, de sua apreciação do fato de ser êle membro de uma equipe — equipe que começou há muitos séculos passados e continuará indefinidamente. Exatamente como as figuras históricas foram capazes de contribuir para a compreensão dos problemas que preocupavam a todos, assim também procede o cientista moderno, seguindo seus próprios sucessos e fracassos, à espera de contribuir para o esclarecimento dos problemas de interêsse contemporâneo. A física moderna resulta dos trabalhos de homens como Galileu e Newton. A mecânica, vista do meio ambiente científico de seus grandes inovadores, pode ser vital e emocionante. Felizmente, é com esta atitude que seus alunos podem estudar o presente capítulo. Se seus alunos dispuserem de tempo, uma pequena leitura complementar, nesta altura, contribuirá enormemente para que adquiram não sòmente noções dos princípios científicos,

mas da natureza humana da ciência e da tremenda realização intelectual de homens como Newton, Kepler e Galileu. Além disso, a física planetária não é uma matéria simplesmente de interêsse histórico. Uma noção realista dos problemas de viagem espacial sòmente é possível através da compreensão da dinâmica envolvida. Neste curso retornaremos a estas idéias. no modêlo do átomo, de Rutherford.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 22

A tabela a seguir sugere possíveis planejamentos para êste capítulo, de acôrdo com o planejamento geral da seção introdutória para a Parte III. As seções que estão entre colchêtes podem ser tratadas com menor atenção, ou omitidas em discussão de classe, sem haver quebra de continuidade.

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp
Secs. [1], [2], [3], [4], 5	1	0	-	$\frac{1}{2}$	0	-
Sec. 6	1	1	III-7	$\frac{1}{2}$	0	-
Secs. 7, 8, 9, 10, [11]	3	0	-	2	0	-

MATERIAL SUPLEMENTAR PARA O CAPÍTULO 22

Laboratório. A Experiência III-7, *Lei das Áreas Iguais,* utiliza um pêndulo simples que derrama areia, enquanto se move descrevendo uma elipse, a fim de investigar a lei das áreas iguais em tempos iguais. O cone de areia não só assinala uma elipse, mas serve também como um dispositivo para marcar o tempo. A massa depositada em um dado arco é proporcional ao tempo necessário para o pêndulo descrever êsse arco. É conveniente realizar esta experiência, aproximadamente, no meio do Capítulo 22. Veja sugestões nas Notas de Laboratório.

Casa, Classe e Laboratório. A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com o nível avaliado das dificuldades de cada um dêles e as seções a que se referem. Aquêles que são especialmente adequados para discussões em classe e projetos para casa são indicados. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas para todos os problemas são dadas nas páginas do CCL.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe	Projetos para casa
1-4		3*, 4*		3*, 4*	1, 2
5	5, 6	7		5, 7	
6		8*		8*	
7		9*			
8	10*, 14, 15 16*, 17*	11*, 12* 18*	13	10*, 11*, 12*, 13	
geral	19*	20*, 21, 22	23*	19*, 20*, 21, 22, 23*	

Filmes. "Solar System Kinematics" está em preparação.

"Universal Gravitation", por J. N. P. Hume e D. G. Ivey, da Universidade de Toronto reconstrói os fundamentos da lei da gravitação universal, pela imaginação de como a lei poderia ser descoberta num "Planêta X", em um outro sistema solar de um único planêta. O filme mostra como o sistema de referência adotado afeta a descrição cinemática. Observações das órbitas dos satélites artificiais possibilitam determinar a lei do inverso do quadrado da fôrça, a constância de R^3/T^2 e, provàvelmente, chegam à própria descrição cinemática do sistema solar do "Planêta X" e à lei da gravitação universal. Êste filme está bem relacionado às Seções 6, 7 e 8.

"Elliptic Orbits", por A. V. Baez. Iniciando com uma órbita elíptica e a lei das áreas de Kepler, demonstra que a fôrça gravitacional obedece à relação do inverso do quadrado. A dedução é pràticamente geométrica. Êste filme pode ser utilizado juntamente com a discussão das Seções 7 e 8. Tempo de projeção: 18 minutos.

Leitura Complementar. Além das referências no fim do Capítulo 22, os livros citados abaixo, da Série de Estudos de Ciência, deverão interessar aos alunos:

- *Nascimento de uma Nova Física,* por I. Bernard Cohen.
- *O Universo Como um Todo,* por Herman Bondi.

"*The Watershed*", por Arthur Koestler.

Outros títulos relacionados à Parte III do curso serão publicados nesta série.

Seção 1 — Sistemas Planetários Primitivos

Seção 2 — Sistema Planetário de Copérnico

Seção 3 — Objeções à Teoria de Copérnico

Seção 4 — Tycho Brahe

FINALIDADE. Apresentar a base histórica que antecedeu os trabalhos de Kepler e Newton.

ÊNFASE. Êste assunto pode ser dado, pràticamente, como leitura. Não é necessário demorar-se nos modelos geocêntricos, mas deve ser realçado como diferentes sistemas de referência conduzem a diferentes interpretações.

FILME. Se "Frames of Reference" não foi projetado anteriormente, pode ser empregado com o material destas seções.

COMENTÁRIOS. É impossível divorciar uma discussão da ciência moderna de sua origem histórica. O pensamento contemporâneo está condicionado às questões levantadas pelos antigos gregos, tanto quanto ao trabalho dêste século. Ainda que algumas das questões propostas pelos antigos, observadas através da teoria moderna, possam parecer humorìsticamente erradas, nenhum cientista pode deixar de maravilhar-se com a enorme percepção evidenciada nessas questões e que o conhecimento atual disso originou-se e foi mantido constantemente, ao invés de estagnar-se por quase dois mil anos.

A deficiência, no estudo da astronomia adotada pelos gregos, era a sua confiança na intuição mais do que na observação direta, em sua procura de modelos racionais. Um exemplo foi a insistência no uso de órbitas circulares para o movimento celestial, simplesmente porque o círculo era considerado "perfeito". Ninguém se preocupou em estudar os movimentos com suficientes detalhes, como fêz Brahe séculos mais tarde, para demonstrar que o movimento não era perfeitamente circular. Devido à forte confiança dos gregos na intuição, era difícil separar a antiga ciência de sua filosofia contemporânea. Mesmo atualmente, as questões filosóficas básicas, com freqüência, tanto embaraçam os cientistas quanto as observações diretas, para as quais não há uma explicação imediata.

A noção de um universo, formado de corpos movendo-se em órbitas "perfeitamente circulares", não teve origem em Platão. Estas idéias remontam, no mínimo, a época da escola Pitagórica (580 a 500 A.C.), mais de um século antes de Platão. Pelo menos, dois membros da escola Pitagórica, Hicetas e Ecphantus propuseram um modêlo aproximado ao qual, geralmente, denominamos sistema solar coperniano, com a Terra executando uma rotação diária em tôrno de seu eixo e uma esfera imóvel de estrêlas fixas. Entretanto, neste modêlo considerava-

[oc] Traduzidos para o Português.

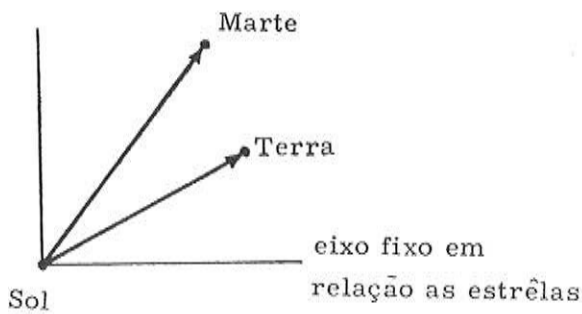
-se que o Sol e a Lua descreviam órbitas circulares em tôrno da Terra. Platão acreditava firmemente que a Terra permanecia imóvel, mas mesmo nessa época, Heráclides ensinava que a Terra girava em seu eixo uma vez por dia e, ainda, sugeria que Venus e Mercúrio se moviam em órbitas circulares em tôrno do Sol, enquanto o Sol revolvia em tôrno da Terra. O reconhecimento do modêlo "Coperniano" foi, talvez, primeiramente formulado por Aristarchus de Samos (310 a 230 A.C) que, com êste propósito, publicou a seguinte hipótese: "As estrêlas fixas e o Sol permanecem imóveis, enquanto a Terra se move em tôrno do Sol, descrevendo uma órbita circular, e o Sol permanece no centro da órbita. Indubitàvelmente, a sugestão básica para o sistema Ptolemaico originou-se do trabalho do grande astrônomo Hipparchus, que morreu por volta de 125 A.C. Hipparchus, contràriamente a muitos de seus predecessores e sucessores, foi um grande observador e fêz muitas medidas cuidadosas do movimento celeste. Observou pequenas variações no plano da eclíptica*, devido à precessão do eixo da Terra, fêz uma representação que concorda dentro de um por cento com os valôres modernamente aceitos. Êste movimento é tão pequeno e lento, que leva 26 000 anos para um ciclo completo.

O patrimônio da ciência grega foi enriquecido pelos árabes, após sua conquista da cidade egípcia de Alexandria, que se tornou o principal centro do conhecimento grego no terceiro século A.C. Durante a idade média, o sistema ptolemaico retornou à Europa, levado pelos árabes e acrescido de catálogos de estrêlas, compilados pelos astrônomos árabes.

Como assinalamos no Capítulo 3, a paralaxe deve ser perceptível quando se observa um sistema qualquer, de um outro que possui um movimento relativo. Copérnico estava preocupado a respeito do fato de que êle não podia observar a paralaxe estelar; no seu entender, a esfera das estrêlas fixas estava próxima à Terra. Êle não tinha, realmente, noção das enormes distâncias envolvidas e do fato de ser a paralaxe estelar pequena demais para ser medida por métodos simples. Sòmente no ano de 1838 a paralaxe estelar foi observada, primeiramente, pelo astrônomo germânico F.W.Bessel. Relembrando que o maior ângulo de paralaxe já observado é 0,756 segundos de arco (para a estrêla mais próxima, Alfa do Centauro) fàcilmente justifica-se por que o efeito foi ignorado por tanto tempo. A noção correta da enorme distância entre as estrêlas e a Terra foi provàvelmente proposta, de início, por Giordano Bruno no século XV. (Veja Figura 3-5).

* * *

A descrição do movimento planetário e a equivalência das diferentes descrições (geocêntricas, heliocêntricas, etc) são grandemente auxiliadas pelo uso de vetores. A figura abaixo mostra os raios vetores o Sol à Terra e do Sol a Marte. Os eixos são fixos, relativamente às estrêlas.



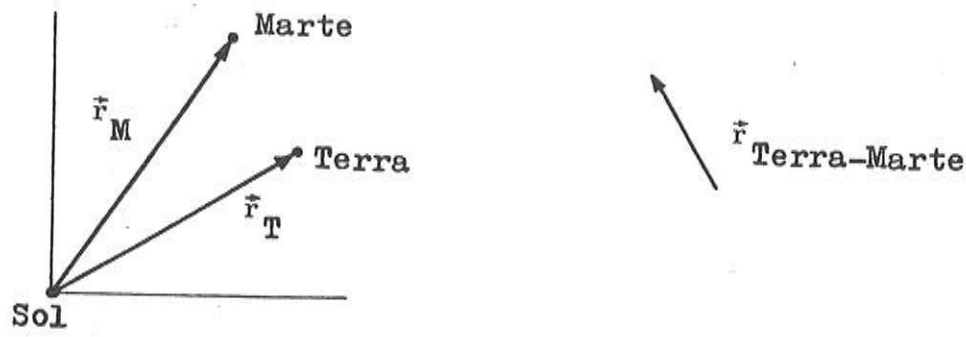
É uma boa aproximação dizer que os planêtas se movem em círculos ao redor do Sol, com velocidades de módulos constantes (mas diferentes entre si). Então, em nosso diagrama, os dois raios vetores do Sol, $\vec{r}_T$ para a Terra $\vec{r}_M$ para Marte, giram simplesmente em tôrno do Sol, sem variar o comprimento. Êste é o ponto de vista de Copérnico.

Para localizar um planêta tal como Marte, relativamente à Terra, simplesmente observamos que

$$\vec{r}_M = \vec{r}_T + \vec{r}_{\text{Terra-Marte}}; \text{ ou } \vec{r}_{\text{Terra-Marte}} = \vec{r}_M - \vec{r}_T.$$

O vetor $\vec{r}_{\text{Terra-Marte}}$ varia com o movimento dos dois planêtas, como se Terra e Marte estivessem cada um, ligados a uma mesa giratória, com o Sol no centro de articulação das mesas. Tal modêlo mecânico poderia ser feito, fàcilmente, com duas réguas e um prego. Observe que o vetor do Sol à Terra deve realizar uma revolução em um ano, relativamente ao sistema

* O plano da eclíptica é o plano da órbita da Terra.



de referência, e que o vetor Sol a Marte deve realizar uma revolução em um ano marciano (687 dias).

° ° °

No que se refere ao trabalho de Copérnico, é importante observar que, sendo anterior a Brahe, não continha realmente dados precisos sôbre o movimento de corpos celestes. Brahe, que não acreditava na teoria de Copérnico, estava provàvelmente muito mais motivado em refutar o modêlo de Copérnico, do que em qualquer outro assunto. Para êle, uma das grandes realizações foi a falha em detectar a paralaxe estelar, mesmo com sua observação altamente precisa, "refutando", assim, o modêlo de Copérnico.

Ao mesmo tempo, Brahe não estava disposto a aceitar a enorme complexidade do modêlo ptolemaico e desenvolveu o seu próprio sistema geocêntrico. No sistema de Tycho Brahe, Mercúrio e Venus foram considerados girando em tôrno do Sol, enquanto o Sol e outros planêtas giravam ao redor da Terra (semelhante ao modêlo de Heráclides).

° ° °

Muitas das oposições ao sistema de Copérnico não surgiram na publicação da teoria de Copérnico, mas muito mais tarde, na época em que Galileu confirmou a hipótese de Copérnico. Antes de Galileu, o sistema de Copérnico era considerado uma hipótese a mais, com uma simplicidade geométrica um pouco maior do que a proposta por Ptolomeu. A verdadeira preocupação surgiu, quando Galileu com seu telescópio mostrou a dura realidade, que destruiu o mito da "perfeição" no firmamento, sustentado há muito tempo.

Galileu descobriu quatro luas girando ao redor do planêta Júpiter, fornecendo, assim, um exemplo de rotação em tôrno de um objeto além da Terra. Observou êle, também, as fases de Vênus e, com isto, desacreditou o modêlo ptolemaico (Figura 22-4), que situava Vênus sempre entre a Terra e o Sol. Neste último caso, Vênus nunca progrediria, além da fase crescente. Êle também observou o movimento das manchas solares que sugeriram que o Sol girava em tôrno do seu eixo, dando crédito, assim, à suposição de que a própria Terra teria um movimento de rotação.

Seção 5 — Kepler

Seção 6 — A Descrição Cinemática e o Problema Dinâmico

FINALIDADE. Introduzir as leis do movimento, de Kepler, em seu contexto histórico e mostrar o seu significado em conduzir a uma simples e unificada explicação dinâmica do movimento.

ÊNFASE. Algum tempo de aula, talvez meio período, deve ser reservado às discussões e problemas. Os alunos devem "conhecer" as três leis de Kepler e compreender como elas contribuíram para a solução final dos problemas de dinâmica.

FILME. Quando o filme "Solar System Kinematics" estiver pronto, será apropriado para estas seções.

LABORATÓRIO. A Experiência III-7, *Lei das Áreas Iguais*, pode ser integrada no trabalho destas seções.

DESENVOLVIMENTO. Os pontos importantes a serem considerados e resolvidos, nas discussões destas seções, são:

1. As cuidadosas observações de Brahe forneceram os dados para o problema em questão. Uma analogia poderia ser feita, entre os registros de Brahe e a tabela de ângulos de incidência e de refração que Snell teria feito, antes de perceber a disposição representada pela sua lei, a lei de Snell.

2. O trabalho de Kepler foi análogo à enunciação da lei de Snell. Entretanto, no caso do problema do sistema solar, os dados eram muito mais complexos, e a ordenação dos dados observados foi bem mais difícil. Kepler estabeleceu o problema cinemático em têrmos analíticos.

3. Um sistema pròpriamente geocêntrico faz uma tão boa descrição dos movimentos do sistema solar, quanto a do sistema heliocêntrico. Contudo, quando se procura uma solução dinâmica do problema, deve-se propor uma fôrça para relatar cada aceleração observada. Em um sistema geocêntrico, as acelerações são tão complicadas, que a fôrça gravitacional pode fàcilmente perder-se no meio da confusão de outras fôrças fictícias. Num sistema heliocêntrico, a fôrça central destaca-se claramente. Procedendo desta maneira, Newton foi capaz de analisar o problema de modo produtivo.

PROBLEMAS COMPLEMENTARES

1. Um satélite da Terra, S_1, move-se em uma órbita circular de raio quatro vêzes o raio terrestre. Compare seu período de revolução com o de um segundo satélite, S_2, que está bem próximo à superície da Terra. Qual é a razão de suas velocidades? $\left(\frac{R^3}{T^2} = K\right.$. Portanto, $\frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{(4R_2)^3}{T_1^2}$, e $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{64\ R_2^3}{R_2^3}$. Comparado ao satélite S_2, o satélite S_1 levará 8 vêzes mais tempo para completar uma volta em tôrno da Terra. A razão das velocidades é dada por: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{2\pi R_2}{T_2} \times \frac{8\,T_2}{2\pi 4R_2} = 2$. Portanto, $v_2 = 2\ v_1$).

2. Podem dois sistemas de referência fornecer descrições cinemáticas igualmente válidas do movimento de um objeto? (Sim, mas uma delas deve ser muito mais complicada do que a outra).

3. Que influência exerce a lei de Newton na escolha do sistema de referência? (A descrição cinemática deve tornar mais simples e mais fácil a análise da fôrça).

4. Descreva o movimento de um projétil de artilharia, disparado horizontalmente, do ponto de vista de:

(a) um observador movendo-se na mesma direção, num avião a jato que tem uma velocidade igual à componente horizontal da velocidade do projétil;

(b) um observador em queda livre (sem resistência do ar). (a. O projétil cai verticalmente, com aceleração = g. b. O projétil parece deslocar-se numa linha horizontal, com velocidade constante).

Seção 7 — Newton

Seção 8 — Gravitação Universal

FINALIDADE. Apresentar uma versão simplificada das análises de Newton, sôbre o problema dinâmico incluído nas leis cinemáticas de Kepler.

ÊNFASE. Estas duas seções são as partes vitais do Capítulo 22. Os alunos se beneficiarão de uma discussão em classe, após o estudo destas seções em casa. As discussões devem ser orientadas, no sentido de consolidar a compreensão do tratamento dado por Newton às leis de Kepler. Quando dominarem isto, as discussões poderão ser estendidas a outros exercícios pertinentes ao assunto, no CCL.

DESENVOLVIMENTO LÓGICO. 1. Considerar, aproximadamente, as órbitas planetárias como círculos.

2. Qualquer objeto, em movimento circular uniforme, move-se com uma aceleração centrípeta, $a = 4\pi^2 R/T^2$.

3. Kepler observou que para todos os planêtas (satélites do Sol), $R^3/T^2 = K_s$. Substituindo, $a = 4\pi^2 K_s/R^2$; e aplicando a lei de Newton, $F = 4\pi^2\ K_s\ m/R^2$.

4. Considerar (como sabemos agora!) que para satélites da Terra há também uma relação $R^3/T^2 = K_t$. Portanto, para qualquer objeto no campo gravitacional da Terra, a fôrça que atua deve ser: $F = 4\pi^2 K_t\, m/R^2$.

5. Na superfície da Terra, $F_{\text{superfície}} = mg$, logo, $g = 4\pi^2 K_t/R^2_{\text{superfície}}$; conhecendo g e $R_{\text{superfície}}$, K_t pode ser determinado.

6. Uma vez estabelecido o valor para K_t e conhecendo o raio, R_L, da órbita da Lua em tôrno da Terra, sua aceleração, a_L (ou seu período, T_L) podem ser calculados e comparados aos valôres observados. Verifica-se uma boa concordância dentro dos erros inerentes à observação.

7. Resta estabelecer uma relação entre K_s, K_t e a constante similar que possa ser aplicada a outras fontes de atração gravitacional. A simetria sugere tentar $K_s = Gm_s$, $K_t = Gm_t$, etc, onde G é a constante universal que descreve a intensidade da interação gravitacional. Isto fornece a fôrça gravitacional, $F = Gm_tm_2/R^2$, uma lei que tem sido até agora verificada por uma grande quantidade de observações.

FILMES. "Universal Gravitation" refere-se diretamente às principais idéias que conduzem ao conceito da gravitação universal. "Elliptic Orbits" apresenta uma interessante demonstração de como a lei do inverso do quadrado da fôrça pode ser deduzida de uma órbita elíptica.

COMENTÁRIOS. Talvez seja interessante para você ter em mente, de modo claro, o papel representado por cada lei de Kepler. Seus significados podem ser descritos como se seguem:

1) A observação de que áreas iguais são varridas em tempos iguais por uma linha radial, que liga o planêta a um ponto no espaço, pode ser interpretada como uma prova de que a fôrça atuante é uma "fôrça central" — isto é, uma fôrça cuja origem é um ponto fixo no espaço, e cuja ação está dirigida para êsse ponto ou afastando-se dêle. (Observe que isto é igualmente verdadeiro para o movimento planetário sob a lei do inverso do quadrado, e para o movimento do pêndulo da Experiência III-7, onde o movimento é harmônico simples e a fôrça é proporcional à primeira potência do deslocamento).

2) A análise da observação de que qualquer órbita simples é elíptica, com o centro de fôrça em um dos focos da elipse, fornece a prova de que a fôrça atuante depende do inverso do quadrado da distância. (Observe que, na Experiência III-7, o centro de fôrça é o centro da elipse, *não* um de seus focos. Isto está diretamente de acôrdo com a primeira potência e *não* com a lei do inverso do quadrado da fôrça). Uma demonstração de que a lei do inverso do quadrado da fôrça obedece a uma órbita elíptica é feita no filme "Elliptic Orbits".

Deve-se observar que, para a órbita circular, o centro da órbita e os focos da elipse degenerada coincidem. Entretanto, nenhuma conclusão pode ser tirada sôbre a lei da fôrça, neste caso. Uma outra maneira de observar isto, é verificar que a órbita circular mostra sòmente uma distância radial. Portanto, não seria possível esperar informações sôbre a dependência entre a distância e a fôrça em questão.

3) A terceira observação de Kepler sintetiza a sua terceira lei: para cada planêta, a razão R^3/T^2 tem o mesmo valor. Esta observação pode ser empregada de vários modos, dependendo da estrutura lógica que está sendo desenvolvida.

No nível colegial, é impossível analisar as órbitas elípticas. Contudo, o texto assinala o fato de que a elipticidade é freqüentemente pequena e, por esta razão, aproxima cada órbita de um círculo, com raio igual ao raio médio da verdadeira elipse. Com esta aproximação, é impossível, a partir da órbita de um único planêta, deduzir algo sôbre a dependência da distância à fôrça atuante. Todavia, sob a suposição de que todos os planêtas são atraídos para o Sol, por fôrças que são diretamente proporcionais às suas massas (a equivalência entre a massa gravitacional e a inercial), a lei do inverso do quadrado pode ser deduzida a partir da constância de R^3/T^2. Neste desenvolvimento, outra evidência é aceita, como prova da equivalência das massas inercial e gravitacional. Esta equivalência serve, com efeito, para normalizar o comportamento de vários planêtas, dentro de um único campo de fôrça. Logo, $R^3/T^2 = K$ identifica a dependência da distância dêste campo de fôrça.

Por outro lado, se as órbitas elípticas são acuradamente observadas e analisadas, qualquer uma delas é suficiente para fornecer a prova da lei do inverso do quadrado, *dentro da escala de distância exemplificada pela órbita.* Se esta evidência fôr aceita na sua generalidade, como prova da lei do inverso do quadrado, $R^3/T^2 = K$

serve como evidência de que a razão entre a massa inercial e a gravitacional é a mesma para todos os planêtas.

Seção 9 — Algumas Realizações Posteriores a Newton

Seção 10 — Verificações Experimentais da Lei da Gravitação Universal

Seção 11 — Uma Pequena Discrepância

FINALIDADE. Completar a história da lei da gravitação universal.

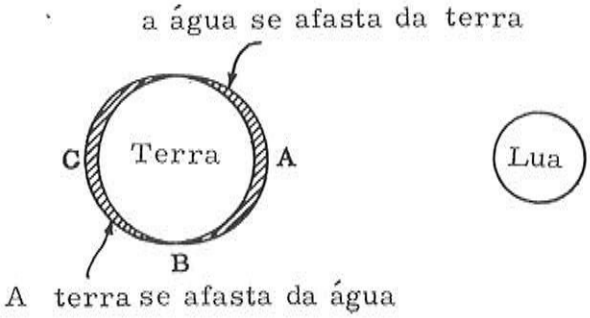
ÊNFASE. Pouca discussão será necessária para estas seções. Contudo, alguns tópicos estritamente relacionados ao assunto são apresentados nos comentários que se seguem. Se o filme "Forces" não foi exibido anteriormente, é interessante mostrar aqui a seqüência do filme sôbre a natureza da experiência de Cavendish.

SUPLEMENTO

Relatividade Geral. O trabalho de Newton conduziu ao reconhecimento da proporcionalidade das massas gravitacional e inercial. Einstein, em sua Teoria da Relatividade Geral, considerou esta coicidência aparente e afirmou ser ela uma propriedade inerente e fundamental da matéria. Esta coincidência está relacionada à indistinguibilidade dos efeitos da gravitação e aceleração. O Apêndice 4, no fim dêste volume, é um suplemento sôbre a Relatividade Geral.

° ° °

Marés. Os alunos que vivem no meio do continente talvez não estejam familiarizados com as marés. Embora os detalhes sôbre os movimentos das marés sejam complicados, pela variação nas praias e na superfície do oceano, os principais movimentos são causados pela atração gravitacional da Lua sôbre a Terra. Êste fenômeno é ilustrado na figura. (Escala enormemente exagerada).



Agora que os alunos conhecem que a fôrça entre a Terra e a Lua resulta numa aceleração, talvez compreendam melhor as marés. De fato, livremente a Lua e a Terra caem (aceleram) um em direção à outra. A fôrça por unidade de massa é o parâmetro que estabelece a aceleração da partícula. Como o campo gravitacional da Lua varia com o inverso do quadrado da distância a partir do centro da Lua, a aceleração para a Lua de uma partícula em A tende a ser maior do que a de uma partícula em B que, por sua vez, tende a ser maior do que uma partícula em C. Se a Terra fôsse um corpo rígido, não se verificariam marés. As diferenças nas fôrças externas seriam compensadas pelas fôrças internas. Quando a água é a substância, em A ou C, como flui livremente, ocorrem variações em seu nível. Assim, a atração da Lua produz duas protuberâncias no oceano, em lados opostos da Terra. A Terra gira uma vez em 24 horas; assim, há duas marés altas por dia em qualquer local do oceano, embora elas não tenham exatamente a mesma altura. Ainda que a influência do Sol deva ser também considerada nos cálculos exatos das marés, êste efeito é consideràvelmente menor do que o da Lua.

A fôrça exercida pelo Sol sôbre a massa unitária, em qualquer lugar da Terra, é cêrca de 100 vêzes maior do que a fôrça correspondente exercida pela Lua. Todavia, a maré causada pela Lua é pràticamente o dôbro da do Sol. Isto acontece, porque a diferença entre a fôrça da Lua, sôbre a massa unitária na superície da Terra em A, e aquela que atua em C é duas vêzes maior do que a diferença das fôrças do Sol, nestes mesmos pontos (isto se verifica, porque a variação relativa, no inverso do quadrado da distância da Lua a êsses pontos é aproximadamente, 400 vêzes maior do que a variação

relativa no inverso do quadrado da distância do Sol a êsses pontos.

As marés mais altas ocorrem duas vêzes por mês, aproximadamente, com a lua nova e a lua cheia, quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados. As marés variam consideràvelmente em intensidade, de um lugar para outro ao longo da costa, devido a detalhes na topografia local. As grandes marés são mais freqüentemente observadas em baías parcialmente fechadas. Por exemplo, na Baía de Fundy, a diferença entre a maré alta e a baixa é cêrca de 15 metros.

Flutuações na Fôrça Gravitacional. Em primeira aproximação, a aceleração da gravidade é constante na superfície da Terra. Em segunda aproximação, ela varia de ponto para ponto, na superfície, porque a topografia apresenta alturas diferentes, e pelo fato da Terra não ser exatamente esférica. Em terceira aproximação, a aceleração da gravidade varia com a distribuição local de massas na crosta terrestre. Êste fato é de grande importância para os geólogos, desde que a formação interna da crosta terrestre pode ser detectada por medidas precisas das variações locais de g. Se g fôr medido sôbre uma grande caverna cheia de petróleo, terá um valor menor do que medido sôbre uma região de rochas compactas e um valor menor ainda, se o medíssemos sôbre um grande depósito de chumbo ou ouro. O valor de g também depende da rotação da Terra, como foi discutido no Problema 21.

° ° °

Composição da Terra. A experiência de Cavendish permitiu-lhe encontrar a densidade média da Terra, determinando-a em cêrca de 5 1/2 vêzes a da água. Uma vez que a superfície rochosa tem uma densidade de apenas 2 a 3 vêzes a da água, o interior da Terra deve, òbviamente, ser constituído de um material de densidade maior do que o da crosta superficial. O basalto fundido ou lava, que está bem abaixo da crosta da Terra, é ainda suficientemente leve para explicar o valor da densidade da Terra. Uma boa quantidade da massa da Terra, aparentemente, permanece num "núcleo" relativamente pequeno e pesado no centro da Terra, de densidade, aproximadamente, 10 vêzes a da água. Êste núcleo é presumìvelmente composto de metais como o ferro e o níquel, ao invés de rochas. O núcleo, determinado por medidas sísmicas, é essencialmente esférico no seu formato e tem 3 200 quilômetros do raio. O próprio núcleo, aparentemente, não possui densidade uniforme, mas apresenta uma elevação distinta na densidade, aumentando, à medida que se aproxima do centro da Terra, a partir de 1 600 quilômetros do centro. No centro da Terra, a densidade é cêrca de 16 vêzes a da água.

° ° °

QUESTÕES NÃO SOLUCIONADAS. Os alunos não devem pensar que a gravitação está completamente estabelecida e terminada. Há um número de questões básicas sôbre a gravidade ainda não resolvidas, mesmo anos após a teoria geral da relatividade de Einstein, como as seguintes:

1) Por que o campo gravitacional obedece à lei do inverso do quadrado?

2) Qual é a velocidade de propagação do campo gravitacional?

3) A teoria gravitacional é válida para distâncias muito grandes e muito pequenas?

4) Vale a lei da gravitação em qualquer lugar do universo?

5) É a "constante" gravitacional G realmente constante, ou varia lentamente com o tempo durante bilhões de anos?

6) É a fôrça gravitacional entre dois corpos independente da distribuição de matéria no restante do universo?

Não temos respostas para estas questões "simples" ou para muitas outras de fundamental interêsse. Se a gravidade é um campo de investigação que está comumente um tanto estático, não é devido à escassez dos problemas, mas de físicos. É extremamente difícil conceber e executar experiências para testar os detalhes da teoria da gravidade numa escala terrestre, e nem a tecnologia, nem a economia, estão ainda preparadas para suportar um ano astrofísico intergalático!

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

A tabela seguinte classifica os problemas, de acôrdo com o nível avaliado de dificuldade de cada um e as seções a que se referem. Estão

indicados os que são especialmente adequados para discussão em classe e projetos para casa. Os problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*).

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão em classe	Projetos para casa
1-4		3*, 4*		3*, 4*	1, 2
5	5, 6	7		5, 7	
6		8*		8*	
7		9*			
8	10*, 14, 15 16*, 17*	11*, 12* 18*	13	10*, 11*, 12* 13	
geral	19*	20*, 21, 22	23*	19*, 20*, 21 22, 23*	

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. Projeto para casa.
2. Projeto para casa.
3. (a) Cêrca de uma revolução em 4 semanas (27,3 dias).
   (b) A Terra apareceria fixa, vista da Lua.
   (c) Cêrca de uma revolução em 4 semanas (29,5 dias). O Sol pareceria girar um pouco mais vagarosamente que as estrêlas fixas.
4. (a) Uma vez por mês (29,5 dias).
   (b) 8×10^{10} m.
   (c) A órbita da Lua é sempre côncava na direção do Sol. Veja diagrama.
   (d) Não.
5. Elíptica.
6. (a) $2{,}2 \times 10^{15}$ m²/s.
   (b) $2{,}1 \times 10^{11}$ m²/s.
7. $5{,}3 \times 10^{12}$m.
8. Veja discussão.
9. (a) $v_1 = 2v_2$.
   (b) $F_1 = 2F_2$.
   (c) Veja discussão.
10. $2{,}6 \times 10^{6}$m.
11. (a) $3{,}6 \times 10^{7}$m.
    (b) 0,22 m/s².
    (c) 0,23 m/s².
12. $5{,}5 \times 10^{24}$kg.
13. (a) $\varrho\, T^2 = \dfrac{3\pi}{G}$, uma constante.
    (b) $1{,}41 \times 10^{11}$ kg s²/m³.
14. (a) $5{,}1 \times 10^{3}$s.
    (b) 10^{4}s.
15. Marte: 360 newtons.
    Terra: 980 newtons.
    Júpiter: 2 400 newtons.
16. $2{,}8 \times 10^{-7}$ newtons.
17. $F \approx 1{,}9 \times 10^{-44}$ newtons.
18. (a) 1,5 maior do que na Terra.
    (b) Densidade do planêta = 3/4 da densidade da Terra.
19. A velocidade tangencial é suficiente para resultar numa órbita estável.
20. (a) São iguais.
    (b) Uma diferença desprezível da atual trajetória Lua-Terra em tôrno do Sol.
    (c) 2,2.
    (d) Veja discussão.
21. (a) Menos 3,4 newtons.
    (b) Uma revolução em 1,4 horas.
    (c) 17 vêzes maior.
22. (a) Veja esquema.
    (b) Veja esquema.
    (c) 1/1 e 1/2.
23. (a) Veja discussão.
    (b) Não.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

Procure observar a posição de um dos planêtas em relação às estrêlas fixas, uma ou duas vêzes por semana, durante um mês ou dois. Comece fazendo um mapa das estrêlas em tôrno do planêta. Marque a nova posição do planêta nesse mapa, a cada observação.

Aos alunos que tentarem isto deve-se aconselhar construir um sextante rudimentar ou talvez, empregar o visor de paralaxe da Experiência I-2, para obter resultados razoàvelmente quantitativos. De outro modo, seria melhor começar com uma "carta celeste" da região do céu em estudo.

PROBLEMA 2

Outra sugestão: As quatro luas maiores de Júpiter podem ser vistas com um binóculo razoàvelmente bom. Uma delas move-se tão depressa que seu movimento, em relação a Júpiter, pode ser detetado por observações a intervalos de apenas algumas horas. Com seu binóculo, observe as posições das luas em tôdas as noites claras, durante três semanas.

(a) Marque suas posições em relação a Júpiter, para cada observação.

(b) Você pode determinar o período de revolução de cada lua?

(c) Qual dessas luas está mais próxima de Júpiter?

É necessário utilizar binóculos de boa qualidade, desde que os binóculos inferiores apresentam aberrações cromáticas e distorções esféricas que não permitem resolver as luas. Os binóculos devem ser montados num suporte fixo, para esta observação. Comente com os alunos que Galileu realizou essas mensurações com equipamento óptico menos adequado do que os binóculos comerciais!

OS SATÉLITES DE JÚPITER

Designação	Descobridor	Distância de Júpiter (km)	Diâmetro (km)	Período de Rev.
I	Galileu, 1610	420 000	3 731	1 d 18 h 28 min.
II	Galileu, 1610	670 500	3 166	3 d 13 h 14 min.
III	Galileu, 1610	1 069 000	5 150	7 d 3 h 42 min.
IV	Galileu, 1610	1 881 000	5 179	16 d 16 h 32 min.
V	Barnard, 1892	181 200	160?	0 d 11 h 57 min.
VI	Perrine, 1904	11 450 000	130?	250 d 17 h
VII	Perrine, 1905	11 730 000	40?	260 d 1 h
VIII	Melutte, 1908	23 500 000	24?	739 d
IX	Nicholson, 1914	23 980 000	24?	745 d
X	Nicholson, 1938	11 750 000	24?	270 d
XI	Nicholson, 1938	22 530 000	24?	735 d

Júpiter tem onze satélites. Os quatro maiores dêles, Io (I na tabela acima), Europa (II), Ganimedes (III), e Calisto (IV) foram descobertos por Galileu em 1610. O menor dos quatro, Europa, é, aproximadamente, do tamanho da nossa lua, enquanto os dois maiores, Ganimedes e Calisto, são maiores do que o planêta Mercúrio. Informações pertinentes aos satélites são dadas na tabela acima.

Os sete satélites menores são muito pequenos para serem observados, exceto com um potente telescópio astronômico e sob condições favoráveis. Os satélites mais afastados são tão pequenos, que não poderiam ser vistos de Júpiter, sem um telescópio!

PROBLEMA 3

As estrêlas fixas completam uma revolução em cêrca de um dia, vistas por um observador na Terra. Determine a duração aproximada das seguintes revoluções:

(a) A esfera das estrêlas fixas, vista por alguém na Lua.

(b) A Terra em tôrno da Lua vista da Lua.

(c) O Sol visto da Lua. Parece o Sol girar como se fôsse uma das estrêlas fixas? Parece girar mais depressa ou mais devagar? Lembre que a Terra e a Lua giram em tôrno do Sol uma vez por ano.

Esta questão pode ser respondida em diferentes níveis. Neste estágio, deve-se esperar uma resposta breve e qualitativa.

Resposta n.º 1 (breve):

a) Sabemos que, devido à rotação da Terra em tôrno do seu eixo, as estrêlas parecem girar ao redor da Terra uma vez por dia, Porém, como seriam vistas as estrêlas, da Lua? Gira a Lua em tôrno do seu eixo, uma vez por dia, como a Terra?

Esta última questão pode ser respondida, examinando-se a tabela do sistema solar, na página 56 do texto. O período de rotação da Lua em tôrno do seu eixo é idêntico ao período de rotação da Lua em tôrno da Terra. É $2{,}36 \times 10^6$ segundos ou 27,3 dias. Como, relativamente às estrêlas fixas, a Lua gira em tôrno do seu eixo uma vez em 27,3 dias, as estrêlas fixas pareceriam girar uma vez em 27,3 dias, para um observador na Lua.

Certos alunos talvez cheguem a uma resposta aproximada, sem recorrer à tabela. A chave da solução está na interpretação do fato de que, da Terra, sempre vemos a mesma "face" da Lua. Como a Lua viaja de um ângulo Θ em sua revolução em tôrno da Terra, ela deve também girar em seu eixo de um mesmo ângulo, a fim de manter a mesma face voltada para a Terra. Assim, o período de rotação da Lua em tôrno do seu eixo é idêntico ao período de revolução da Lua ao redor da Terra. Já anteriormente, em Ciências, alguns alunos aprenderam que o período é de 28 dias (mais precisamente, 27,3 dias).

b) Uma vez que a Lua mantém sempre a mesma "face" voltada para a Terra, um observador na Lua veria, constantemente, a Terra numa mesma posição no céu. Da Lua, a Terra não apareceria girando em tôrno da Lua.

c) Na parte (a), verificamos que a Lua gira em tôrno de seu eixo cêrca de uma vez em 4 semanas, isto é, aproximadamente, o tempo necessário para o Sol mover-se de uma posição "meio dia" para uma posição idêntica mais próxima, vista de um ponto particular na Lua. Se a Lua girasse sòmente em tôrno de seu eixo e não revolucionasse em tôrno do Sol, então, para um homem na Lua o Sol pareceria mover-se com as estrêlas fixas. Entretanto, como a Lua se move em tôrno do Sol e também em tôrno do seu eixo, ela deve girar um pouco mais de uma revolução, em tôrno de seu eixo, a fim de que o Sol reapareça na posição "meio dia". Portanto, o Sol girará aparentemente ao redor da Lua, um tanto mais vagarosamente do que as estrêlas fixas. (O intervalo de tempo real, durante o qual o Sol gira aparentemente uma vez em tôrno da Lua, é de 29,5 dias — veja a Resposta n.º 2 abaixo.)

A resposta dada acima conduz êste problema até onde, provàvelmente, interessa à sua classe. Se insistirem em mais detalhes, a solução abaixo ser-lhe-á útil nas discussões fora de classe.

° ° °

Resposta n.º 2:

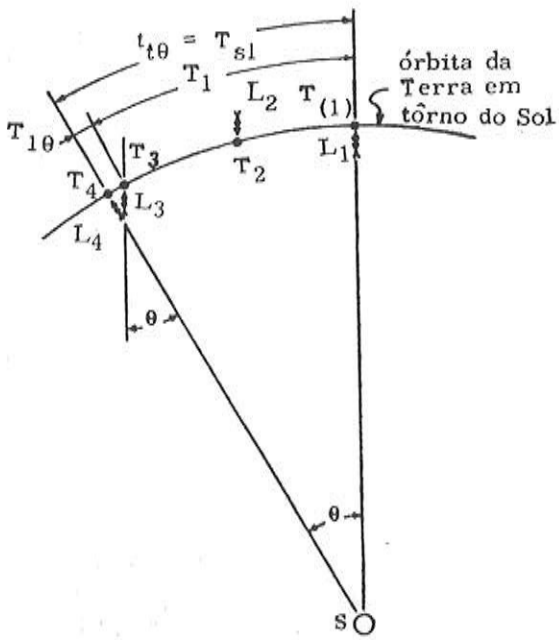
A rotação da Terra em tôrno do seu eixo, a Terra em sua órbita, a Lua em sua órbita em tôrno da Terra, e a Lua ao redor do seu próprio eixo, estão todos no mesmo sentido. Além disso, o ritmo de revolução da Lua em sua órbita e o ritmo de rotação em tôrno do seu eixo são idênticos. O período dêsses dois movimentos é 27,3 dias.

a) Imagine uma seta fixa, transpassando a Lua e apontando para a Terra. A ponta da seta permanecerá sempre dirigida para a Terra. Como a Lua gira em tôrno do seu eixo, o ângulo entre esta seta e um diâmetro imaginário da esfera das estrêlas fixas variará. A seta gira 360° em relação a tal diâmetro, em 27,3 dias. Logo, para um observador na Lua (a quem a seta parece fixa), o diâmetro da esfera das estrêlas (e, assim, a própria esfera) parece girar com um período de 27,3 dias.

b) A Terra, contudo, permanece fixa na direção indicada pela seta. Portanto, nem se

eleva, nem se põe, para um observador na Lua. Da Lua, a velocidade aparente de revolução da Terra em tôrno da Lua é *zero*.

c) O ritmo aparente de revolução do Sol é um problema mais difícil. A figura a seguir mostra várias situações do sistema Terra-Lua. Todos os movimentos são contrários ao movimento de um ponteiro de relógio. A Posição 1 é uma posição de lua nova, para um observador terrestre. Nas Posições 1 e 3, as setas estão paralelas.



Ao movimentar-se de 1 para 3, a Lua girou sôbre seu eixo 360°, relativamente à esfera das estrêlas fixas. (A Posição 2 é uma posição intermediária, após uma rotação de 180°). Note que, na Posição 1, o Sol está no seu zênite para um observador na Lua, localizado no penacho da seta. Todavia, na Posição 3, o Sol não está ainda, novamente, no "meio-dia" para êsse observador. Sòmente será meio-dia, quando atingir a Posição 4.

O ângulo ao longo da órbita da Terra, entre as Posições 1 e 4, é Θ. Pode-se observar no diagrama que Θ é também o ângulo através do qual a Lua se move em tôrno da Terra, ao deslocar-se da Posição 3 para a Posição 4. Assim, uma revolução aparente e completa do Sol em tôrno da Lua requer um tempo T_{sl}.

(1) $T_{sl} = T_l + t_{l\theta}$,

onde T_l é o tempo necessário para a Lua realizar uma revolução em tôrno da Terra, e $t_{l\theta}$ é o tempo necessário para a Lua mover-se de um ângulo Θ. A Lua gira de um ângulo de 360°, no tempo T_l. Assim, o tempo necessário para a Lua girar de um ângulo Θ graus é:

$$2) \quad t_{l\theta} = \frac{\Theta}{360} T_l.$$

Do mesmo modo, o tempo necessário para a Terra girar de um ângulo Θ é:

$$(3) \quad t_{t\theta} = \frac{\Theta}{360} T_t.$$

O diagrama mostra que o tempo necessário para a Terra mover-se da Posição 1 à Posição 4 é igual ao tempo necessário para uma aparente revolução do Sol em tôrno da Lua. Portanto,

$$(4) \quad T_{sl} = t_{t\theta}.$$

As equações 2 e 3 podem ser combinadas e (pela equação 4) T_{sl} pode ser substituído por $t_{l\theta}$.

$$(2) \quad \frac{t_{l\theta}}{T_t} = \frac{\Theta}{360}, \quad (3) \quad \frac{t_{t\theta}}{T_l} = \frac{\Theta}{360}$$

$$\frac{t_{l\theta}}{T_l} = \frac{t_{t\theta}}{T_t} = \frac{T_{sl}}{T_t}$$

$$(5) \quad t_\theta = \frac{T_{sl}\, T_l}{T_t}.$$

Esta expressão, para $t_{l\theta}$ na equação 5, pode ser substituída na equação 1.

$$T_{sl} = T_l + \frac{T_{sl}\, T_l}{T_t} = \frac{T_l\, T_t}{T_t - T_l} = \frac{27{,}3 \times 365}{365 - 27{,}3} =$$

$= 29{,}5$ dias.

É interessante notar que as Posições 1 e 4 representam a lua nova, para um observador na Terra. Portanto, 29,5 dias é o período de nosso mês lunar.

PROBLEMA 4

A órbita da Terra em tôrno do Sol é quase circular e a Lua move-se numa trajetória quase circular em tôrno da Terra. O raio da órbita da Terra é $1{,}5 \times 10^{11}$ metros, e o da órbita da Lua, 4×10^{8} metros.

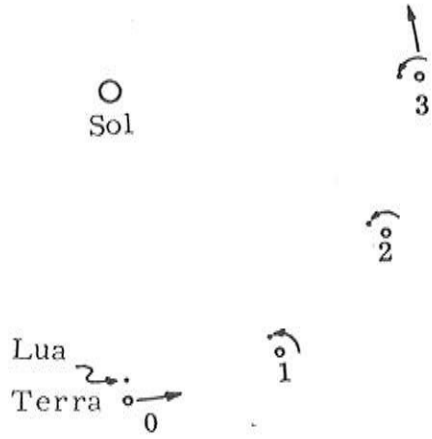
(a) Quantas vêzes a Lua passa entre a Terra e o Sol?

(b) Que distância percorre a Lua em tôrno do Sol, no intervalo de tempo entre duas de suas passagens sucessivas entre a Terra e o Sol?

(c) Trace num mesmo desenho as órbitas da Terra e da Lua em tôrno do Sol.

(d) Aparentaria a Lua movimento retrógrado, se fôsse vista por um observador situado no Sol? (Movimento retrógrado é semelhante ao indicado na Fig. 22-2).

a) Como a Lua leva 4 semanas para girar em tôrno da Terra, e a Terra leva 52 semanas para girar ao redor do Sol, a Lua gira em tôrno da Terra cêrca de 13 vêzes em um ano. (Isto também pode ser determinado, baseando-se nos períodos para o Sol e a Lua, dados na tabela do sistema solar, na página 56. $\frac{T_S}{T_L} = \frac{3{,}16 \times 10^{7}}{2{,}36 \times 10^{6}} = 13{,}4$). Nos movimentos da Terra e da Lua, durante um ano, a Lua passará entre a Terra e o Sol 12 vêzes. Isto pode ser observado pelo diagrama que mostra as posições da Terra, do Sol e da Lua em cada mês, durante o intervalo de 3 mêses ou 1/4 do ano. Pode-se observar que, enquanto a Terra se moveu de 0 a 1, a Lua fêz um pouco mais que uma revolução em tôrno da Terra, para ficar entre a Terra e o Sol. Durante 1/4 do ano necessário para a Terra mover-se de 0 a 3, a Lua deve ter feito um quarto extra de revolução ao redor da Terra, para ficar novamente entre a Terra e o Sol. Logo, um total de 3 1/4 revoluções por um quarto de ano são necessárias para que a Lua passe entre a Terra e o Sol três vêzes. Por isso, em um ano (13 revoluções da Lua em tôrno da Terra), a Lua passará entre a Terra e o Sol 12 vêzes ou *uma vez por mês*. (Como vimos na Resposta n.º 2 para o Problema 3, uma resposta mais precisa seria uma vez cada 29,5 dias).

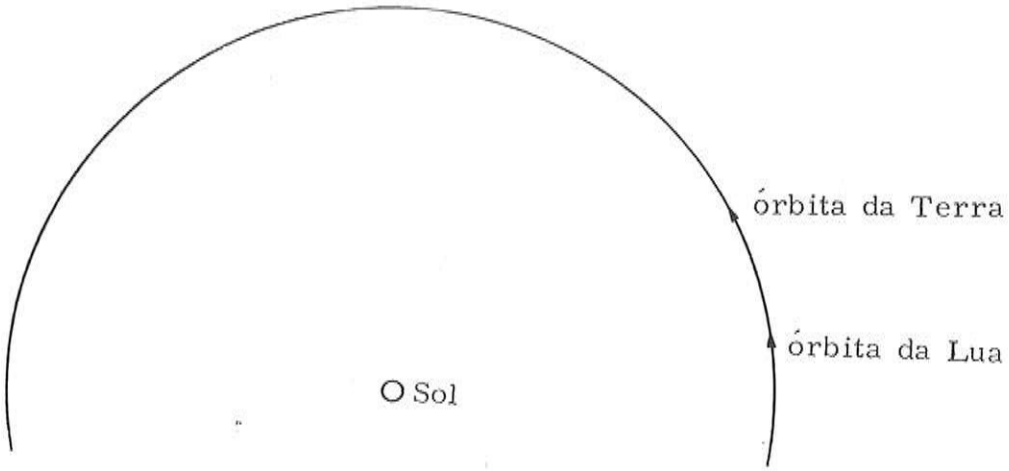


[Um argumento semelhante mostra que a Terra gira em tôrno do seu eixo 367 vêzes, durante o ano bissexto, e 366 vêzes durante os outros anos].

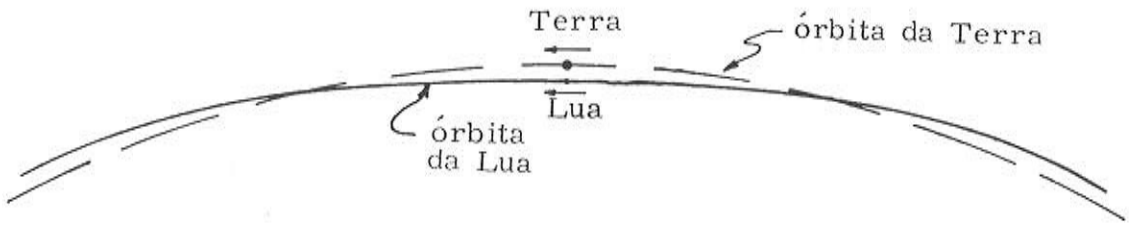
b) Durante um mês, a Lua e a Terra movem-se 1/12 da circunferência da órbita da Terra, ou $1/12 \times 2\pi \times 1{,}5 \times 10^{11}\text{m} \approx 8 \times 10^{10}$ m; (mais precisamente, $\frac{29{,}5}{365} \times 2\pi \times 1{,}5 \times 10^{11}{}_{\text{m}} = 7{,}6 \times 10^{10}{}_{\text{m}}$).

c) No esquema da página seguinte, a órbita da Terra ao redor do Sol tem um raio de 5,1 cm. A razão entre o raio da órbita da Lua em tôrno da Terra e o da órbita da Terra ao redor do Sol é $\frac{3{,}8 \times 10^{8}}{1{,}5 \times 10^{11}} = \frac{1}{400}$; portanto, a órbita da Lua em tôrno da Terra, no mesmo esquema, deve ter um raio de $(5{,}1 \div 400)$ cm. Isto deve ser menor do que a largura da linha empregada para indicar a órbita da Terra.

Freqüentemente, os diagramas mostram a Lua descrevendo um movimento para a frente e para trás, de um lado a outro da órbita da Terra. Tais diagramas raramente são corretos, visto que a órbita da Lua em tôrno do Sol tem *sempre a concavidade voltada para o Sol*. Pode-se chegar a isto, baseando-se no fato de que a fôrça gravitacional entre o Sol e a Lua é, aproximadamente, duas vêzes maior do que a fôrça entre a Terra e a Lua. Assim, a Lua está sempre acelerada em direção ao Sol. A aceleração da Lua para a Terra é $2{,}7 \times 10^{-3}$ m/s^2; sua aceleração para o Sol é $5{,}9 \times 10^{-3}$ m/s^2. Assim, mesmo quando a Lua está entre a Terra e o Sol, como mostra o diagrama que segue, a aceleração resultante está na direção do Sol.



d) Para um observador no Sol, a Lua não deve apresentar movimento retrógrado (invertido). Se a Lua apresentasse tal movimento sua velocidade "para trás", em um ponto como o do diagrama, deveria ser maior do que a velocidade "para a frente" do sistema Terra-

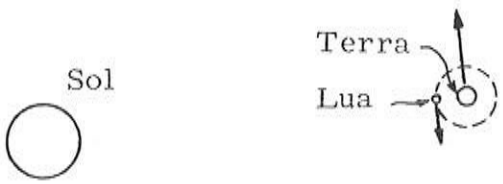


-Lua. A velocidade do sistema Terra-Lua, em tôrno do Sol, é:

$$\frac{2\pi \times 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}}{365 \times 8{,}6 \times 10^{4}\ \text{s}} \approx 30\ \text{km/s}.$$

A velocidade da Lua, relativa à Terra, é:

$$\frac{2\pi \times 3{,}8 \times 10^{8}\ \text{m}}{27 \times 8{,}6 \times 10^{4}\ \text{s}} \approx 1\ \text{km/s}.$$



Como a Lua e a Terra viajam ao redor do Sol a 30 km/s, a velocidade da Lua de 1 km/s, em tôrno da Terra é insignificante para causar o movimento retrógrado.

PROBLEMA 5

Além dos planêtas, o sistema solar contém outros astros "errantes" chamados cometas. Muitos cometas reaparecem a intervalos regulares, tornando-se aparentemente mais brilhantes e maiores em poucas semanas, a proporção que se aproximam da Terra; depois, vão-se apagando e diminuindo, até se tornarem invisíveis durante anos. Que espécie de órbita pensa você que êles percorrem?

Embora tôdas as órbitas sejam elípticas, as órbitas descritas pelos cometas que reaparecem são longas e estreitas — de grande excentricidade, comparadas às órbitas quase circulares dos planêtas.

PROBLEMA 6

Com que rapidez, em m^2/s, é varrida uma área:

(a) pelo raio do Sol à Terra?

(b) pelo raio da Lua a Terra?

Êste é um problema da aplicação direta da segunda lei de Kepler. Empregando os dados fornecidos no Problema 4:

a) A área varrida pelo raio do Sol à Terra, por segundo $= \pi R^2/T$, onde T é o tempo em segundos para uma revolução completa. Como a Terra gira uma vez em cada 365 dias ($3{,}2 \times 10^7$ segundos), a área varrida pelo raio do Sol à Terra, por segundo, é:

$$\frac{\pi \times (1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^2}{3{,}2 \times 10^7\,\mathrm{s}} = 2{,}2 \times 10^{15}\,\mathrm{m^2/s}.$$

b) Para o raio vetor da Terra à Lua, o período é 27,3 dias ($2{,}4 \times 10^6$s). Assim, a área varrida pelo raio da Terra à Lua, por segundo, é:

$$\frac{\pi\,(4 \times 10^8\,\mathrm{m})^2}{2{,}4 \times 10^6\,\mathrm{s}} = 2{,}1 \times 10^{11}\ \mathrm{m^2/s}.$$

PROBLEMA 7

Astrônomos observaram que o cometa de Halley tem um período de 75 anos e que sua menor distância ao Sol é de $8{,}9 \times 10^{10}$ metros, porém sua maior distância ao Sol não pode ser medida por não podermos vê-lo. Com essa informação e com a que consta do segundo rodapé da Seção 22-5, calcule sua distância máxima ao Sol. (Foi Newton quem ensinou a Halley como calcular a órbita de um cometa. Halley encontrou e calculou a órbita e o período do cometa que tem seu nome, quando fazia uma análise geral das órbitas dos cometas).

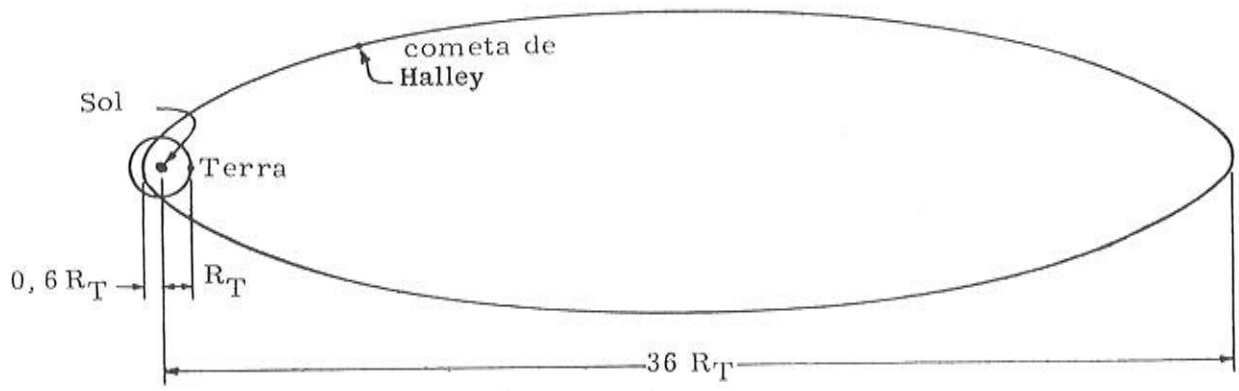
Êste problema refere-se à órbita de um cometa, e à terceira lei de Kepler. Como sabemos que R^3/T^2 é uma constante e conhecemos T, podemos calcular R. R é definido como a média do raio menor e do maior. Portanto, conhecendo o raio menor, podemos calcular o raio maior.

Da tabela para a terceira lei de Kepler (página 56), tomamos $\overline{R}^3/T^2 = 3{,}4 \times 10^{18}$ m^3/s^2. Uma vez que o período T, do cometa Halley é de 75 anos $= 2{,}4 \times 10^9$s, $T^2 = 5{,}8 \times \times 10^{18}\ s^2$,

e $\overline{R} = (3{,}4 \times 10^{18}\,\frac{m^3}{s^2} \times 5{,}8 \times 10^{18}\,s^2)^{1/3} =$
$= 2{,}7 \times 10^{12}$ m.

Desde que $\overline{R}$ é definido como 1/2 da soma dos raios maior e menor, $\overline{R} = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}$ e

$R_{max} = 2\overline{R} - R_{min} = 2 \times 2{,}7 \times 10^{12}$ m $=$
$= 5{,}3 \times 10^{12}$ m. (A distância mais próxima do Sol, $8{,}9 \times 10^{10}$ m é desprezível, comparada com o raio maior). Se esta órbita fôr traçada em escala, juntamente com a da Terra, evidentemente será mais alongada do que na figura abaixo.



PROBLEMA 8

Três pirilampos X, Y e Z estão numa bicicleta em movimento, à noite. X está bem no centro de um dos eixos, que gira com a roda. Y está na periferia da roda. Z está no quadro da bicicleta. Faça alguns desenhos e descreva em poucas palavras os seguintes movimentos:

(a) de X e Y vistos por Z;

(b) de Y e Z vistos por X;

(c) de X e Z vistos por Y;

(d) de todos os três, vistos por um observador, em pé, parado, próximo à bicicleta.

Êste problema um tanto difícil é melhor empregado numa discussão em classe. Pode ser apresentado para ilustrar diferentes sistemas de referência — um exemplo de problemas envolvendo descrições heliocêntricas e geocêntricas do universo.

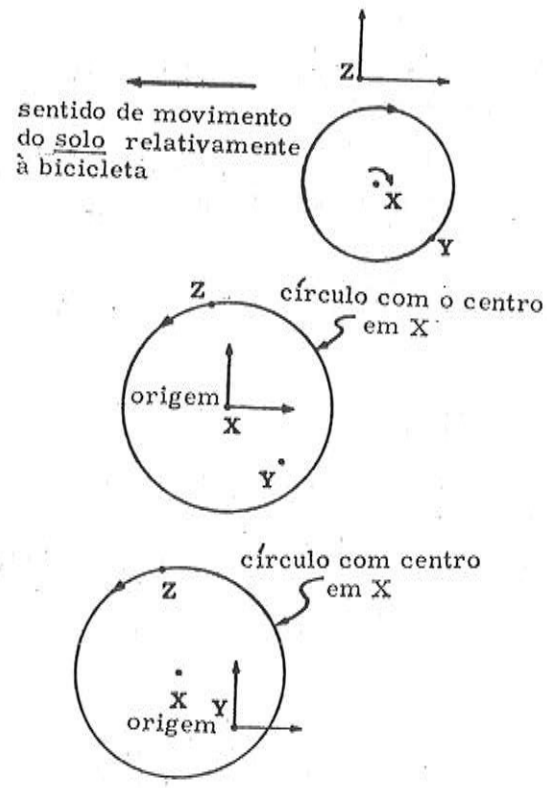
A principal dificuldade observada neste problema pode ser ilustrada por um exemplo. Suponha a pergunta: "qual é o movimento de um homem sentado em um banco, quando observado por um outro homem que o olha de um carro em movimento?" Duas respostas são possíveis. Uma resposta perfeitamente sensata é a que afirma que o homem não está se movendo. Mesmo do carro que se move, podemos ver que o homem no banco permanece sentado, logo, está "em repouso". A outra resposta é de que, num sistema de referência fixo em relação ao carro, o homem no banco está se movendo para trás, com o módulo da velocidade do carro. Certamente, a primeira resposta é a mais natural, em têrmos de nossa experiência. O movimento do carro não nos "engana". Intuitivamente, preferimos a descrição da posição do homem relativamente ao solo. Contudo, a segunda resposta é plenamente satisfatória, se nosso sistema de referência estiver fixo ao carro.

A instrução é simples: para descrever o movimento de um objeto, escolhemos um sistema de referência e descrevemos o movimento, relativamente a êsse sistema. No exemplo acima, há *duas* possibilidades: (1) um sistema fixo ao solo, e (2) um sistema fixo ao carro. Ao fornecer nossa resposta, devemos estabelecer claramente qual o sistema de referência por nós adotado.

O observador no carro pode nos dizer que movimento tem o homem sentado no banco, em relação a qualquer sistema. O mesmo poderia dizer o homem sôbre o banco!

No Problema 8, foram dados quatro sistemas de referência. Podemos pensar nêles mais fàcilmente, em têrmos da origem e orientação de seus eixos coordenados. Se considerarmos que Z, X, e o círculo descrito por Y estão todos no mesmo plano, duas cordenadas serão suficientes.

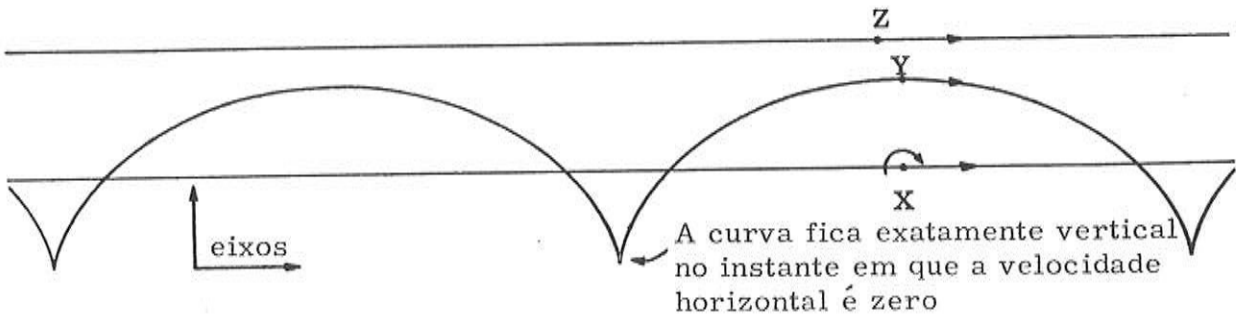
a) Da posição de Z, no quadro da bicicleta exterior à roda, X não se move, mas gira em tôrno de uma posição fixa no espaço. Y descreve um círculo em tôrno de X, mas, como Z está no plano do círculo, Y aparecerá a Z, executando um movimento harmônico simples.



b) Do ponto de vista de X, girando com o eixo, Y permanece parado no aro da bicicleta. Z, sôbre o quadro, fica a uma distância fixa de X. Portanto, como X gira com o eixo, Z gira em tôrno de X, no sentido oposto.

c) Do ponto de vista de Y, no aro, X ficará em repouso, mas Z mover-se-á em círculo com centro em X.

d) Para um observador situado próximo à bicicleta, Z, na armação da bicicleta, move-se com velocidade uniforme numa reta horizontal. X, no eixo, também se move com velocidade uniforme numa reta horizontal, mas o seu movimento é de rotação. Y, no aro da bicicleta, descreve uma ciclóide. Como a roda gira, a velocidade horizontal de Y é zero, no instante em que a parte da roda onde se localiza Y está em contato com o solo. Portanto, temos:



A forma mais simples de descrever o movimento de Y é dizer que Y se move em um círculo, em relação aos eixos fixos, no quadro da bicicleta [parte (a)], e que êstes eixos se movem horizontalmente, com velocidade constante, sem girar em relação ao solo.

PROBLEMA 9

Dois patinadores de mesma massa gastam o mesmo tempo para completar uma volta, em tôrno de uma pista circular. A distância de um dos patinadores ao centro é o dôbro da distância do outro.

(a) Compare as velocidades dos patinadores.

(b) As fôrças centrípetas que agem sôbre êles.

(c) Quem exerce a fôrça centrípeta sôbre êles?

a) Se $R_1 = 2R_2$, como $v = 2\pi R/T$, e T é o mesmo para ambos os patinadores, $v_1 = 2v_2$.

b) F, a fôrça centrípeta, é $F = \frac{4\pi^2 Rm}{T^2}$. Portanto, $F_1 = 2F_2$ de $R_1 = 2R_2$. Podemos também empregar $F = \frac{m v^2}{R}$ (lembrando que, neste caso, tanto v como R são diferentes; substituindo R_1 por $2R_2$ e v_1 por $2v_2$ [parte (a)]. Portanto, $F_1 = \frac{2^2}{2} F_2 = 2F_2$.

c) A fôrça centrípeta é exercida sôbre os patinadores pelo piso (ou gêlo). Se o piso está nivelado e é duro (como num ringue de patinação sobre rodas com uma superfície nivelada), existe uma fôrça de atrito. Se o ringue é menos duro (como uma pista de gêlo, onde o patim penetra um pouco no gêlo) ou se o piso do ringue é inclinado (nas curvas), a fôrça centrípeta é exercida pela reação do piso sôbre os patins.

PROBLEMA 10

A que altura acima da superfície da Terra a fôrça de gravidade que age sôbre um foguete é igual à metade da que atua ao nível do mar?

Como a fôrça gravitacional varia com $1/R^2$, a fôrça será menor de um fator 2, quando $1/R^2$ fôr menor de um fator 2, em relação a $1/R_T^2$, onde R_T = raio da Terra. Portanto, $\frac{1}{R_T^2} = 2 \times \frac{1}{R^2}$, e $R = \sqrt{2} \times R_T$. Se $R_T = 6{,}4 \times 10^6$m, $\sqrt{2} \times R_T = 9{,}0 \times 10^6$m. A altura acima do nível do mar, na qual a fôrça da gravidade se reduziria à metade, é, portanto: $R - R_T = 2{,}6 \times 10^6$ m.

PROBLEMA 11

(a) A que altura deve estar um satélite, movendo-se no plano do equador, para permanecer sôbre um mesmo lugar, no equador da Terra? Um modo de obter a resposta consiste em comparar êsse satélite com a Lua, que dista 59,5 raios terrestres do centro da Terra, e leva 27 dias para contorná-la.

(b) Qual a aceleração do satélite na direção da Terra?

(c) Usando a lei do inverso do quadrado e o valor de g na superfície da Terra, determine o campo gravitacional à altura do satélite. Compare com a resposta obtida em (b).

a) O satélite permanecerá imóvel relativamente a um ponto sôbre a superfície da Terra, se seu período T fôr o mesmo que o da Terra, aproximadamente, um dia (realmente, 365/366 do dia).

O raio da órbita do satélite pode ser encontrado pela terceira lei de Kepler e pela informação de que a Lua está a 59,5 raios terrestres do centro da Terra, e gira uma vez em cada 27 (27,3) dias. Seja R_s e R_l os raios da órbita do satélite e da órbita da Lua, e T_s e T_l seus períodos.

$$\frac{R_s^3}{T_s^2} = \frac{R_l^3}{T_l^2}$$

$$R_s = \left(\frac{R_l^3\, T_s^2}{T_l^2}\right)^{1/3} =$$

$$= \left[\frac{(59{,}5 \text{ raios da Terra})^3 \times (1 \text{ dia})^2}{(27 \text{ dias})^2}\right]^{1/3} = 6{,}6$$

raios da Terra.

Como o raio da Terra é $6{,}4 \times 10^6$ m, $R_s = 6{,}6 \times 6{,}4 \times 10^6$ m $= 4{,}2 \times 10^7$ m. A altura do satélite, acima da superfície da Terra, seria $4{,}2 \times 10^7$ m $- 6{,}4 \times 10^6$ m $= 3{,}6 \times 10^7$ m.

b) O satélite seria acelerado para a Terra com um valor:

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{4 \times \pi^2 \times 4{,}2 \times 10^7 \text{ m}}{(1 \times 24 \times 60 \times 60)^2 \text{ s}^2} =$$

$$= 0{,}22 \text{ m/s}^2.$$

c) A fôrça devido à gravidade e, portanto, a aceleração devido à gravidade é proporcional a $1/R^2$. Assim, a aceleração g, na altura do satélite e g, na superfície da Terra, estão relacionadas, como se seguem:

$$g_s = \frac{k}{R_s^2}; \quad g_t = \frac{k}{R_t^2}$$

$$\therefore g_s = \frac{g_t\, R_t^2}{R_s^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times$$

$$\times \left(\frac{6{,}4 \times 10^6 \text{ m}}{4{,}2 \times 10^7 \text{ m}}\right)^2 = 0{,}23 \text{ m/s}^2.$$

Portanto, vimos na parte (b) que se pode determinar a aceleração a partir de R e T, sem usar a lei do inverso do quadrado da fôrça, e, na parte (c), que podemos determinar a aceleração a partir de g, na superfície da Terra, utilizando a lei do inverso do quadrado. Êstes foram os dois métodos empregados por Newton, para calcular a aceleração da Lua (veja no texto, páginas 60-62).

PROBLEMA 12

Um satélite circunda a Terra em 98 minutos, à altura média de 500 km. Calcule a massa da Terra. As massas dos planêtas são realmente calculadas pelos movimentos dos satélites, e uma das razões para colocar em órbitas satélites artificiais da Terra é que se deseja obter um valor melhor para a massa da Terra. Como foi estabelecido na Seção 22-10, $G = 0{,}667 \times 10^{-10}$ m^3/kg.s^2.

A terceira lei de Kepler estabelece que R^3/T^2 é uma constante para os movimentos de todos os satélites, mas não especifica a natureza da constante.

Empregando a lei da gravitação universal, podemos igualar a fôrça centrípeta à fôrça gravitacional sôbre o satélite (se a órbita fôr conhecida). Logo, se designarmos a massa do satélite por m_s, e a da Terra por m_t,

$$\frac{m_s 4\pi^2 R_s}{T_s^2} = G\,\frac{m_s\, m_t}{R_s^2}$$

$$\therefore m_t = \frac{4\pi^2 R_s^3}{G\, T_s^2}.$$

Substituindo, $R = 6{,}37 \times 10^6 m + 5{,}00 \times 10^5 m = 6{,}87 \times 10^6 m$, e

$$T = 98 \times 60\ s = 5{,}88 \times 10^3\ s$$

$$m_t = \frac{4\pi^2 \times (6{,}87 \times 10^6 m)^3}{0{,}667 \times 10^{-10} \frac{m^3}{kg\ s^2} \times (5{,}88 \times 10^3 s)^2} =$$

$$= 5{,}5 \times 10^{24}\ kg.$$

PROBLEMA 13

(a) Sendo T o período de um satélite que circula pouco acima da superfície de um planêta cuja densidade média é ϱ, mostre que ϱT^2 é uma constante universal.

(b) Qual o valor desta constante?

a) Como no Problema 12, podemos escrever:

$$\frac{m_s 4\pi^2 R}{T^2} = G\,\frac{m_p\, m_s}{R^2}, \text{ e } m_p = \frac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2}.$$

Se $R \approx R_p$, raio do planeta, podemos escrever:

$$m_p = \frac{4\pi^2 R_p^3}{G\,T^2}.$$

Mas $m_p = \frac{4}{3}\pi R_p^3 \varrho$, onde ϱ = densidade.

Portanto,

$$\frac{4\pi R_p^3 \varrho}{3} = \frac{4\pi^2 R_p^3}{G T^2}.$$

Isolando ϱT^2, obtemos: $\varrho T^2 = \frac{3\pi}{G}$, o que demonstra a proposição acima, visto que G é uma constante universal.

b) Desenvolvendo,

$$\varrho T^2 = \frac{3\pi}{0{,}667 \times 10^{-10}\ m^3/kg\ s^2} = 1{,}41 \times 10^{11}\ kg\ s^2/m^3.$$

PROBLEMA 14

Calcule os períodos de um satélite numa órbita próxima à superfície: (a) da Terra, (b) do Sol.

Esta é uma seqüência simples do Problema 13, mas pode também ser feito diretamente.

Pelo Problema 13, sabemos que ϱT^2 é uma constante universal para um satélite movendo-se próximo à superfície de qualquer corpo. Assim,

$$\varrho_s T_s^2 = \varrho_t T_t^2 = 1{,}41 \times 10^{11}\ kg\ s^2/m^3.$$

Como $\varrho_t = 5{,}5 \times 10^3\ kg/m^3$, $T_t =$

$$= \left(\frac{1{,}41 \times 10^{11}\ kg\ s^2/m^3}{5{,}5 \times 10^3\ kg/m^3} \right)^{1/2} =$$

$$= 5{,}1 \times 10^3 s = 85\ min.$$

Tomando $\varrho_s \approx 1{,}4 \times 10^3\ kg/m^3$, $T_s =$

$$= \left(\frac{1{,}41 \times 10^{11}\ kg\ s^2/m^3}{1{,}4 \times 10^3\ kg/m^3} \right)^{1/2} \approx$$

$$\approx 10^4 s \approx 167\ min.$$

Considerando diretamente, a aceleração centrípeta na superfície da Terra é $9{,}8\ m/s^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$. $R_t = 6{,}4 \times 10^6 m$. Entretanto,

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times 6{,}4 \times 10^6}{9{,}8}} =$$

$$= 2\pi \times 0{,}81 \times 10^3 = 5{,}1 \times 10^3\ s.$$

Em geral, agora:

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = G\,\frac{m}{R^2}$$

Logo, $T^2 \propto R^3/m$. O raio do Sol é

$$\frac{7{,}0 \times 10^8\ m}{6{,}4 \times 10^6\ m} = 1{,}1 \times 10^2$$

vêzes o da Terra. A massa do Sol é

$$\frac{2{,}0 \times 10^{30}\ kg}{6{,}4 \times 10^6\ m} = \frac{1}{3} \times 10^6$$

vêzes a da Terra. Conseqüentemente, o período do movimento do satélite, na superfície do Sol, é $\sqrt{\frac{(1{,}1)^3 \times 10^6}{1/3 \times 10^6}} \approx 2$ vêzes o seu período na superfície da Terra, isto é, 10^4 segundos.

PROBLEMA 15

Determine o pêso de um homem de 100 kg nos planêtas com as seguintes massas e raios:

Marte	$6{,}4 \times 10^{23}$kg	$3{,}4 \times 10^{6}$m
Terra	$6{,}0 \times 10^{24}$kg	$6{,}4 \times 10^{6}$m
Júpiter	$1{,}9 \times 10^{27}$kg	$7{,}2 \times 10^{7}$m

Desde que o pêso é simplesmente a fôrça de gravidade sôbre o homem de 100 kg, empregando

$$P = F = \frac{Gm_p\, m}{R_p^2},$$

e substituindo a massa e o raio correspondentes de cada um dos três planêtas, determinamos que o homem de 100 kg pesa 360 newtons em Marte, 980 newtons na Terra, e 2 400 newtons em Júpiter.

PROBLEMA 16

Um rapaz de 70 kg está a um metro de uma moça de 60 kg. Calcule a fôrça de atração (gravitacional) entre êles.

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{R^2}$$

$$F = \frac{0{,}667 \times 10^{-10}\ \frac{\text{nt m}^2}{\text{kg}^2} \times 60\ \text{kg} \times 70\ \text{kg}}{1\ \text{m}^2}$$

$F = 2{,}8 \times 10^{-7}$ newtons.

Esta fôrça de atração é sòmente uma pequena fração do pêso da moça ($F/P = 4{,}8 \times 10^{-10}$). Òbviamente, deve ser algo mais que a gravidade o que exerce atração mútua entre rapazes e moças!

PROBLEMA 17

Determine a atração gravitacional entre dois átomos de uma molécula de hidrogênio

Êste problema simples, envolvendo a lei da gravitação universal, tem por finalidade mostrar a insignificância das fôrças gravitacionais na escala atômica.

Ainda que a maior parte dos alunos provàvelmente se recorde que a massa de um átomo de hidrogênio foi determinada no Capítulo 8, ($1{,}67 \times 10^{-27}$ kg), muitos bons alunos claudicarão, quando tentarem encontrar um valor para R, a distância entre dois átomos na molécula de hidrogênio. Os dotados de boa memória podem se lembrar de que, no Capítulo 7, Seção 13, a dimensão linear de um átomo foi determinada como sendo cêrca de 1 Angstrom, e no Capítulo 8, Seção 4, aprendemos que a molécula de hidrogênio tem, aproximadamente, um comprimento duas vêzes maior que a largura. Daí, podem concluir que os centros dos átomos estão separados de, aproximadamente, 1 Angstrom. Ao designar êste problema, talvez você queira dizer aos alunos que o indício da distância está nos Capítulos 7 e 8 ou, simplesmente, deseje fornecer-lhes o número, $R \approx 10^{-10}$ m

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{R^2}$$

$$F = \frac{0{,}667 \times 10^{-10} \times (1{,}67 \times 10^{-27})^2}{(10^{-10})^2} \approx$$

$$\approx 1{,}9 \times 10^{-44}\ \text{newtons}$$

Para comparação, a fôrça elétrica entre um próton e um elétron, no átomo de hidrogênio, é cêrca de 10^{-8} newtons, aproximadamente, 10^{36} vêzes maior! As fôrças gravitacionais são completamente desprezíveis nos problemas atômicos.

PROBLEMA 18

(a) O diâmetro de um planêta é o dôbro do terrestre e sua massa é seis vêzes maior do que a da Terra. Qual a razão entre o campo gravitacional na sua superfície e o campo gravitacional na superfície da Terra?

(b) Qual a razão das densidades dos dois planêtas?

Êste problema refere-se à dependência entre a massa e a distância, na lei da gravitação. Êle conduz a um raciocínio mais abstrato (isto é, trata-se de um problema mais algébrico do que numérico) e fornece a prática com escala.

a) Considere-se uma massa, m, para teste, tanto na superfície da Terra como no planêta maior. Sejam M e R a massa e o raio da Terra.

Na Terra, $F_t = \frac{GmM}{R^2}$.

No planêta,

$$F_p = \frac{Gm\,6M}{(2R)^2} = \frac{6}{4} \times \frac{GmM}{R^2} \Big\} = 1{,}5\ F_t.$$

O campo gravitacional sôbre o planêta é 1,5 vêzes maior do que sôbre a Terra.

b) Como a densidade = massa/volume, e o volume é proporcional a R^3, a densidade do planêta é $6/2^3$ ou 3/4 da densidade da Terra.

PROBLEMA 19

Sôbre a Terra atua a fôrça gravitacional do Sol. Por que a Terra não cai sôbre o Sol? Esteja preparado para discutir sua resposta.

Êste problema é indicado, principalmente, para discussão em classe, a fim de auxiliar a esclarecer os alunos sôbre o movimento planetário.

A classe deve compreender que a Terra está caindo *livremente* para o Sol. Se ela iniciasse a queda a partir do repouso, cairia em linha reta no Sol. A situação real pode ser apreciada, pensando-se no problema de bombardear um alvo, de um avião. A bomba não é abandonada diretamente sôbre o alvo. Se isto fôsse feito, a bomba ultrapassaria o objetivo. Quanto mais rápido é o avião, maior é o desvio. O corpo em queda livre entra numa órbita, quando a velocidade está dentro de uma escala de valor tal, que:

1. A velocidade é tão grande, que o desvio faz com que a bomba não caia na Terra.

2. A velocidade não é suficientemente grande, para que a bomba escape completamente do campo gravitacional da Terra.

Do mesmo modo, a Terra não cai sôbre o Sol, simplesmente porque *está* em uma órbita estável; tem uma velocidade tangencial tal, que "erra" o Sol, quando cai sôbre êle.

PROBLEMA 20

(a) Compare as velocidades da Lua e da Terra em tôrno do Sol.

(b) Se a Terra pudesse ser removida repentinamente, sem perturbar o movimento da Lua, qual seria a trajetória subseqüente da Lua?

(c) Calcule a razão entre a fôrça de atração exercida pelo Sol sôbre a Lua e a fôrça exercida pela Terra sôbre a Lua.

(d) Por que o Sol não captura a Lua, subtraindo-a à influência da Terra?

Êste problema é um tanto difícil para os alunos trabalharem, em qualquer nível. O ponto mais importante a ressaltar é que, tanto a Terra como a Lua são atraídas pelo Sol. (A Terra e a Lua giram em tôrno de seu centro de massa comum, o qual, por sua vez, move-se em tôrno do Sol. O centro de massado sistema Terra-Lua é cêrca de 5/6 do raio da Terra, medido do centro da Terra).

a) Em um ano, tanto a Terra como a Lua completam uma volta em tôrno do Sol. Suas velocidades ao redor do Sol são as mesmas.

b) Pela terceira lei de Kepler sabemos que, para todos os objetos movendo-se em uma órbita estável em tôrno do Sol, o valor de R^3/T^2 será uma constante, *independente das massas dos objetos.* Portanto, como R e T são os mesmos, tanto para a Lua como para a Terra (e o sistema formado pelos dois), a órbita propícia deve ser uma órbita de equilíbrio, tanto para a Terra como para a Lua, separadamente ou juntas.

Alguns alunos talvez observem que a órbita da Lua em tôrno do Sol depende da posição exata da Lua em sua órbita, em tôrno da Terra, no instante em que a Terra é "removida". Isto é devido às pequenas variações na velocidade e na direção do movimento da Lua em tôrno do Sol. Em certos pontos, na órbita da Lua em tôrno da Terra, a Lua está se deslocando mais ràpidamente do que a Terra, no movimento Terra-Lua em tôrno do Sol; em outros pontos, mais vagarosamente. A curvatura da trajetória da Lua em tôrno do Sol também varia ligeiramente, com as diferentes posições da Lua relativamente à Terra e ao Sol. Contudo, comparado ao movimento Terra-Lua em tôrno do Sol, o movimento da Lua em tôrno da Terra não é

significativo. A velocidade do sistema Terra-Lua em tôrno do Sol é

$\frac{2\pi \times 1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}}{365 \times 8{,}6 \times 10^{4}\ \text{s}} = 3 \times 10^{4}$ m/s. A velocidade da Lua ao redor da Terra é: $\frac{2\pi \times 3{,}8 \times 10^{8}\ \text{m}}{27 \times 8{,}6 \times 10^{4}\ \text{s}} = 10^{3}$ m/s. Assim, a velocidade da Lua em tôrno do Sol é 30 vêzes maior do que a sua velocidade em tôrno da Terra. A destruição da Terra não variaria substancialmente o espaço de um ano, para um habitante na Lua!

c) Há duas alternativas:

(1) Podemos escrever:

$$\frac{F_{\text{Sol sôbre a Lua}}}{F_{\text{Terra sôbre a Lua}}} = \frac{m_{\text{Sol}}}{m_{\text{Terra}}} \times \frac{R^2_{\text{Lua — Terra}}}{R^2_{\text{Lua — Sol}}}$$

Ou (2), podemos expressar a fôrça entre a Lua e o Sol, F_{ls}, como:

$$F_{ls} = \frac{4\pi^2 M_l\ R_{ls}}{T_{ls}^2}, \text{ e}$$

$$F_{lt} = \frac{4\pi^2 M_l\ R_{lt}}{T_{lt}^2}.$$

Portanto,

$$\frac{F_{ls}}{F_{lt}} = \frac{R_{ls}}{T_{ls}^2} \times \frac{T_{lt}^2}{R_{ls}^2} =$$

$$= \frac{1{,}5 \times 10^{11}\ \text{m}}{3{,}8 \times 10^{8}\ \text{m}} \left(\frac{27{,}3\ \text{dias}}{365\ \text{dias}} \right)^2 = 2{,}2.$$

d) O Sol exerce fôrça tanto sôbre a Terra como sôbre a Lua. Se pudéssemos manter a atração do Sol para a Terra e a Lua, mas "desligar" a atração existente entre a Terra e a Lua, êles continuariam em órbita de mesmo raio, em tôrno do Sol e com a mesma velocidade. Quando adicionamos a atração entre a Terra e a Lua, a menos que circulem uma ao redor da outra elas se juntariam. Portanto, conclui-se que não há captura, mesmo sem uma atração entre a Lua e a Terra. Esta questão é, algumas vêzes, apresentada de forma um pouco diferente: "Quando a Lua está se movendo em direção ao Sol, por que o Sol não arrebata a Lua da Terra? Uma boa resposta é: "A Lua já está capturada".

PROBLEMA 21

Admita que a Terra seja perfeitamente redonda e tenha um raio de 6400 quilômetros.

(a) De quanto diminuiria o pêso aparente de um homem de 100 kg de massa, ao deslocar-se do polo para o equador, devido à rotação da Terra?

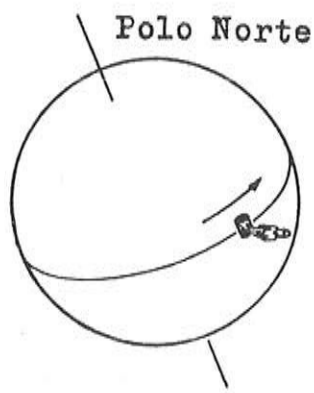
(b) Com que velocidade deveria girar a Terra, a fim de não exercer fôrça alguma sôbre um dinamômetro no equador?

(c) Quantas vêzes a velocidade de rotação em (b) é maior que a velocidade real?

Êste é um problema um tanto difícil, dirigido ao estudo das conseqüências da rotação da Terra. Estamos indagando sôbre o pêso *aparente* de um homem — a leitura em um dinamômetro no qual êle se pesa.

a) Suponha um homem sôbre uma balança (dinamômetro), primeiramente no polo, depois no equador.

No polo, o homem gira com a Terra uma vez em cada 24 horas, mas a sua rotação não resulta numa aceleração para o centro da Terra. Êle está num equilíbrio estático. A fôrça da balança, para cima, F_b, equilibra a fôrça da gravidade, F_g, para baixo, resultando $F_g = F_b$. A fôrça gravitacional, $F_g = mg = 100\ \text{kg} \times 9{,}8$ newtons/kg $= 980$ newtons. A leitura na balança será 980 newtons.



Agora, vamos considerar o homem numa balança no equador. As fôrças atuantes sôbre o homem são: F_g, fôrça da gravidade dirigida

para o centro da Terra e F_b, fôrça exercida pela balança em sentido contrário a F_g. Mas, neste caso, $F_g > F_b$. Isto porque o homem, descrevendo um movimento circular uniforme, é acelerado em direção ao centro da Terra. A fôrça necessária para produzir esta aceleração é suprida pela fôrça gravitacional, F_g. Se esta fôrça, F_g, não se opusesse à fôrça da balança, resultaria numa aceleração de 9,8 m/s². Mas ela é anulada, em parte, pela balança, limitando a aceleração para $\frac{4\pi^2R}{T^2}$. Portanto, a fôrça da balança para cima, F_b, que é oposta a F_g para baixo, deve ser tal que a resultante para baixo tenha um módulo que forneça uma aceleração de $\frac{4\pi^2R}{T^2}$. A fôrça resultante desta aceleração é: $\frac{m\,4\pi^2R}{T^2}$. Logo, $F_g - F_b = \frac{4\pi^2R\,m}{T^2} =$

$$= \frac{4\pi^2 \times (6{,}4 \times 10^6\ \text{m}) \times 100\ \text{kg}}{24^2 \times 60^4\ \text{s}^2} = 3{,}4\ \text{newtons.}$$

O pêso aparente do homem no equador, medido na balança, deve ser 3,4 newtons menos do que os 980 newtons lidos no polo. Isto representaria uma "perda" de 0,35 %.

b) Se o homem não exercesse fôrça alguma sôbre uma balança no equador, seria necessário que: $\frac{4\pi^2R}{T^2} = \frac{v^2}{R} = g$. Então:

$v^2 = Rg = 6{,}4 \times 10^6\ \text{m} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2$, e

$v = 7{,}9 \times 10^3\ \text{m/s}$.

O período T', necessário para esta velocidade, seria:

$$T' = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 6{,}4 \times 10^6\ \text{m}}{7{,}9 \times 10^3\ \text{m/s}} =$$

$$= 5{,}1 \times 10^3\ \text{s} = 1{,}4\ \text{horas.}$$

c) A velocidade determinada na parte (b) e a velocidade real serão inversamente proporcionais aos respectivos períodos:

$$\frac{v'}{v_{real}} = \frac{T}{T'} = \frac{24}{1{,}4} = 17.$$

PROBLEMA 22

Duas estrêlas que compõem uma estrêla dupla, bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, giram em órbitas circulares, permanecendo sempre separadas pela mesma distância.

(a) Esboce suas órbitas, se elas têm massas iguais;

(b) Se uma tem o dôbro da massa da outra.

(c) Qual a razão entre os raios de suas órbitas, em cada caso?

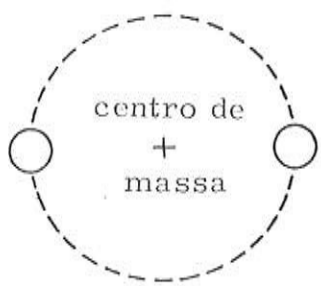
Êste problema, também um tanto difícil, auxilia os alunos a pensar a respeito do centro de massa — um dos assuntos do próximo capítulo. O problema ilustra que, quando um par de corpos gira, um ao redor do outro, realmente ambos se movem. Portanto, ainda que freqüentemente se diga que a Lua gira ao redor da Terra uma vez por mês, na verdade, ambas giram em tôrno de um centro comum de massa, uma vez por mês.

Para êste problema, o importante é observar que as duas estrêlas sempre permanecem separadas por uma mesma distância. Isto significa que, onde quer que estejam os seus centros de rotação, êles devem ser os mesmos, e as estrêlas devem ter o mesmo período de rotação. Atualmente sabemos, de modo geral, que a fôrça de atração da estrêla 1 pela estrêla 2 é igual à fôrça de atração da estrêla 2 pela estrêla 1, e esta é a causa da aceleração centrípeta de cada uma delas:

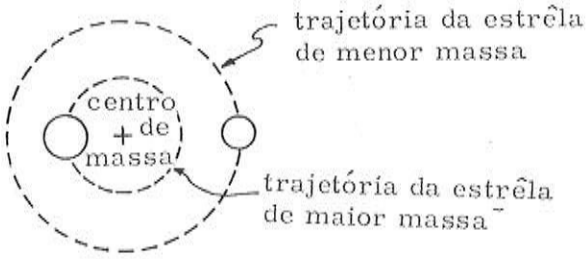
$$F = \frac{m_1\,4\pi^2R_1}{T^2} = \frac{m_2\,4\pi^2R_2}{T^2}$$

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

a) Se as estrêlas têm massas iguais, o centro em tôrno do qual elas giram é o ponto médio entre elas. Suas trajetórias são círculos em tôrno de centro de massa. Desde que são iguais as distâncias ao centro de massa, ambos os círculos têm o mesmo raio.



b) Se a massa de uma estrêla é o dôbro da estrêla de menor massa, esta fica duas vêzes mais afastada do centro de rotação do que a estrêla de massa maior.



c) A razão do raio das duas órbitas, no caso das estrêlas de massas iguais, é 1/1. No caso das estrêlas cuja razão das massas é 2/1, a razão dos raios é de 1/2. A razão das massas é o inverso da razão dos raios.

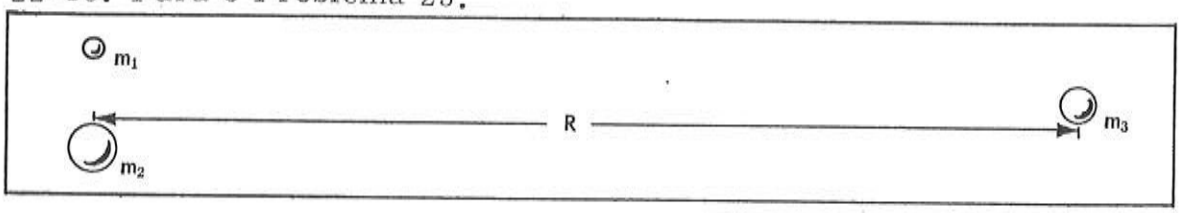
PROBLEMA 23

Admita que a atração gravitacional exercida por m sôbre m_3 na Fig. 22-19 não é influenciada pela presença de m_2, e que atração de m_2 sôbre m_3 não é alterada pela presença de m_1.

(a) Usando a lei de gravitação universal, mostre que a fôrça de atração exercida sôbre m_3 pelo "corpo" único constituído por m_1 e m_2 é proporcional à sua massa.

(b) Se m_1 e m_2 estivessem muito afastados entre si, em relação a suas distâncias até m_3, atuariam elas como corpo único?

22-19. Para o Problema 23.



a) Sejam F_{13} a fôrça da massa 1 sôbre a massa 3, e F_{23} a fôrça da massa 2 sôbre a massa 3. Se as massas estão bem próximas, como mostra a Fig. 22-19,R será o mesmo para ambas as fôrças. As intensidades destas fôrças, separadamente, serão dadas por:

$$F_{13} = \frac{G m_1 m_3}{R^2}$$

$$F_{23} = \frac{G m_2 m_3}{R^2}.$$

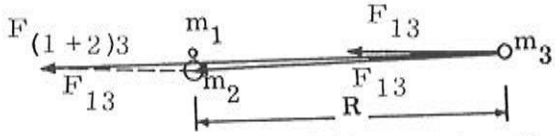
Se as massas 1 e 2 estão bem próximas, comparadas à distância R, F_{13} e F_{23} estão pràticamente na mesma direção, e a soma vetorial é igual à soma aritmética para essas fôrças. Portanto,

$$F_{(1+2)3} = F_{13} + F_{23} = \frac{G m_1 m_3}{R^2} + \frac{G m_2 m_3}{R^2} =$$

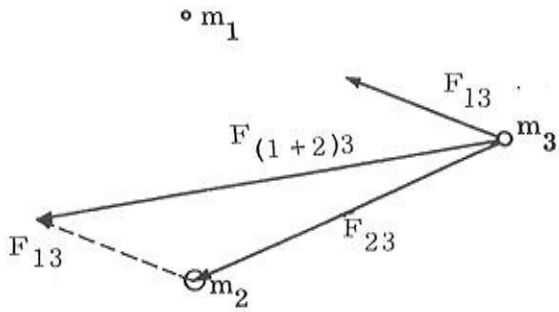
$$= \frac{G (m_1 + m_2) m_3}{R^2}.$$

Logo, se m_1 e m_2 estão bem próximas, a fôrça sôbre m_3 é equivalente à fôrça resultante de um corpo único, de massa $m_1 + m_2$.

b) Se m_1 e m_2 estiverem bem afastadas em comparação com R, que representa suas distâncias a m_3, não atuarão como um corpo único equivalente a $m_1 + m_2$ a uma distância R. Isto pode ser verificado por um diagrama vetorial. Consideremos que $m_2 = 2m_1$; então, $F_{23} = 2F_{13}$.



(1) m_1 e m_2 juntos relativamente a R.



(2) m_1 e m_2 separados relativamente a R.

Evidentemente, a intensidade de $F_{(1+2)3}$, na Figura (2) acima, não é a mesma intensidade apresentada na Figura (1), Assim, quando m_1 e m_2 estão bastante afastadas, não atuam como um corpo único equivalente a $m_1 + m_2$, situado a uma distância R.

CAPÍTULO 23

QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUA CONSERVAÇÃO

RESUMO DO CAPÍTULO

O Capítulo 23 introduz o conceito da quantidade de movimento e mostra que a quantidade de movimento total de um sistema isolado permanece constante. Além da utilidade prática da conservação da quantidade de movimento, como um instrumento na resolução de problemas específicos de mecânica, esta idéia ocupa seu lugar entre as leis da conservação como uma entidade que mais permanece constante, a despeito da rotação e oscilação das partículas submicroscópicas e dos freqüentes movimentos complicados da interação da matéria como um todo. A quantidade de movimento é uma das conquistas intelectuais estabelecidas, a partir da qual o homem procura resolver os seus problemas e ampliar o seu contrôle do mundo físico.

As Seções 1 e 2 introduzem a noção da quantidade de movimento pela análise da lei de Newton, na forma $\vec{F}\triangle t = m\triangle\vec{v}$. Nesta forma, a lei de Newton indica que o valor do movimento é medido também pelo impulso, $\vec{F}\triangle t$, ou quantidade de movimento, $m\triangle\vec{v}$. O conceito de impulso, em si, não é particularmente importante, exceto como um guia da definição da quantidade de movimento.

Seções 3 e 4. A Seção 3 discute meticulosamente, a quantidade de movimento na interação de dois corpos. Esta discussão nos conduz à lei da conservação da quantidade de movimento, na Seção 4: para um sistema de dois corpos isolados, a quantidade de movimento não varia, isto é, a quantidade de movimento conserva-se. Estas duas seções apresentam as noções fundamentais do capítulo.

A Seção 5 é uma aplicação da conservação da quantidade de movimento aos movimentos de foguetes. Evidentemente, esta matéria será de grande interêsse para a maioria dos alunos. Contudo, não é de vital importância para a seqüência das idéias do curso.

A Seção 6, através de considerações sôbre a localização e o comportamento do centro de massa, esclarece a aplicação da lei de Newton, ampliando um pouco mais o assunto em estudo. Entretanto, na seqüência lógica dêste curso, a idéia de centro de massa pode ser tratada superficialmente, sem grande falha no entendimento dos tópicos posteriores.

A Seção 7 estende a conservação da quantidade de movimento de dois corpos para um maior número de corpos. É importante que os alunos saibam que a conservação da quantidade de movimento se aplica a sistemas de mais de dois corpos. Todavia, não será necessária muita explicação do assunto, se êles realmente entenderam a Seção 4.

A Seção 8 discute a terceira lei de Newton: Se B exerce uma fôrça $\vec{F}$ sôbre A, então, A deve exercer uma fôrça $-\vec{F}$ sôbre B. No desenvolvimento dêste curso, esta lei surge naturalmente, da conservação da quantidade de movimento.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 23

A tabela seguinte sugere possíveis planejamentos para êste capítulo, de acôrdo com os planejamentos apresentados na seção introdutória para a Parte III. As seções entre colchêtes [ ] podem ser dadas com menor ênfase ou omitidas nas discussões em classe, sem que haja perda de continuidade. Embora estas seções possam ser tratadas sem muita ênfase, em classe, devem ser assinaladas como leitura para casa.

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp.
Secs. 1, 2	2	1	III-8	2	1	III-8
Secs. 3, 4	3	2*	III-9 III-10	2	1*	III-9
Sec. [5]	2	0		2**	0	
Sec. [6]	2	0				
Sec. 7	1	0		1	0	
Sec. 8	1	0		1	0	

MATERIAIS REFERENTES AO CAP. 23

Laboratório. A Experiência III-8, *Variação da Quantidade de Movimento numa Explosão,* pode ser empregada em prévias discussões de classe, como uma introdução ao conceito da variação da quantidade de movimento em um sistema de dois corpos, ou feita após a tarefa da primeira aula da Seção 3.

A Experiência III-9, *O Carrinho e o Tijolo,* mostra que a quantidade de movimento é conservada numa colisão de dois corpos, mesmo quando a quantidade de movimento inicial não é zero. A experiência pode ser feita durante ou após a Seção 4.

A Experiência III-10, *Uma Colisão em Duas Dimensões,* dá ênfase à natureza vetorial da conservação da quantidade de movimento e à conservação do vetor soma das quantidades de movimento individuais. Pode-se fazer esta experiência durante ou após a Seção 4, ou será poupada para servir de base a nosso trabalho sôbre a quantidade de movimento e como guia para a conservação da energia.

Casa, Classe e Laboratório. Ainda que você não tenha relevado o conteúdo das Seções de 5 a 8, em suas aulas, os problemas para estas seções devem ser pedidos. As técnicas desenvolvidas nas Seções de 1 a 4, mais o vocabulário das seções posteriores são suficientes. Os Problemas 11 e 12 evidenciam que, em alguns casos, tanto a conservação da quantidade de movimento como F = ma podem ser igualmente utilizadas.

A tabela adiante classifica os problemas conforme seus níveis avaliados de dificuldade e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente apropriados para discussão em classe. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas dos problemas são apresentadas nas páginas do CCL.

Seção 1 — Impulso

Seção 2 — Quantidade de Movimento

FINALIDADE. Introduzir a noção de impulso e utilizá-la para definir a quantidade de movimento; demonstrar que a quantidade de movimento é uma grandeza dinâmica e como diferenciá-la de uma grandeza cinemática, quantitativamente.

---

* Êste trabalho de laboratório pode ser planejado aqui ou mais adiante, neste mesmo capítulo.

** Tratamento para ambas as Seções 5 e 6.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de aula
1, 2	1, 2, 3, 5	4*, 6*, 7	8*	6*
3, 4	10, 11*, 12, 13, 14, 18*	9*, 15*, 17, 19	16	10, 13, 16
5		20*		20
6	21, 23*		22*	22
7		24*	25, 26*	24*, 25, 26*

CONTEÚDO a. O produto $\vec{F}\triangle t$ é definido como impulso.

b. Impulso é uma grandeza vetorial.

c. É freqüentemente possível medir o produto $\vec{F}\triangle t$, embora sem conhecer $\vec{F}$ ou $\triangle t$, separadamente.

d. Como o impulso, $\vec{F}\triangle t$, foi medido pela variação da quantidade $m\vec{v}$, é conveniente tratar $m\vec{v}$ como um conceito específico, $\vec{p}$ (quantidade de movimento).

e. A quantidade de movimento é uma grandeza vetorial.

f. A fôrça é igual à razão de variação da quantidade de movimento pelo intervalo de tempo: $F = \triangle p/\triangle t$.

ÊNFASE. A quantidade de movimento é um instrumento físico extremamente importante. Não será proveitoso, contudo, deter-se demasiadamente nestas seções, antes de ver a Seção 3. A utilidade da noção da quantidade de movimento começa a tornar-se evidente na Seção 3; assim, é melhor prosseguir com a matéria e, depois, retornar a estas seções, se necessário fôr.

LABORATÓRIO. A Experiência III-8, *Variações da Quantidade de Movimento numa Explosão* deve ser dada imediatamente, após terem sido apresentados aos alunos os conceitos da quantidade de movimento e do impulso.

DESENVOLVIMENTO. 1) Ao introduzirmos o conceito de impulso e mostrarmos que o impulso causa a variação de mv, isto é,

$$\vec{F}\triangle t = m\triangle\vec{v},$$

devemos lembrar aos alunos que, na fórmula acima, não há nada de nôvo. Refira-se às Seções de 20-8 a 20-10. Impulso = variação da quantidade de movimento está implícito na própria lei de Newton. A fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$ aplica-se a intervalos de tempo infinitesimais, e a fórmula $\vec{F}\triangle t = m\triangle\vec{v}$ aplica-se a incrementos finitos de tempo e velocidade. Pode frisar isto perguntando sôbre a aceleração. Por exemplo, peça o Problema 5 do CCL:

Um esquiador move-se a 10 m/s e pára em 1,5 segundos. Qual é a sua aceleração média? ($10/1{,}5 = 6{,}6$ m/s^2). Se o esquiador tem uma massa de 75 kg, qual é a fôrça média que atua sôbre êle? ($F = ma = 75 \times 10/1{,}5 = 500$ newtons). Que impulso esta fôrça fornece? (Impulso $= F\triangle t = 500 \times 1{,}5 = 750$ newton-seg).

Por outro lado, o impulso pode ser determinado diretamente, uma vez que $m\triangle v = 75 \times 10 = 750$ newton-seg ou kg m/s. Assim, "impulso = variação de mv" é exatamente uma nova maneira de escrever $F = ma$ — um modo mais simples para certas aplicações.

2) Talvez seja útil, aqui, alguma prática. Forneça aos alunos três ou quatro quan-

tidades, $\vec{F}$, $\triangle t$, m, e $\triangle \vec{v}$, e peça que calculem $\vec{a}$; assim, êles podem usar ou $\vec{a} = \triangle \vec{v}/\triangle t$ ou $\vec{a} = \vec{F}/m$; finalmente, peça a quarta quantidade. Faça suas questões numèricamente simples e tabele os quatro valôres e os dois produtos $\vec{F}\triangle t$ e $m\triangle \vec{v}$.

Por exemplo, suponhamos que você deseje imprimir a um objeto de 1 kg uma velocidade de 12 m/s em 3 segundos. Qual é a aceleração uniforme e a fôrça necessária para isso?

$$a = \frac{12}{3} = 4 \text{ m/s}^2$$

$$F = 1 \times 4 = 4 \text{ newtons}$$

$$m\triangle v = 12 \text{ kg m/s};$$

$$F\triangle t = 4 \times 3 = 12 \text{ newton-segundos.}$$

Qual seriam as respostas correspondentes, se você desejasse atingir essa velocidade

em 1 segundo ?	$a = 12 \text{ m/s}^2$	$F = 12$ nt
em 2 segundos?	$a = 6 \text{ m/s}^2$	$F = 6$ nt
em 4 segundos?	$a = 3 \text{ m/s}^2$	$F = 3$ nt
em 6 segundos?	$a = 2 \text{ m/s}^2$	$F = 2$ nt
em 12 segundos?	$a = 1 \text{ m/s}^2$	$F = 1$ nt

Naturalmente, $m\triangle v$ permanece constante, igual a 12 kg m/s; mas observe que $F\triangle t$ também permanece 12 newton-seg. Após obter êste conjunto de valôres, pode indagar diretamente a respeito das fôrças. Qual é a fôrça necessária, se $t = 1/2$ s? (24 nt). Qual a fôrça necessária, se $t = 20$ segundos? (0,6 nt).

Fàcilmente, você poderá propor problemas similares. Mantenha um padrão de perguntas sôbre $\vec{a}$, com algumas variações nas condições dadas, de tal modo que os valôres numéricos de $\vec{F}\triangle t$ e $m\triangle \vec{v}$ sejam imediatos; então, pergunte pela incógnita, sem se importar com $\vec{a}$.

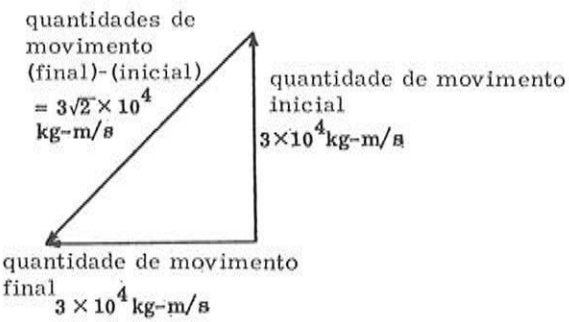
3) Uma vez verificado pelos alunos que $m\triangle \vec{v}$ determina $\vec{F}\triangle t$, e vice-versa, pergunte-lhes se (na prática!) os valôres individuais de $\vec{F}$ e $\triangle t$ (ou m e $\triangle \vec{v}$) fazem alguma diferença Por exemplo, retorne ao Problema 5, no qual o esquiador de 75 kg, movendo-se a 10 m/s, acaba parando em um banco de neve em 1,5 segundo. Já que o impulso necessário para parar o esquiador era de 750 newton-seg, 500 newtons foram exercidos pelo banco de neve. Haveria alguma diferença no impulso, se a neve fôsse mais densa e parasse o esquiador em 1/2 s? (Não). O esquiador sentiria alguma diferença? (Sim! A fôrça seria muito maior, possìvelmente, suficiente para fraturar um osso).

4) Procure discutir pelo menos uma situação, como a do Problema 7, onde o impulso é fornecido por uma fôrça relativamente pequena, atuando por um largo intervalo de tempo. Os alunos não devem imaginar que o impulso seja uma pancada rápida.

5) Durante as aulas, deve-se dar ênfase tanto ao módulo como à natureza vetorial da quantidade de movimento. Por exemplo, um veículo de 2 toneladas, movendo-se a 30 km/h para o *norte*, não tem a mesma quantidade de movimento de um outro de 1 tonelada, movendo-se a 60 km/h para o *sul*.

Talvez você queira introduzir variações na quantidade de movimento, ainda nesta altura. Assim, um carro de 1 1/2 ton., dirigindo-se para o norte a 40 km/h, repentinamente, vira para oeste a 40 km/h. Qual é a variação na quantidade de movimento? Se o pneu ranger um pouco, ótimo. Isto evidencia que deve atuar uma *fôrça* para variar a quantidade de movimento de um objeto.

O exemplo acima pode ser resolvido quantitativamente. Consideremos um outro exemplo: Um carro de 1 500 kg desloca-se a 20 m/s. Qual é o impulso necessário para mudar sua direção de norte para oeste? O impulso necessário é $3\sqrt{2} \times 10^4$ kg m/s ou newton-seg, dirigido para sudoeste.



COMENTÁRIOS. Alguns alunos aceitam a natureza vetorial do impulso, sem necessitarem do desenvolvimento detalhado apresentado no texto. A apresentação dêste assunto à sua classe depende de quanto tempo você dedicou ao Capítulo 6, sôbre vetores. Por exemplo, se seus alunos sabem que o produto de um escalar por um vetor é um outro vetor, podem concluir fàcilmente que $\vec{F}\triangle t$ é um vetor. A fôrça sempre tem uma direção. Incluindo o tempo, a fôrça não varia a sua direção natural. (A equação $\vec{F}\triangle t = m\triangle\vec{v}$ perderia seu significado, se $\vec{F}\triangle t$ não fôsse um vetor e $m\triangle\vec{v}$ fôsse um vetor). Se não especificarmos a direção da fôrça, não conheceremos a direção da variação da velocidade resultante.

Se você ressaltou a interpretação gráfica da distância e da velocidade no Capítulo 5, seus alunos talvez tenham uma intuição extra do efeito aditivo de muitos impulsos, caso você faça uma revisão dos gráficos. A representação gráfica do impulso como a área sob a curva de F em função de t não deve ser realçada, simplesmente para capacitar os alunos a fazer cálculos envolvendo o impulso. Realmente, a importância do conceito de impulso está no fato de que, embora não conheçamos $\vec{F}$ ou $\triangle t$, temos um real elemento experimental no produto que corresponde à variação da quantidade de movimento de um objeto (note que medimos $m\triangle\vec{v}$ e inferimos $\vec{F}\triangle t$). Por isso, a representação gráfica do impulso não é de vital importância. Além disso, os alunos, em sua maioria, não compreenderão como representar gràficamente o impulso total, produzido por uma fôrça que varia de direção. (Êste não é o momento oportuno para introduzir a idéia de gráfico com as três componentes, x, y, e z, das fôrças).

* * *

Além de se lembrarem que a quantidade de movimento é $m\vec{v}$, os alunos devem ver que dois *objetos quaisquer que têm a mesma quantidade de movimento*, não importando como foi adquirida, *possuem uma propriedade em comum*. Esta propriedade em comum é de que ambas podem ser paradas pelo mesmo impulso, $\vec{F}\triangle t$. Os alunos devem perceber que o produto $m \times \vec{v}$ é o importante. Uma dada quantidade de movimento pode ser produzida por um infinito número de combinações de massas e velocidades. *Tôdas* as combinações, que resultam na mesma quantidade de movimento, têm uma propriedade em comum. Todos êsses objetos podem ser levados ao repouso pelo mesmo impulso, $\vec{F}\triangle t$.

Ainda que dois objetos tenham a mesma velocidade, não há uma relação simples entre suas velocidades e os impulsos necessários para pará-los; o impulso dependeria de suas massas.

(Embora não mencionados aqui, capítulos subseqüentes mostrarão que a energia cinética é uma outra propriedade dinâmica; dois objetos com iguais energias cinéticas podem ser parados pela mesma quantidade de trabalho, $F\triangle x$).

* * *

A unidade empregada para o impulso serve, igualmente, para a quantidade de movimento. A esta unidade não foi dado um nome especial, e ela pode ser apresentada de duas maneiras simples com unidades conhecidas, evitando-se, dêsse modo, aborrecimentos para os alunos. Quando se usa $\vec{F}\triangle t$ para calcular o impulso ou a quantidade de movimento, é mais conveniente utilizar a unidade newton-seg. Por outro lado, se se aplicar $m\triangle\vec{v}$, o modo mais simples de expressar a unidade é kg m/s. Êstes dois modos de escrever a unidade são idênticos; 1 newton-seg = 1 kg m/s. Isto é evidente, porque 1 newton = 1 kg-m/s^2.

PRECAUÇÃO. Os alunos devem ter uma idéia segura da definição da quantidade de movimento, de que ela é uma grandeza vetorial, e que a quantidade de movimento é modificada pelo impulso — ação da fôrça pelo tempo. Contudo, nesta altura do capítulo, êles estão sòmente aprendendo definições sem a motivação da física atual. Não protele demasiadamente estas novas formas de expressar as velhas idéias. Forneça-lhes sòmente o suficiente, porém de maneira segura, para prosseguirem nas duas seções seguintes que constituem a essência do capítulo.

PROBLEMAS COMPLEMENTARES. 1. Uma fôrça de 10 newtons atua em um corpo, durante

um tempo total de 5 segundos. Qual é a intensidade do impulso? Qual é a variação da quantidade de movimento do corpo? Se o corpo estivesse inicialmente em repouso e tivesse uma massa de 2 kg, qual seria a sua velocidade final? (50 newton-seg; 50 kg m/s; 25 m/s).

2. Uma bola de gôlfe de massa 100 gramas é golpeada por um taco. Após o impacto, a bola move-se com uma velocidade de 50 m/s. Se a bola e o taco permaneceram em contato por 5×10^{-3} segundos, que fôrça média atuou sôbre a bola? (1 000 newtons).

3. Duas fôrças atuam sôbre uma massa de 10 kg, que está inicialmente em repouso. Primeiramente, o corpo é submetido a uma fôrça de 20 newtons por 3 segundos, que atua no sentido norte. Um segundo após a aplicação da primeira fôrça, o corpo é submetido a uma fôrça de 30 newtons que atua no sentido leste, por 2 segundos.

(a) Qual é a componente do impulso na direção norte? (60 newton-seg).

(b) Qual é a componente do impulso na direção leste? (60 newton-seg).

(c) Qual é a quantidade de movimento final do corpo? ($60\sqrt{2}$ kg m/s, nordeste).

(d) Se a fôrça no sentido leste fôsse aplicada, inicialmente no mesmo instante da fôrça no sentido norte, ao invés de 1 segundo mais tarde, qual seria a quantidade de movimento final do corpo? [Idêntica à de (c)].

4. Uma bola de 2 kg, movendo-se com uma velocidade inicial de 3 m/s para a direita, é empurrada por uma fôrça constante F para a esquerda, durante um período de 3 segundos. Após a interação, a bola move-se para a esquerda com uma velocidade de 6 m/s. Qual é a intensidade de F ? (6 newtons).

5. Um corpo é submetido a uma fôrça variável que aumenta linearmente com o tempo, de zero a 10 newtons em 0,1 segundo, permanece constante a 10 newtons por 0,5 segundos e, então, decresce linearmente para zero em 0,2 segundos. Qual é o impulso total? Se o corpo tem uma massa de 3 kg e estava inicialmente em repouso, qual é sua velocidade final? (6,5 newton-seg; 2,17 m/s).

Seção 3 — Variação da Quantidade de Movimento Quando Dois Corpos Interagem

Seção 4 — A Lei da Conservação da Quantidade de Movimento

FINALIDADE. Apresentar a lei da conservação da quantidade de movimento e desenvolver algumas idéias sôbre sua aplicação.

CONTEÚDO a. Quando dois objetos "explodem" separadamente, a partir do repouso, as quantidades de movimento dêstes objetos são iguais e de sentidos contrários.

b. Em uma colisão frontal de duas massas iguais, a quantidade de movimento de uma é transferida completamente para a outra.

c. Em uma colisão não frontal, a *variação* na quantidade de movimento de um objeto é igual e oposta em sentido à variação na quantidade de movimento do outro objeto.

d. Outra maneira de enunciar os resultados acima é dizer que a quantidade de movimento total de dois corpos é a mesma, antes e depois da colisão.

e. Esta lei é verificada para situações que envolvem maior generalidade.

ÊNFASE. Estas seções contêm as noções fundamentais do capítulo. Se fôrem entendidas inteiramente, seu trabalho estará pràticamente realizado. As seções ulteriores são meros casos particulares ou generalizações da lei da quantidade de movimento. Necessita-se, pelo menos, três períodos de aula ou mais para a apresentação da matéria destas duas seções.

LABORATÓRIO. A Experiência III-9, *O Carrinho e o Tijolo*, pode ser realizada após estas seções, em qualquer oportunidade no decorrer dêste capítulo.

COMENTÁRIO. É importante compreender que, da forma como é apresentada neste curso, a conservação da quantidade de movimento é uma lei empìricamente estabelecida, e não pode ser provada ou deduzida por qualquer seqüência de argumentos lógicos. Ainda que a prova possa estar baseada na terceira lei de Newton, o texto estabelece a conservação da quantidade de

movimento em bases puramente empíricas, e daí deduz a terceira lei de Newton * (na Seção 8). Tal maneira de estudar êste assunto é especialmente apropriada para conduzir os alunos à observação e ao uso da conservação da quantidade de movimento, na análise de colisões entre partículas atômicas, onde pouco ou nada se conhece sôbre as fôrças de interação.

DESENVOLVIMENTO. O desenvolvimento do conteúdo destas seções pode ser tratado em três etapas:

1) Discussão das variações observadas nas quantidades de movimento de dois corpos explodindo ou colidindo, e desenvolvimento da idéia de conservação da quantidade de movimento.

2) Prática na aplicação e compreensão da lei da conservação da quantidade de movimento.

3) Introdução do conceito de um sistema isolado. Êste último ponto não foi discutido explìcitamente no texto, mas deve ser desenvolvido em aula. Sugestões sôbre êste assunto são dadas quase no fim destas seções do guia.

1) A fim de relevar o fato de que a conservação da quantidade de movimento é uma lei que está baseada diretamente em observações experimentais, é útil dirigir a atenção dos alunos para a evidência direta dada no texto, Figura 23-7. Embora esta figura seja analisada no texto, merece uma atenção adicional durante a discussão em classe, para se certificar de que os alunos interpretam por si mesmos a experiência.

Os alunos podem analisar o movimento de cada disco, durante dez intervalos de tempo (ou 2 segundos). O disco maior percorre 20,0 cm; o disco menor percorre 41,2 cm. Peça-lhes estas distâncias.

Há duas características qualitativas na Fig. 23-7 que talvez não sejam entendidas por certos alunos:

a. A seqüência fotográfica formada pelo disco menor parece estranha, porque êle se moveu quase exatamente meio diâmetro, em cada intervalo, entre as exposições sucessivas.

b. O movimento durante o "primeiro" intervalo de tempo é menor do que nos outros, porque a explosão ocorreu aproximadamente no meio, entre dois flashes.

Aqui estão duas questões sôbre a Fig. 23-7, que você pode pedir aos alunos, a fim de assegurar-se de que êles "vêem" corretamente a figura:

a. Precise o momento da explosão, relativamente aos flashes.

Os alunos, ao avaliarem isto pela observação das posições do disco menor, fàcilmente verão que a explosão ocorreu no intervalo médio entre dois flashes. Entretanto, os alunos que observarem as as posições do disco maior, talvez pensem que a explosão ocorreu um pouco antes de um flashe. Êste êrro comum ocorre devido ao fato de que o espaço escuro, entre as duas primeiras posições do disco maior, aparece bem menor. Peça aos alunos que expliquem isto; pode assinalar que o disco maior se moveu não sòmente através dêste espaço escuro, mas também, através de uma distância igual à largura do círculo branco.

b. Empregando apenas a velocidade dada no texto, determine o tamanho do disco menor.

Isto pode ser feito fácil e ràpidamente, se os alunos aproveitarem o fato de que o disco menor, afortunadamente, caminha um diâmetro em 2 flashes. Como $v = 0{,}206$ m/s e como 2 flashes correspondem a 2/5 do segundo, a distância percorrida entre dois flashes ou o diâmetro é $2/5\ s \times 20{,}6\ cm/s = 8{,}24$ cm.

Após breve discussão preliminar, tal como a mostrada acima, a semelhança entre as Figuras 23-7 e 23-5 pode ser apontada, e discutida a variação da quantidade de movimento real. Outra alternativa para uma discussão em classe pode se basear nos dados colhidos pelos alunos na Experiência III-8, Variação da Quantidade de Movimento numa Explosão.

Será interessante analisar a variação da quantidade de movimento nas Figuras 23-9 e 23-11 ou, alternativamente, discutir o Problema 16 do CCL.

Após a discussão das *variações* da quantidade de movimento em tais situações e o desenvolvimento da lei da conservação da quantidade de movimento, você poderá retornar a cada exem-

* Numa interação entre dois corpos, as fôrças são iguais e opostas.

plo mencionado e analisar o assunto do ponto de vista da conservação. Na verdade, estará apenas repetindo seus exercícios anteriores, porém, agora, observando a interação como um todo do ponto de vista da quantidade de movimento, ao invés de considerar sòmente a quantidade de movimento individual.

2) O passo seguinte é a prática individual. Embora seja fácil para os alunos aprenderem como usar a conservação da quantidade de movimento, você deve dar-lhes alguns exemplos simples, semelhantes aos descritos no texto, ou problemas, tais como os de 9 a 19 do CCL. Inicialmente, empregue valôres numéricos simples e peça respostas numéricas. Tal emprêgo da conservação da quantidade de movimento não trará dificuldade para muitos alunos, mas não é esta a ocasião para tentar discutir questões mais sutis, a não ser que êles tenham dominado a aplicação direta da conservação da quantidade de movimento.

2) O último passo, no entendimento da conservação da quantidade de movimento, é compreender quando dois corpos podem ser considerados um sistema completo, isolado de fôrças externas.

Há dois fatos fundamentais para que o aluno entenda a conservação da quantidade de movimento. O mais evidente e importante é o de que, quando sòmente dois objetos interagem, a quantidade de movimento total dos dois corpos não varia. Isto é extremamente geral e não depende da interação; a interação pode ser simples ou complexa, causada por: explosão química, fôrças elásticas, puxões musculares, etc. Desde que dois objetos estejam envolvidos, a quantidade de movimento é conservada. Êste aspecto foi tratado aqui. O segundo aspecto é mais sutil. Envolve a questão de sistemas isolados. Você deverá despender algum tempo discutindo êste assunto, ou seus alunos talvez pensem que a conservação da quantidade de movimento é aplicada apenas no curso de Física e não na natureza.

Antes de entrar em discussões minuciosas de sistemas isolados, permita-nos indicar a causa da confusão do aluno. Quando se dá aos alunos um problema artificial envolvendo, digamos, a colisão de duas bolas, é possível que apliquem a conservação da quantidade de movimento para obter a resposta, em seguida. Mas êles sabem que uma bola, sòzinha, não mantém sua velocidade; a velocidade diminuirá. Por isso, em vez de ser uma lei universal poderosa, a conservação da quantidade de movimento parece ser um expediente, a fim de se obter a resposta correta para uma classe particular de problemas. Será necessária considerável discussão em classe, para relacionar a conservação da quantidade de movimento à natureza, como os alunos a vêem cotidianamente.

COMENTÁRIOS SÔBRE SISTEMAS ISOLADOS. Ao tratar de problemas sôbre a quantidade de movimento, o isolamento de um sistema (o que se inclui e o que se exclui de um sistema), normalmente, não é simples. O único caso em que o isolamento é quase perfeito ocorre com as interações no espaço exterior. Tais casos são bastante artificiais, mas fáceis de serem entendidos.

Um segundo tipo de isolamento é ilustrado por objetos lisos sôbre um lago congelado (considerando o gêlo sem atrito) e bolas de bilhar sôbre uma mesa (novamente, desprezando-se o atrito). Nos dois últimos casos apresentados, as fôrças externas não são pequenas. A gravidade puxa para baixo, enquanto o gêlo ou a mesa empurram para cima. Todavia, uma vez que a superfície é rígida, as fôrças *ajustam-se automàticamente* para serem iguais e opostas, e a fôrça *resultante* para cima ou para baixo, sôbre o objeto, é zero. Portanto, em tais casos, há uma espécie de pseudo-isolamento, com grandes fôrças externas atuando, mas cuja soma é zero.

Um terceiro caso de muita utilidade (e que os alunos devem compreender, a fim de apreciar a larga aplicabilidade da conservação da quantidade de movimento) envolve isolar uma interação no *tempo* — aplicando a conservação da quantidade de movimento, durante o intervalo de tempo exato em que se dá a interação. Considere a questão da variação da quantidade de movimento entre duas bolas de bilhar, colidindo em uma mesa de bilhar. Ninguém duvida que a bola de bilhar, rolando na mesa, parará casualmente devido ao atrito. Logo, duas bolas de bilhar sôbre uma mesa não formam, realmente, um sistema isolado. Mas, considere o instante exato da colisão. A mesa, um objeto externo ao sistema, exerce fôrças de atrito sôbre a bola durante a colisão. Tais fôrças não devem ser pequenas. O importante é que o impulso comunicado por estas fôrças, durante o breve instante da interação, é desprezìvelmente pequeno, *comparado* ao impulso das fôrças de

interação entre as bolas durante a colisão. Todavia, a quantidade de movimento do sistema das duas bolas deve ser conservada, *durante a colisão*, mesmo que não se conserve, quando se considera um tempo maior. Se necessitarmos considerar os efeitos de atrito, podemos aplicar a conservação da quantidade de movimento à interação e, depois, levar em consideração o efeito de atrito sôbre êsses resultados.

Outra ilustração semelhante é um foguete explodindo. Neste caso, há a ação da gravidade sôbre o foguete, como uma fôrça externa. Contudo, a explosão ocorre em um tão pequeno intervalo de tempo, que o impulso transferido pela gravidade ao foguete, durante a explosão é desprezível, e a conservação da quantidade de movimento, no sistema foguete, pode ser usada para descrever a situação imediatamente antes ou após a explosão. Podemos, portanto, se necessário, considerar o efeito da gravidade sôbre uma dada massa com uma certa velocidade. O caso gravitacional também apresenta uma propriedade especial. Em uma interação num campo gravitacional constante, as acelerações de todos os corpos são iguais e, por esta razão, a fôrça gravitacional *pode* ser desprezada. Veja CCL, Problema 22.

DESENVOLVIMENTO. Emprêgo do Princípio da Conservação em Situações Práticas. Nas discussões de classe, retorne a cada um dos exemplos dados no texto, na Seção 3. Pergunte a cada um dos alunos em que caso acima referido está cada exemplo, e por que êsses dois objetos formam um sistema "isolado". Reexponha-lhes, também, a lei da conservação da quantidade de movimento especìficamente, como é aplicada a cada sistema.

Por exemplo, um rapaz e um homem são "objetos" interagindo no primeiro exemplo da Seção 3 (Fig. 23-5). Êles podem ser considerados como um sistema isolado, porque estão sôbre a superfície de um lago congelado *liso;* o têrmo liso significa que podemos desprezar o atrito. A fôrça da gravidade para baixo é exatamente anulada pela fôrça para cima, do gêlo. Assim, como o homem e o rapaz estavam parados antes do empurrão, a quantidade de movimento inicial era zero. Conseqüentemente, a quantidade de movimento total (soma vetorial) deve permanecer zero. Se o homem adquire quantidade de movimento em uma direção, o rapaz deve adquirir uma quantidade de movimento igual e oposta. Pergunte aos alunos o que aconteceria, se o rapaz puxasse o homem para baixo, de modo que o primeiro se elevasse no ar. Mover-se-ia o homem para baixo? Estão o homem e o rapaz "isolados", quando se considera o movimento vertical?

Pergunte aos alunos que efeito produziria, na conservação da quantidade de movimento, o escape dos gases de uma arma de fogo que atira uma bala. Quando a bala deixa o cano da arma e os gases escapam, comumente, êles levam uma porção desprezível da quantidade de movimento. Entretanto, se a quantidade de movimento dos gases é ou não desprezível não é tão importante, como o é a idealização pelos alunos do fato de estarem considerando esta quantidade de movimento desprezível. Se alguém imaginasse uma arma de fogo, na qual os gases transferissem uma significativa quantidade de movimento, êstes gases seriam incluídos juntamente com a arma e a bala, nos cálculos das quantidades de movimento.

COMENTÁRIO. As Figuras 23-9, 23-11 e 23-26 mostram bolas de bilhar colidindo. Os alunos, em sua maioria, pensam que essas bolas rolam sôbre uma mesa. Realmente, elas estão suspensas por longos fios. Esta é a razão pela qual os sinais e as listas aparecem fixos ou girando vagarosamente.

Certos alunos talvez estejam interessados no fato de que, quando uma colisão lateral ocorre entre a bola de bilhar que se move (sem girar) e a bola estacionária de massa igual, as duas bolas, após a colisão, movimentam-se ao longo de trajetórias que formam, entre si, ângulos retos. Os alunos devem observar isto, quando realizarem a Experiência III-10, Uma Colisão em Duas Dimensões. Êste fato depende da conservação da energia cinética (à qual os alunos são induzidos através do parágrafo final da Experiência III-10; veja comentários nas Notas de Laboratório para essa experiência), e pode fàcilmente ser provocado, *após* terem estudado energia. Esta prova é dada no Apêndice 6, quase no fim dêste volume.

° ° °

PROBLEMAS DE VERIFICAÇÃO

1. Uma bola de massa de vidraceiro de 5 kg, movendo-se a uma velocidade de 6 m/s, choca-se com um bloco de madeira de 1 kg, que estava inicialmente em repouso. A bola

adere à madeira. Qual é a velocidade final do bloco? (5 m/s).

2. Uma bala de 10 gramas é disparada, com uma velocidade de 1 000 m/s, de uma arma de 2 kg suspensa livremente. Qual é a velocidade de recuo da arma? (5 m/s).

3. Um corpo de 5 kg, em repouso, é fragmentado por uma violenta explosão. Quebra-se em dois pedaços. Observa-se um dêsses pedaços, de 4 kg, movendo-se para a direita, a uma velocidade de 50 m/s. Descreva o movimento do pedaço restante de 1 kg. (Move-se para a esquerda com uma velocidade de 200 m/s).

4. Uma massa de 10 kg, com uma velocidade de 20 m/s para a direita, interage com uma segunda massa que estava, inicialmente, movendo-se para a esquerda com uma velocidade de 20 m/s. Após a interação, ambas movem-se para a direita, com uma velocidade de 5 m/s. Qual é o valor da segunda massa? (6 kg).

5. Pode-se, aplicando apenas a conservação da quantidade de movimento, determinar o movimento após uma colisão? Se dispuser de tempo aqui, você poderá utilizar esta questão para motivar a pesquisa de outras quantidades dinâmicas, nos últimos capítulos. Pergunte aos alunos se outras velocidades finais das duas bolas, na Figura 23-8, poderiam manter a quantidade de movimento total inalterável. Serão capazes de responder isto mais fàcilmente, se você usar valôres numéricos específicos. Digamos que cada bola tenha uma massa de 0,5 kg, e que a velocidade inicial seja 4,4 m/s. (Note que esta velocidade corresponde à bola que se move um pouco menos de 27 cm em 3/48 segundos. Observe também que a aparente deformação da bola em cêrca de 2 cm, combinada com esta velocidade, implica que o obturador da câmara abriu por 1/220 segundo durante cada exposição). Os alunos devem compreender que quantidades de movimento iguais poderiam ser obtidas, realmente, por muitas outras combinações. Peça-lhes a rapidez que deveria ter a bola 1, movendo-se após a colisão, se a bola 2 tivesse alcançado uma velocidade de 3,3 m/s, em vez de 4,4 m/s. Êles devem admitir ràpidamente que a bola 1 continuou movendo-se com a velocidade de 1,1 m/s, ao invés de parar. Que aconteceria, se a bola 2 alcançasse uma velocidade de 4,1 m/s? A bola 1 manteria uma velocidade de 0,3 m/s para a frente.

Deixe aos alunos a questão de como a bola 2 escolhe uma dentre tôdas essas possibilidades. Fìsicamente, é evidente que alguma particularidade da interação, na colisão, deve determinar o resultado. No Capítulo 24, incluiremos a energia em nossas análises de colisões e, dêste modo, eliminaremos a indeterminação.

Seção 5 — Foguetes

FINALIDADE. Ilustrar o uso da conservação da quantidade de movimento, considerando uma aplicação de grande interêsse atual — o lançamento de foguetes.

CONTEÚDO. Uma nave espacial adquire quantidade de movimento para a frente igual à quantidade de movimento, para trás, dos gases de exaustão.

ÊNFASE. Êste assunto constitui um exemplo da aplicação da conservação da quantidade de movimento. Pode ser dado apenas como leitura. Se dispuser de tempo extra, será interessante discutir alguns exemplos, usando o gráfico da Figura 23-15b.

DESENVOLVIMENTO. Um problema sôbre foguetes. Se se dispusesse de um combustível com uma velocidade de ejeção de 3,3 km/s, que massa do foguete seria necessária para dar a 1 000 kg de carga útil uma velocidade final de 10 km/s? (Desprezar a resistência do ar e a gravidade). Como $v/v_e = 3$, a Figura 23-15b mostra que $m/m_0 = 0{,}05$. Portanto, seria necessário um total de 20 000 kg. (Observe que, se o atrito do ar e a gravidade fôssem incluídos, aproximadamente, 50 000 kg de combustível seriam necessários para levar os 1 000 kg de carga útil, a uma velocidade de 10 km/s; 11 km/s é a velocidade necessária para um objeto escapar da Terra).

Das informações abaixo, você pode obter outros exemplos.

MATERIAL SUPLEMENTAR SÔBRE FOGUETES. Os cálculos dados no texto para a razão da massa total do foguete, mais a massa do combustível pela massa final do foguete (ou "carga útil") não são os mais atualizados. Os recentes foguetes americanos e soviéticos utilizam combustíveis com velocidades de ejeção

consideràvelmente acima de 2 km/s, valor êste empregado para o exemplo do texto. Os combustíveis dos foguetes, em 1957, foram convencionados com uma velocidade de ejeção de cêrca de 2,6 km/s. Freqüentemente, os combustíveis químicos elevam esta velocidade para 5 m/s. Combustíveis de gases pré-aquecidos fornecem uma velocidade de exaustão de cêrca de 6 km/s. Êstes são valôres típicos para propulsões de satélites tripulados da Terra.

Contudo, velocidades de exaustão muito elevadas, digamos, aproximadamente 100 km/s, serão necessárias para tornar possíveis as viagens espaciais. Tais velocidades de ejeção exigiriam algo mais do que combustíveis químicos. Uma possível alternativa é a exaustão de feixes de íons, que devem ser antes acelerados elètricamente. Presumìvelmente, alguma poderosa fonte especial, tal como um reator nuclear, deve ser levada pelo foguete para suprir a potência elétrica necessária. Outro projeto para o futuro envolve o emprêgo de bombas atômicas para arremessar fragmentos, em direção oposta à do movimento do foguete.

° ° °

Se você ler sôbre combustíveis para foguetes em jornais ou revistas, provàvelmente, descobrirá a expressão "impulso específico" usada para descrever a eficiência do combustível. Por exemplo, um combustível para um certo foguete pode ter um impulso específico de 250 libras por segundo. (Esta unidade é libra-fôrça vêzes segundo por libra-massa). No sistema MKS, êste impulso específico seria $9{,}8 \times 250 = 2{,}45 \times 10^3$ newton-seg/kg, que é exatamente o valor dado pelo texto como sendo a velocidade de exaustão de 2,45 km/s.

$$\frac{1 \text{ nt s}}{\text{kg}} = \frac{1 \text{ nt s}}{\text{kg}} \times \frac{1 \text{ kg m/s}^2}{1 \text{ nt}} = 1 \text{ m/s}.$$

A unidade para o impulso específico é expressa em newton-segundos por quilograma, para mostrar explìcitamente o impulso (em newton-seg), derivado da explosão e exaustão de 1 kg de combustível. Ao fazer os cálculos sôbre um foguete, às vêzes, é conveniente reescrever $2{,}45 \times 10^3$ nt seg/kg como $2{,}45 \times 10^3$nt por kg/seg. Os $2{,}45 \times 10^3$ nt representam a fôrça que seria gerada, se o combustível queimasse a uma razão constante de 1 kg/seg. Um dos problemas de Engenharia, na fabricação de foguetes, é queimar e ejectar o combustível de modo suficientemente rápido.

Considere, por exemplo, um foguete de 100 ton (cêrca de 10^5 kg). A fôrça de gravidade sôbre o foguete seria $9{,}8 \times 10^5$ newtons. Se um combustível de impulso específico 3×10^3 nt seg/kg (ou uma velocidade de ejeção de 3 km/s) fôsse usado, queimando 1 kg/s, o foguete produziria sòmente 3×10^3 nt. Para superar a gravidade, a razão mínima da queima seria de $3{,}3 \times 10^2$ kg/seg. Como isto apenas equilibraria a gravidade, uma razão de queima de 400 kg/s seria mais razoável. Observe que, em apenas 100 segundos, a massa do combustível ejectado seria 4×10^4 kg ou 40% da massa original.

Realmente, um dos mais surpreendentes resultados deduzidos nesta seção é o de que a velocidade final do foguete depende sòmente da velocidade de ejeção e da razão da carga útil pela massa inicial do foguete, e *não* depende da velocidade em que o combustível do foguete é queimado. Não há, portanto, em um foguete interplanetário, nenhuma necessidade de uma grande chama ou exaustão ruidosa, a menos que o foguete deva acelerar ràpidamente. Então, por que os foguetes são construídos dessa maneira? A resposta foi dada em exemplos precedentes. O combustível deve ser queimado ràpidamente, a fim de vencer a fôrça da gravidade.

Outra necessidade prática, ao projetar um foguete, é evitar uma aceleração excessiva que arruinaria alguns dos intrincados equipamentos do próprio foguete (isto é, o mecanismo da orientação ou o sistema do combustível) ou o próprio mecanismo da carga útil. Enquanto o combustível é queimado, a massa do foguete decresce, e a aceleração cresce. Um foguete de vários estágios, de construção mais recente, pode queimar o combustível mais vagarosamente (portanto, provàvelmente, com maior eficiência), e destacar-se de uma parte do seu todo, diminuindo assim a sua massa. Naturalmente, quando esta separação ocorre, a massa pode ser reduzida grandemente, pela ejeção do estágio que se queima mais ràpidamente, juntamente com o tanque de combustível.

A Figura 23-15b é um gráfico da razão da massa remanescente pela massa original total do combustível e do foguete, m_o, como uma função da razão da velocidade final atingida, v, pela velocidade de ejeção, v_e. A equação que relaciona isto é:

$$\frac{m}{m_o} = e^{-v/v_e}$$

$$\text{ou } 2{,}30 \log_{10} \frac{m}{m_o} = -\frac{v}{v_e}$$

$$\text{ou } \log_{10} \frac{m_o}{m} = 0{,}434 \frac{v}{v_e}.$$

[A dedução desta equação (para consulta do professor) está no Apêndice 5 dêste volume do guia].

Esta fórmula pressupõe que tôdas as massas que deixam o foguete ($m_o - m$) movem-se com a velocidade v_e, relativa ao foguete, no sentido oposto ao do movimento do foguete.

O limite inferior da velocidade de exaustão do combustível, num foguete Atlas de 80 ton, que colocou 4 ton de carga útil em órbita (em 18 de dezembro de 1958), pode ser obtido, fixando $v = 8$ km/s (velocidade de um satélite em órbita, próximo à superfície da Terra), e utilizando a equação ou a Figura 23-15b. Da equação,

$$\log_{10} (20) = 0{,}434 \ (8/v_e)$$

$$\text{ou } v_e = \frac{0{,}434 \ (8)}{1{,}3} = 2{,}67 \text{ km/s}.$$

Pela Figura 23-15b, encontramos o valor de v/v_e quando $m/m_o = 0{,}05$. Êste valor é, aproximadamente, 3. Portanto, $v_e = 8/3 = 2{,}67$ km/s. Êste deve ser um limite inferior da velocidade de exaustão, porque: (a) havia alguma resistência do ar, (b) a fôrça de gravidade estava presente, e (c) parte da massa original era o tanque de combustível e o primeiro estágio do foguete.

Seção 6 — O Centro de Massa

FINALIDADE. Introduzir a idéia de centro de massa, considerando um sistema composto de dois objetos.

CONTEÚDO a. O centro de massa de duas massas é o ponto que divide a distância entre elas, numa relação inversamente proporcional às massas. Assim, $m_1x_1 = m_2x_2$.

b. Se um sistema de dois objetos está isolado, a velocidade do centro de massa, v_{cm}, não varia. A quantidade de movimento total do sistema é $(m_1 + m_2)\ v_{cm}$.

ÊNFASE. Esta seção pode ser tratada sucintamente ou omitida, sem afetar sèriamente a seqüência do curso. Isto não significa que o conceito de centro de massa seja de importância secundária. Ao contrário, êle é básico para a compreensão da mecânica, da elementar à mais avançada. Se você dispuser de tempo suficiente, certamente incluirá esta seção. Talvez, ela possa ser abreviada, apenas porque os alunos, em sua maioria, não pensam sèriamente no movimento de corpos extensos, mas, de algum modo, supõem que o movimento "médio" seja dado pela lei de Newton, percebendo intuitivamente que isto é correto.

COMENTÁRIOS. As fôrças reais, atuando sôbre corpos extensos, podem ser bastante complexas. Se um objeto fôr puxado "fora do centro" (isto é, de tal maneira que a fôrça resultante não passe pelo centro de massa) o objeto tanto girará, como transladará. Além disso, uma parte do objeto provàvelmente puxa a outra, e a ação destas fôrças devem ser consideradas. Pode-se provar que o centro de massa de tal objeto se move, como se tôda a massa do objeto estivesse concentrada no centro de massa, e como se atuassem apenas fôrças externas. Isto pode ser demonstrado, tomando-se um pedaço de madeira de forma bastante irregular e marcando o seu centro de massa com um ponto branco. Quando se arremessa um objeto ao ar, êle executa um movimento complicado, mas o ponto branco descreve uma trajetória parabólica contínua.

° ° °

Não é particularmente simples apenas o movimento do centro de massa, mas também o movimento relativo ao centro de massa pode ser descrito de uma maneira simples. Veja o exercício relativo a Figura 23-9, sugerido adiante.

DESENVOLVIMENTO a. Um modo de tratar esta matéria é discutir o Problema 22 com a classe, construindo o diagrama sugerido na solução do problema.

b. Pode discutir a Figura 23-21, logo que os alunos verifiquem como o movimento do centro de massa é simples, embora a chave inglêsa pareça mover-se de maneira complicada.

As questões seguintes podem ser empregadas para levar os alunos a considerar o movimento como a resultante da composição de dois movimentos simples.

1) Se a chave tem um comprimento de 20 cm, qual é a velocidade média do centro de massa? Os alunos talvez sejam capazes de verificar que a chave inglêsa se move a uma distância igual ao seu comprimento (ou um pouco mais) em dois flashes. Assim, $v = 0{,}20/0{,}067 = 3$ m/s. (Observe que, fazendo isto, os alunos confirmarão o fato de que $\vec{v}_{cm}$ é essencialmente constante).

2) De que modo se move a chave? O único indício é de que a chave está provàvelmente diminuindo de velocidade, devido ao atrito. Será necessário tomar medidas cuidadosas, para mostrar que a chave está se movendo da esquerda para a direita.

3) A fotografia apresenta distorções? Sim, o tamanho da chave aparece diferente nas duas últimas exposições.

4) Qual é a velocidade de rotação da chave inglêsa, em tôrno do seu centro de massa? Ela gira, aproximadamente, uma vez em 14 flashes, ou possui uma velocidade de rotação de um pouco mais de 2 revoluções por segundo.

5) Qual é a velocidade instantânea do orifício da chave, num dado instante? Gràficamente, os alunos podem obter uma estimativa disto, dividindo o deslocamento pelo tempo. Todavia, para obter isto com precisão, devem, primeiramente, encontrar a velocidade tangencial e o sentido correspondente de rotação. Podem obter essa velocidade, conhecendo a velocidade de rotação e a distância do orifício ao centro de massa (que é o eixo de rotação). A esta velocidade (relativa ao centro de massa) deve ser adicionada (vetorialmente) a velocidade do centro de massa.

c. Um exercício gráfico para ser feito em casa (trabalhoso, mas instrutivo).

O exercício que se segue fornece aos alunos uma percepção intuitiva de colisões, e mostra como o fenômeno pode parecer diferente quando visto de diferentes sistemas de referência.

Analise a Figura 23-9, uma colisão entre duas massas iguais, da seguinte forma.

Tire, com um papel transparente, uma cópia das posições dos centros das duas bolas, em vários instantes. Isto seria semelhante à Figura (a). Una as posições das duas bolas após a colisão, como mostra (b) e marque as posições do ponto médio de cada linha, ou seja, o centro de massa. Faça isto para as duas bolas, antes da colisão, como em (c). Talvez isto seja um tanto confuso, mas pode ser feito. Evidencie que o centro de massa se move com velocidade uniforme.

Como uma extensão dêste exercício, suponhamo-nos sôbre o centro de massa em movimento e procuremos descrever a colisão. Tome uma outra fôlha de papel transparente e marque um ponto, C.M., para o centro de massa. Coloque-o sôbre o centro de massa do traçado anterior e marque a posição das bolas, neste instante. Faça o mesmo para cada posição sucessiva do centro de massa. A figura final parecerá semelhante a (d). O que se observa é que as bolas parecem vir de direções opostas, com velocidade iguais (na realidade, com igual quantidade de movimento, pois aqui, estamos lidando com massas iguais) e afastar-se numa direção diferente, com velocidades opostas. Realmente, as velocidades com que as bolas se afastam são um pouco menores do que quando elas se aproximam, uma vez que não se conservou a energia cinética.

d. Um exercício adicional semelhante ao c.

Alguns professôres acham interessante fazer o exercício descrito acima em c, na classe, e dar para os alunos analisarem em casa, com a mesma técnica, o problema da Figura 23-11. Um fato que surge imediatamente, ao iniciar tal análise da Fig. 23-11, é que a localização do centro de massa não é tão evidente, porque a massa de cada bola não é conhecida. Entretanto, se disser para os alunos considerarem que o centro de massa se move com velocidade uniforme, será muito fácil determinar que a bola maior tem mais do que o dôbro e menos que o triplo da massa da bola menor. Isto pode ser avaliado mais fàcilmente, tomando-se razões por tentativa nos dois extremos e verificando se estas mesma razões são também válidas quando as bolas quase se tocam. O melhor valor é, aproximadamente, 2,7, mas o valor 2,5 dará bons resultados e é mais fácil de ser empregado. Conhecidas as massas relativas como sendo 2,5 para 1 ou 5 para 2, os alunos devem marcar o centro de massa próximo à bola maior, a aproximadamente, 2/7 da distância de separação total. Podem, então, procurar encontrar o movimento relativo ao centro de massa, utilizando um segundo traçado, como no Exercício c.

Figura (a)

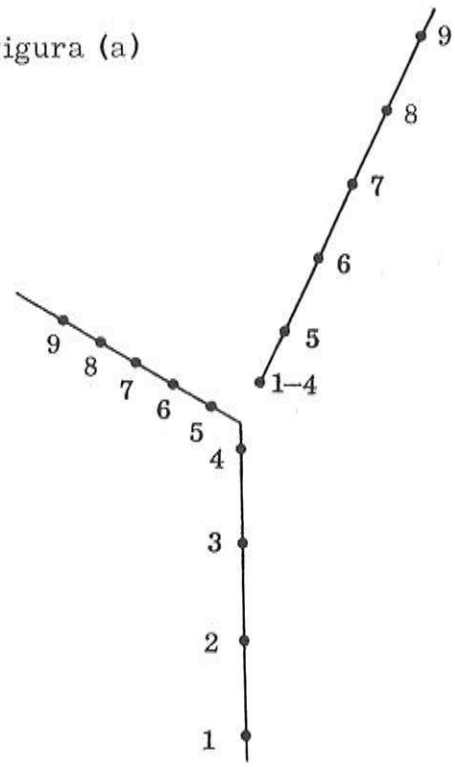


Figura (b)

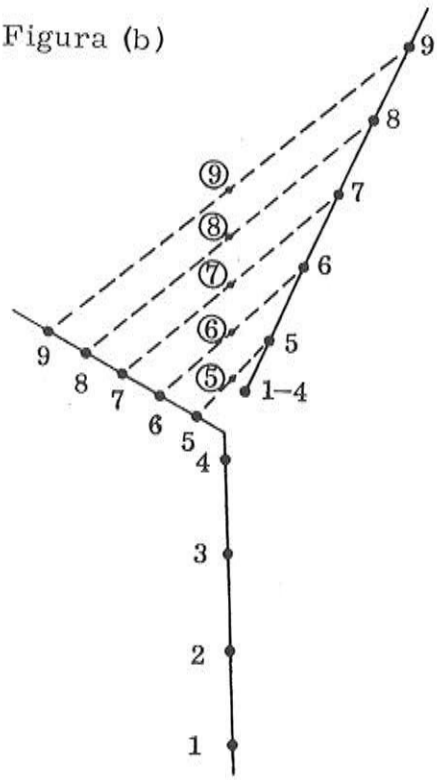


Figura (c)

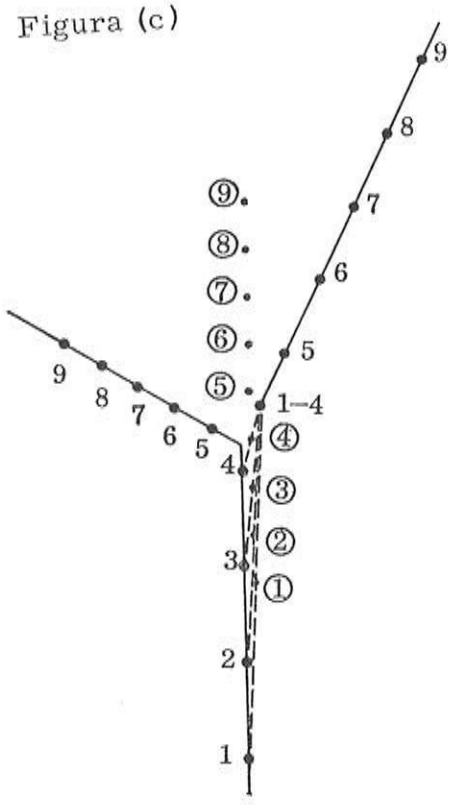
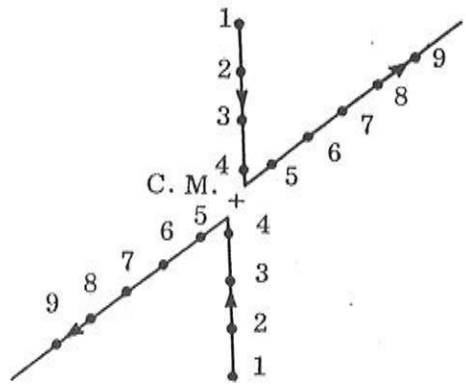


Figura (d)



Seção 7 — Conservação da Quantidade de Movimento em Geral

FINALIDADE. Estender a conservação da quantidade de movimento ao sistema composto de muitos objetos.

CONTEÚDO. A quantidade de movimento conserva-se em qualquer sistema isolado, independentemente do número de objetos no sistema.

ÊNFASE. É importante os alunos saberem que a conservação da quantidade de movimento é geral. Contudo, em sua maioria, êles provàvelmente já estão covencidos dessa conservação geral, através da matéria anterior. Não é essencial um entendimento detalhado dêsse argumento. Se preferir, esta seção poderá ser apresentada apenas como leitura, seguida de breve discussão das conclusões.

COMENTÁRIO. Como a conservação da quantidade de movimento para um sistema de dois corpos foi introduzida como um fato baseado na experiência, há sòmente uma modesta vantagem adicional em estender a conservação da quantidade de movimento, a fim de incluir qualquer sistema isolado. Uma vez que a conservação da quantidade de movimento depende da experiência, não pode realmente ser provada. Contudo, uma vez estabelecida para um sistema de dois corpos, necessitaremos apenas de um princípio aditivo para estendê-la a um sistema de n-corpos. Como os parâmetros envolvidos, fôrça e quantidade de movimento, são grandezas vetoriais que foram estabelecidas como sendo aditivas, podemos concluir que a generalização será válida. Embora êstes argumentos plausíveis não satisfaçam a todos os alunos, você deve assegurar-se de que êles admitem que a conservação da quantidade de movimento foi estabelecida experimentalmente, para quaisquer tipos de sistemas.

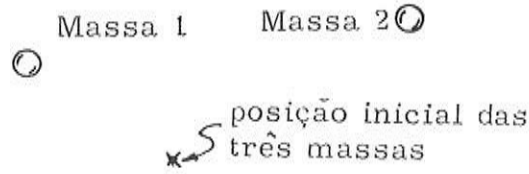
DESENVOLVIMENTO. Um exemplo, dado ràpidamente em classe, seria suficiente. Eis um exemplo com muitas alternativas:

> Uma bola de bilhar, movendo-se diretamente para leste a 2 m/s, choca-se com duas outras bolas idênticas. Após a colisão, verifica-se que a bola original se move para o norte a 1/2 m/s, e uma das bolas golpeadas movimenta-se para leste a 1 m/s. Em que direção e com que velocidade se move a terceira bola?

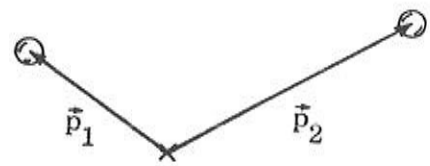
Será suficiente e mesmo conveniente resolver êste problema gràficamente. A quantidade de movimento final é composta de três quantidades de movimento e deve ser igual à inicial. (Observe que esta colisão não é elástica, porque a energia cinética final é menor que a energia cinética inicial.)

PROBLEMAS COMPLEMENTARES. Pode ser apresentado como um problema de verificação:

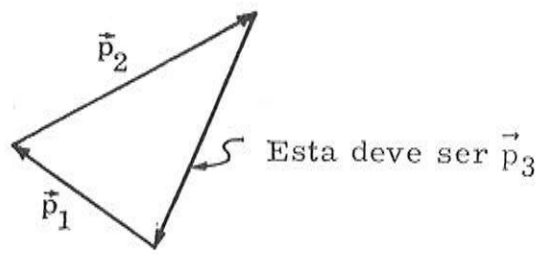
Três massas idênticas são colocadas juntas e em repouso, sôbre uma mesa sem atrito. Em seguida, uma explosão as separa. Uma fotografia, um instante após a explosão, mostra duas massas. Onde está a terceira?



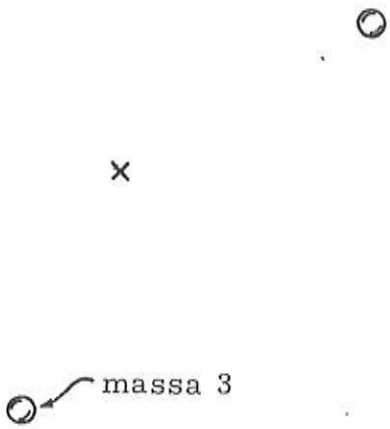
Como a distância percorrida é proporcional à velocidade e as massas são iguais, os vetores quantidade de movimento são, exatamente:



A quantidade de movimento inicial era zero. Portanto, a quantidade de movimento final deve ser zero.



As posições finais são mostradas abaixo:



Seção 8 — Fôrças de Interação

FINALIDADE. Introduzir o conceito de ação e reação entre fôrças.

CONTEÚDO. Se um objeto A exerce uma fôrça sôbre um objeto B, o objeto B exerce uma fôrça diretamente oposta, de igual intensidade sôbre A.

ÊNFASE. Se a Experiência III-10, *Uma Colisão em Duas Dimensões*, não foi feita ainda, é uma boa experiência de laboratório para iniciar os alunos no assunto do Capítulo 24.

DESENVOLVIMENTO. As partes (c) e (d) do Problema 13 do CCL constituem uma boa introdução para o tópico desta seção.

COMENTÁRIO. Como se mencionou anteriormente, na parte do Guia sôbre a conservação da quantidade de movimento, uma tradicional maneira de estudar é considerar fôrças "iguais e opostas" como uma lei experimental, e provar a conservação da quantidade de movimento a partir dessa lei. Êste curso admite a conservação da quantidade de movimento como uma lei experimental e prova a terceira lei de Newton a partir dela. Portanto, o assunto desta seção desempenha um papel auxiliar neste curso. Contudo, a seção deve ser discutida, visto que suas idéias serão novamente usadas, por exemplo, no próximo capítulo sôbre energia. Extensa prática não é necessária, não havendo problemas, no CCL, especìficamente para êste assunto.

° ° °

Se seus alunos vierem a considerar a conservação da quantidade de movimento sòmente em casos, nos quais a fôrça atua por um pequeno intervalo de tempo, estarão em discordância com as fôrças iguais e opostas desta seção. Devem compreender que, quando dois corpos interagem, $\Delta p_1 = -\Delta p_2$. Portanto, se $\Delta p_1 = F_{2-1}\,\Delta t$, e $\Delta p_2 = F_{1-2}\,\Delta t$, segue-se que $F_{2-1} = -F_{1-2}$. Os alunos, que pensam sòmente na variação total, podem apenas ver que o *valor médio* de F_{2-1} é igual e de sinal contrário ao *valor médio* de F_{1-2}. A fim de valorizar esta seção, devem considerar que $\Delta p_1 = -\Delta p_2$, *para qualquer intervalo de tempo* que possam considerar. Logo, se um Δt particular fôr escolhido suficientemente pequeno, de modo que as fôrças não variem apreciàvelmente durante o intervalo de tempo, as duas fôrças serão iguais e opostas em qualquer instante arbitrário. Elas são iguais e opostas em qualquer instante. O Δt considerado nesta experiência não é "o tempo empregado na colisão ou explosão". É qualquer pequeno intervalo de tempo escolhido.

° ° °

A expressão "fôrças iguais e opostas" pode parecer contraditória — na verdade, *deve* parecer contraditória, se os alunos tiverem sua notação vetorial. Dois vetores são iguais, sòmente se têm o *mesmo* sentido. Isto acontece, freqüentemente, em Física; " iguais em módulo e opostas em sentido" pode-se resumir em "iguais e opostas".

° ° °

Talvez seja útil, ao discutir sistemas isolados, introduzir o paradoxo clássico, se já não foi dado anteriormente:

> Um cavalo está atrelado a uma carroça e tenta puxá-la por uma rua. Entretanto, quando êle puxa a carroça, esta puxa-o em sentido contrário. Portanto, como o cavalo movimenta a carroça contìnuamente?

O paradoxo deixa de existir, tão logo você se lembre que deve considerar apenas o sistema no

qual está interessado. Se desejar estudar o movimento da carroça, considere a carroça e as fôrças externas que atuam sôbre ela. O cavalo puxa para a frente, e o atrito, entre as rodas e o eixo e entre as rodas e o chão, atua para trás. Quando a fôrça do cavalo excede a fôrça de atrito, a carroça acelera para a frente.

Se estiver interessado no movimento do cavalo, considere sòmente as fôrças que atuam sôbre o cavalo. As fôrças externas que atuam são: a fôrça para trás, exercida pela carroça, e a fôrça para a frente, sôbre as patas do cavalo, exercida pelo chão (reação à fôrça para trás, exercida pelas patas do cavalo sôbre o solo). Quando a última excede a anterior, o cavalo acelera para a frente.

O problema do cavalo e da carroça é um caso especial do problema de enunciado mais geral, sôbre fôrças iguais e opostas: As duas fôrças iguais e opostas mencionadas nesta seção sempre atuam em corpos *diferentes*. Se você considerar ambos os corpos juntamente, como um único sistema, as fôrças se cancelam. Êste exato cancelamento permite-nos ignorar as tremendas e complexas fôrças interatômicas como, por exemplo, numa pedra caindo em um campo gravitacional. No caso do cavalo e carroça considerados conjuntamente, como um único objeto, os puxões do cavalo sôbre a carroça e da carroça sôbre o cavalo cancelam-se, restando sòmente a fôrça do solo sôbre as patas do cavalo (para a frente) e as fôrças de atrito sôbre as rodas (para trás). Quando a primeira fôrça excede a segunda, cavalo e carroça (um só corpo) aceleram para a frente.

° ° °

Não perca tempo, procurando dar definições rigorosas, para distinguir fôrças newtonianas de fôrças não newtonianas. Quando os físicos analisam a matéria e as interações mais detalhadamente, observa-se que existe um retardamento na ação de qualquer tipo de fôrça. A maior parte dêles não acredita que sinal algum possa se transmitir mais rápido do que a luz; assim, a maioria dos campos de fôrça conhecidos propaga-se de modo muito semelhante à luz emitida por uma supernova, como foi discutido no texto.

° ° °

Não é necessário analisar o exemplo da supernova, em detalhe. Se você tentar ser preciso, surgirão perguntas sôbre questões puramente semânticas:

> A luz emitida por uma supernova compreende uma parte do material da supernova? Se não, como pode o centro de massa da supernova (em repouso antes da emissão da luz) mover-se, após esta emissão? Algo está em desacôrdo com a conservação da quantidade de movimento?
>
> Se a luz é parte da supernova, por que é tão estranho o fato de darmos à supernova um empurrão contrário?
>
> Qual é a natureza da fôrça com que a supernova empurra a luz? Desde que a luz deve viajar com a velocidade da luz, como podemos falar em empurrar a luz?

Talvez jamais você possa responder satisfatòriamente a qualquer uma destas questões, uma vez, que os alunos simplesmente desconhecem a teoria eletromagnética (nem possa prometer-lhes um entendimento suficiente do assunto, na Parte IV). A situação pode ser totalmente endireitada e explicada, do modo mencionado no texto, quando se toma em consideração a quantidade de movimento da luz. Um feixe de luz de energia E transporta uma quantidade de movimento E/c, onde c é a velocidade da luz. Alguns alunos talvez perguntem se a luz, tendo quantidade de movimento, tem massa. A resposta é afirmativa: a luz tem massa, dada por $E = mc^2$. Mais "luz" sôbre êste assunto surgirá na Parte IV.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

Ainda que você não tenha dado ênfase ao conteúdo das Seções de 5 a 8, em classe, os problemas para estas seções devem ser pedidos. As técnicas, desenvolvidas nas Seções de 1 a 4, juntamente com o vocabulário das seções posteriores, são suficientes.

Os Problemas 11 e 12 constituem uma ilustração de que, em certos casos, podem ser igualmente bem aplicadas tanto a conservação da quantidade de movimento, como $F = ma$.

A tabela adiante classifica os problemas, de acôrdo com o nível avaliado de dificuldade de cada um e as seções a que se referem. Os que

são especialmente adequado para discussão em classe estão indicados. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*).

Seção	Facil	Medio	Difícil	Discussão de Classe
1, 2	1, 2, 3, 5	4*, 6*, 7	8*	6*
3, 4	10, 11*, 12, 13, 14, 18*	9*, 15* 17, 19	16	10, 13, 16
5		20*		20
6	21, 23*		22*	22
7		24*	25, 26*	24*, 25, 26*

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. 18,0 newton-seg.
2. 32,0 kg m/s.
3. (a) 0,333 m/s.
   (b) 0,667 m/s.
4. 8,0 newton-seg.
5. (a) 750 newton-seg.
   (b) 500 newtons.
6. (a) -120 kg m/s.
   (b) 30 newtons, no sentido oposto à velocidade inicial.
   (c) 100 kg m/s, antes;
   -20 kg m/s, depois.
7. (a) 1,5 kg m/s.
   (b) Zero.
   (c) 1,5 newton-seg, para baixo.
   0,31 s.
   (d) a: dôbro; b: zero; c: impulso, o dôbro, tempo o mesmo.
8. (a) 0,40 kg m/s.
   (b) 9,6 kg m/s.
   (c) 19,2 m/s.
9. Veja discussão.
10. Atirar algum objeto; abanar ou assoprar o ar, etc.
11. (a) Não varia.
    (b) 6,0 m/s.
    (c) -6,0 m/s ou 18 m/s.
12. (a) 100 newtons.
    (b) 3,0 m/s, para a frente.
    (c) 1,7 m/s, na direção do carrinho.
13. (a) $v_a/v_b = 0{,}52$.
    (b) $m_a/m_b = 1/0{,}52$.
    (c) Iguais e opostas.
    (d) $a_a/a_b = 0{,}52$.
14. -1 m/s.
15. (a) $6{,}68 \times 10^{-27}$ kg.
    (b) A fôrça não pode ser calculada.
    (c) Veja discusão.
16. (a) Veja diagramas.
    (b) Aproximadamente opostos.
    (c) Não.
    (d) $\frac{\triangle v_{maior}}{\triangle v_{menor}} = \frac{m_{menor}}{m_{maior}}$.
    (e) (85 ± 5) g.
17. Veja discussão.
18. 0,60 m/s.
19. $2{,}0 \times 10^6$ m/s, na direção do próton. Para o efeito do raio X, veja discussão na página 125.
20. (a) $v_{caminhão} = 2$ m/s,
    $mv_{caminhão} = 9$ ton m/s.
    (b) 5/8 ton.
    (c) 5/9 ton.
21. Permanece constante (fixa-se ou move-se uniformemente).

22. (a) 5 700 m/s, 47° com a vertical.
(b) 3 000 m/s.
(c) Veja discusão.

23. (a) 0,20 m/s.
(b) 0,20 m/s.

24. (a) 6 000 kg m/s.
(b) 6 000 kg m/s, no sentido oposto.
(c) 600 newtons.
(d) Veja gráficos.
(e) As áreas são iguais.

25. (a) Veja diagrama.
(b) 1/2 kg.

26. (a) 3,0 m/s.
(b) Permanece fixo ao centro do sistema.
(c) Zero.
(d) Veja solução detalhada.
(e) 0,15 L, onde L é o comprimento da armação.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

Qual é o impulso exercido por uma fôrça de 3,00 newtons durante 6,00 s?

Impulso = fôrça × tempo = 3,00 newtons × 6,00 segundos = 18,0 newton-seg.

PROBLEMA 2

Qual é o impulso que transmite a uma massa de 8,00 kg a variação de velocidade de 4,00 m/s?

Impulso = variação da quantidade de movimento = massa × variação de velocidade = = 8,00 kg × 4,00 m/s = 32,0 kg m/s.

PROBLEMA 3

Que acontece à velocidade de um objeto quando um impulso de 2,00 newton-seg é aplicado:

(a) a um objeto de 6,00 kg;
(b) a um objeto de 3,00 kg?

Quando um impulso de 2,00 newton-seg é aplicado a um objeto, a quantidade de movimento dêsse objeto varia de 2,00 newton-seg ou 2,00 kg m/s.

a) Aplicando um impulso de 2,00 newton-seg a um objeto de 6,00 kg, a quantidade de movimento varia de 2,00 newton-seg. Como a massa é constante, a velocidade varia:

$$m\,\Delta\vec{v} = \vec{F}\,\Delta t, \text{ e } \Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}\,\Delta t}{m}, \quad \Delta v = \frac{2{,}00 \text{ kg m/s}}{6{,}00 \text{ kg}} = 0{,}333 \text{ m/s}.$$

Os alunos devem admitir que a unidade quilograma-metro por segundo é a mesma que um newton-segundo.

Se o corpo estivesse inicialmente em repouso, o impulso de 2,00 newton-seg resultaria numa velocidade de 0,333 m/s. Se o corpo já estivesse em movimento, sua velocidade (vetorial) seria alterada de 0,333 m/s, mas o valor exato da variação no módulo da velocidade dependeria da direção relativa entre o movimento original e o impulso.

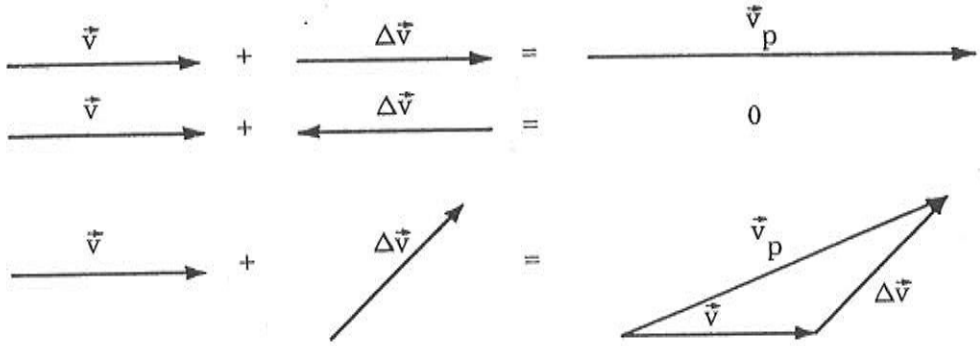
b) Se a massa fôsse 3,00 kg, ela teria 1/2 da massa do ítem (a). Conseqüentemente, o mesmo impulso de 2,00 newto-seg, implicando na mesma variação da quantidade de movimento, resultaria numa variação de velocidade duas vêzes maior que a do ítem (a).

$$\Delta v = \frac{F\,\Delta t}{m}, \quad \Delta v = \frac{2{,}00 \text{ kg m/s}}{3{,}00 \text{ kg}} = 0{,}667 \text{ m/s}.$$

° ° °

Nota: Ainda que êste seja um problema simples, devido a sua simplicidade merece ser explorado, para mostrar a generalidade da relação entre $\vec{F}\,\Delta t$ e $m\,\Delta\vec{v}$, quando a natureza vetorial é considerada.

Se o objeto possui uma velocidade inicial $\vec{v}$, $\Delta\vec{v}$ deve ser adicionado vetorialmente:



PROBLEMA 4

Uma fôrça constante, aplicada a um objeto de 2,0 kg em repouso, desloca-o de 4,0 m em 2,0 s. Que impulso foi aplicado ao corpo?

Há duas maneiras de resolver êste problema. A primeira envolve a determinação da fôrça e sua multiplicação pelo tempo, para se obter o impulso; a segunda envolve encontrar diretamente a variação da quantidade de movimento e igualá-la ao impulso.

Como a fôrça é constante, a aceleração também é constante e pode ser determinada a partir de $d = \frac{1}{2}\,at^2$.

$$a = \frac{2d}{t^2} = \frac{2 \times 4{,}0\,m}{2{,}0^2\ s^2} = 2{,}0\ m/s^2.$$

E como $F = ma$, $F = 2{,}0\ kg \times 2{,}0\ m/s^2 = 4{,}0$ newtons. O impulso é, então:

$F\,\Delta t = 4{,}0$ newtons $\times$ 2,0 segundos $= 8{,}0$ newton-seg.

Na segunda resolução, notamos que a velocidade *média* do objeto, durante o intervalo de tempo considerado, é 4,0 metros $\div$ 2,0 segundos ou 2,0 metros por segundo. Sua velocidade final deve ser duas vêzes êsse valor, ou 4,0 m/s. [Por outro lado, poderíamos escrever $v = at$, $d = \frac{1}{2}\,at^2$, e eliminar a, obtendo $v = \frac{2d}{t}$ como acima.] Se o objeto tem uma velocidade de 4,0 m/s e uma massa de 2,0 kg, sua variação de quantidade de movimento foi de 8,0 kg m/s. O impulso, portanto, deve ter sido de 8,0 kg m/s ou newton-seg, como antes.

PROBLEMA 5

Um esquiador, cuja massa é de 75 kg, move-se sôbre um chão horizontal à velocidade constante de 10 m/s. Devido a um êrro de cálculo, êle acaba parando num banco de neve e gasta, para isso, 1,5 s.

(a) Que impulso a neve aplicou ao esquiador?

(b) Qual foi a fôrça média exercida pelo banco de neve para produzir esta variação de velocidade?

a) Como o esquiador tinha uma quantidade de movimento de 75 kg $\times$ 10 m/s $=$ 750 kg m/s, e foi completamente detido pela neve, a variação da sua quantidade de movimento foi de 750 kg m/s. Portanto, o impulso aplicado pela neve foi de 750 newton-seg.

b) $F\,\Delta t =$ impulso. Então, 1,5 seg $\times$ F $=$ $=$750 newton-seg, e a fôrça média foi de 500 newtons. A fôrça pode ter sido muito maior num certo instante e menor em outro, mas a média foi de 500 newtons.

PROBLEMA 6

Um objeto, com massa de 10 kg, move-se com velocidade constante de 10 m/s. Uma fôrça constante atua, então, sôbre o objeto durante 4,0 s, dando-lhe uma velocidade de 2,0 m/s no sentido oposto.

(a) Calcule o impulso aplicado ao objeto.

(b) Qual a intensidade e o sentido da fôrça?

(c) Qual a quantidade de movimento do objeto, antes e após a ação da fôrça?

a) Impulso = massa × variação de velocidade = 10 kg × (—2 m/s —10 m/s) = = 10 × (—12 kg m/s) = —120 kg m/s.

b) Impulso = fôrça × tempo, e fôrça = $= \frac{\text{impulso}}{\text{tempo}}$.

$F = \frac{-120 \text{ kg m/s}}{4{,}0 \text{ s}} = -30$ newtons, no sentido oposto à velocidade inicial.

c) Quantidade movimento = mv, quantidade de movimento inicial:

$mv_1 = 10 \text{ kg} \times (10 \text{ m/s}) = 100 \text{ kg m/s}.$

Quantidade de movimento final:

$mv_2 = 10 \text{ kg} \times (-2) \text{ m/s} = -20 \text{ kg m/s}.$

Portanto, a variação da quantidade de movimento é igual ao impulso.

PROBLEMA 7

Uma bola de 0,50 kg é lançada verticalmente para cima a 3,0 m/s.

(a) Qual a quantidade de movimento inicial da bola?

(b) Qual a quantidade de movimento no alto da trajetória?

(c) Que impulso deteve a bola? Por quanto tempo êle atuou?

(d) Se a bola tivesse massa de 1,0 kg, que alterações haveria nas respostas aos itens (a), (b) e (c)?

Êste problema demonstra que a idéia de impulso é útil, em casos de fôrças que atuam durante um tempo apreciável, bem como nas aplicações costumeiras a casos em que as fôrças atuam num intervalo de tempo muito curto.

a) Quantidade de movimento = mv = = 0,50 kg × 3,0 m/s = 1,5 kg m/s.

b) Como a bola pára momentâneamente no tôpo da trajetória, sua velocidade neste ponto é zero. Conseqüentemente, aí também sua quantidade de movimento é *zero*.

c) A quantidade de movimento inicial era 1,5 kg m/s para cima; assim, o impulso que parou a bola era de *1,5 newton-seg, dirigido para baixo*. A fôrça que forneceu êste impulso era a fôrça gravitacional, cujo valor é 0,50 kg × × 9,8 newton/kg.

$$\Delta t = \frac{m \, \Delta v}{F} = \frac{1{,}5 \text{ kg m/s}}{0{,}50 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}31 \text{ s}.$$

d) A quantidade de movimento é proporcional tanto à massa, como à velocidade. Assim, no ítem (a), dobrando-se a massa (mantendo, porém a mesma velocidade) também dobraríamos a quantidade de movimento. Na parte (b), como a velocidade é zero, a quantidade de movimento será zero, não importando o valor da massa.

Na parte (c), o impulso necessário para deter o corpo é igual à quantidade de movimento; assim, dobrando a massa, dobram tanto a quantidade de movimento como o impulso. Entretanto, como $F_g = mg$, duplicando a massa, duplica-se a fôrça de gravidade e, com o dôbro da fôrça no mesmo intervalo de tempo, necessita-se o dôbro do impulso.

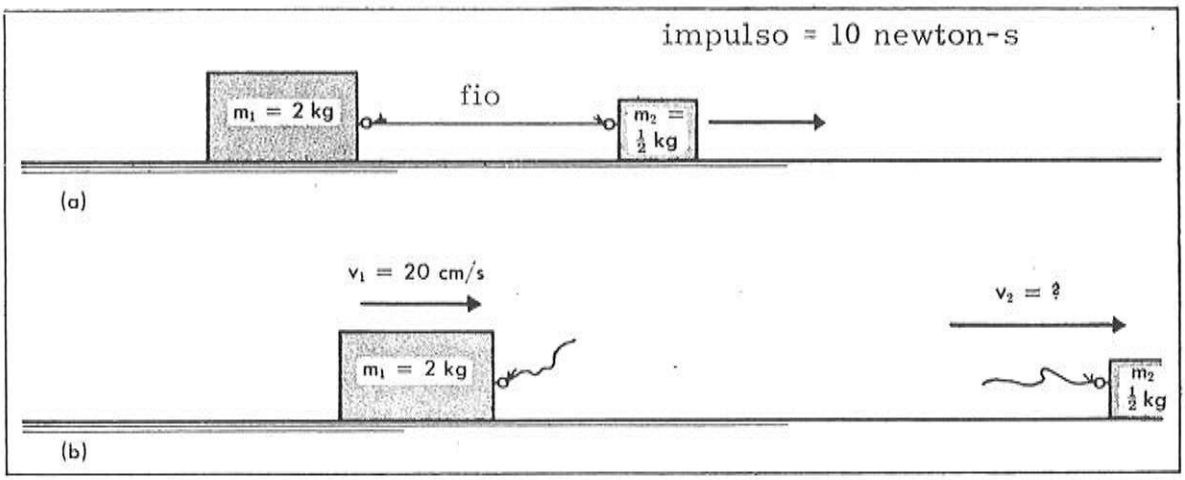
PROBLEMA 8

Um corpo é constituído de duas massas m_1 e m_2, de 2,00 kg e 0,500 kg, respectivamente, ligadas por um barbante leve [Fig. 23-23 (a)]. Êle se move sôbre uma mesa sem atrito, partindo do repouso. Colocâmo-lo em movimento aplicando-lhe um impulso de 10 newton-seg, mas, infelizmente, o barbante que liga m_1 e m_2 rompe-se durante o impulso [Fig. 23-23 (b)]. Em conseqüência, m_2 afasta-se com grande velocidade, enquanto m_1 move-se, finalmente, com a velocidade de apenas 0,20 m/s.

(a) Qual o impulso que m_1 recebeu?

(b) Qual o impulso que m_2 recebeu?

(c) Que velocidade tinha m_2 no fim do impulso?



A quantidade do movimento final de m_1 é 2,00 kg $\times$ 0,20 m/s = 0,40 kg m/s. A quantidade de movimento total dos dois corpos é 10 kg m/s, uma vez que o impulso total foi aplicado. A quantidade de movimento final de m_2 é, portanto, 10 — 0,40 = 9,6 kg m/s. Portanto,

a) m_1 recebeu um impulso de 0,40 kg m/s.

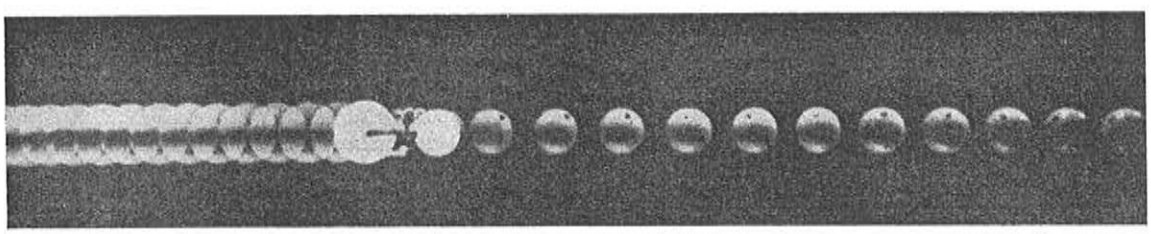
b) m_2 recebeu um impulso de 9,6 kg m/s.

c) m_2v_2 = 9,6 kg m/s.

$$v_2 = \frac{9{,}6 \text{ kg m/s}}{0{,}500 \text{ kg}} = 19{,}2 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 9

A Fig. 23-24 mostra uma fotografia de múltipla exposição de uma "explosão" de duas bolas de bilhar. A massa da maior é 201 g e a da menor, 85 g. O intervalo entre os instantâneos foi de $\frac{1}{30}$ s. Fazendo medidas sôbre a fotografia, você poderá verificar de maneira simples a conservação da quantidade de movimento. Se você constatar que as quantidades de movimento das duas bolas não são iguais em grandeza, como poderá explicar isso?



Como as bolas partiram do repouso (quantidade de movimento zero) a quantidade de movimento após a explosão deve ser zero. Isto é verdadeiro, sòmente se as duas quantidades de movimento individuais são iguais em intensidade e de sentidos opostos. A razão das duas quantidades de movimento é:

$$\frac{m_1\ v_1}{m_2\ v_2} = \frac{201\ v_1}{85\ v_2} = \frac{201\ d_1\ t_2}{85\ d_2\ t_1},$$

onde d_1 é a distância percorrida pela bola maior no intervalo de tempo t_1, e d_2 é a distância percorrida pela bola menor no intervalo de tempo t_2. As medidas feitas na figura são:

$d_1 = 2{,}0$ cm, $t_1 = 5$ flashes,

$d_2 = 4{,}29$ cm, $t_2 = 5$ flashes.

Utilizando estas medidas, $\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = 1{,}1$.

Devemos também verificar se os movimentos das duas bolas estão em sentidos opostos. Medida direta feita na figura mostra que o ângulo entre a trajetória das bolas é 179,5°, em lugar de 180°.

As medidas aproximam-se bastante das previstas pela conservação da quantidade de movimento; entretanto, baseando-se apenas nesta experiência, não há fundamento para se duvidar da conservação da quantidade de movimento. Mas, por que as medidas feitas não confirmam a conservação, exatamente?

Há três fontes prováveis nas discrepâncias observadas. São elas:

a) Alguma fôrça externa, atuando em uma ou em ambas as bolas, após a explosão. Certamente, isto acontece. É fácil observar que as bolas estão diminuindo de velocidade. Isto pode ser devido à resistência do ar. Se as bolas estivessem penduradas por fios, a resistência que a tensão dos fios exerce para trás forneceria tais fôrças. Se as bolas estivessem rolando, fôrças de atrito seriam responsáveis por parte da discrepância. Se a mesa estivesse ligeiramente desnivelada, a fôrça de gravidade poderia causar os efeitos observados.

b) Um terceiro objeto poderia ter participado da interação de "explosão". Um pequeno mecanismo de explosão foi visto, inicialmente, entre as duas bolas. Não conhecemos nem sua massa nem sua quantidade de movimento adquirida. Isto pode ser apreciável e responsável pela discrepância observada.

c) Talvez haja distorção na fotografia. Ordinàriamente, isto não seria suficientemente acentuado para produzir a discrepância observada.

PROBLEMA 10

Um homem está parado no meio de um lago gelado, sem nenhum atrito. Como conseguirá êle alcançar a margem?

Êste tipo de problema pode servir, sutilmente, como base para rever sistemas isolados, bem como a conservação da quantidade de movimento.

Se supusermos, inicialmente, que não há ar, não há maneira do homem todo alcançar a margem. Êle pode mover-se em uma direção, sòmente se êle atirar alguma coisa em direção oposta. Felizmente, êste objeto pode ser muito pequeno, visto que o homem adquirirá uma velocidade constante, uma vez iniciado o movimento. Se houver *atrito* do ar, êle poderá usar as mãos como "remo". Com uma suposição mais ampla de não haver atrito do ar, mas existir ar para respirar, êle pode fazer um jato com o seu sôpro — e virar a cabeça para aspirar.

PROBLEMA 11

Um carrinho de 20 kg move-se com a velocidade de 2,0 m/s. Um rapaz cuja massa é 60 kg salta do carrinho. Quando atinge o solo, êle

(a) está se movendo com a mesma velocidade do carrinho;

(b) não se move relativamente ao solo;

(c) move-se com o dôbro da velocidade inicial do carrinho.

Em cada caso, qual a variação na velocidade do carrinho?

Inicialmente, o carrinho (20 kg) e o rapaz (60 kg) movem-se com a velocidade de 2,0 m/s. Assim, a quantidade de movimento total do sistema é $(20 + 60)$ kg $\times$ 2,0 m/s $=$ 160 kg m/s.

a) Neste caso, o rapaz tem uma quantidade de movimento final de 60 kg $\times$ 2,0 m/s $=$ 120 kg m/s, da qual resta $160 - 120 = 40$ kg m/s para o carrinho. Como o carrinho tem uma massa de 20 kg, sua velocidade é de $40 \div 20 =$ 2,0 m/s. Não há *variação* na velocidade do carrinho. Isto é bastante evidente, desde que "desembarca" com a mesma velocidade do carrinho e para isso, o rapaz deve ter-se abandonado ao lado do carrinho, sem comunicar nenhum impulso ao mesmo.

b) Se o rapaz, após atingir o solo, não tem velocidade e, portanto, não possui quantidade de movimento, o carrinho deve ter ficado com os 160 kg m/s iniciais. Logo, move-se com a velocidade de 160/20 $=$ 8,0 metros/s. Assim,

a variação é de 6,0 m/s. Fìsicamente, isto acontece, porque o rapaz deve saltar para trás, fora do carrinho, de modo a atingir o solo sem quantidade de movimento. Procedendo assim, empurra o carrinho para a frente.

c) Se o rapaz se mover com o dôbro da velocidade inicial do carrinho, terá uma velocidade de 4,0 m/s. Sua quantidade de movimento é, então, $60 \times 4{,}0 = 240$ kg m/s. Se a quantidade de movimento final do carrinho é p_f,

$$p_f + 240 = 160;\ p_f = -80 \text{ kg m/s}.$$

O carrinho tem uma velocidade de $-80/20 = -4{,}0$ ou 4,0 m/s, no sentido oposto ao do movimento original. A variação é, portanto, −6,0 m/s.

O resultado acima é válido, se se considera que "duas vêzes a velocidade inicial do carrinho" significa duas vêzes o módulo e no *mesmo* sentido. Isto é óbvio. Entretanto, certos alunos talvez argumentem que a velocidade poderia ser duas vêzes o módulo, porém em sentido oposto. Neste caso,

$$p_f - 240 = 160;\ p_f = 400, \text{ e } v_c = \frac{400}{20} = 20 \text{ m/s}.$$

A variação na velocidade do carrinho seria, então, de $20 - 2 = 18$ m/s.

PROBLEMA 12

O mesmo rapaz está sôbre o mesmo carrinho do Problema 11 e move-se com a mesma velocidade inicial. Salta fora de nôvo, aplicando ao carrinho uma fôrça constante durante 0,20 s e dando ao carrinho um impulso para frente de 20 newton-seg.

(a) Que fôrça êle aplicou?

(b) Qual a velocidade final do carrinho?

(c) Com que velocidade horizontal atinge êle o solo?

a) Uma vez que o impulso é o produto da fôrça pelo tempo,

$$F = \frac{\text{Impulso}}{t} = \frac{20 \text{ newton-seg}}{0{,}20 \text{ seg}} = 100 \text{ newtons}.$$

b) A velocidade final do carrinho é a soma da velocidade inicial com a variação de velocidade fornecida pelo salto.

$$v_f = v_i + \Delta v.$$

A fôrça de 100 newtons, atuando durante 0,20 segundos, resulta numa variação de velocidade determinada por $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$. Primeiramente, determinamos Δv e, em seguida, a velocidade final.

$$\Delta v = \frac{F\,\Delta t}{m} = \frac{100 \text{ newtons} \times 0{,}20 \text{ s}}{20 \text{ kg}} = 1{,}0 \text{ m/s}.$$

$v_f = v_i + \Delta v = 2{,}0$ m/s $+ 1{,}0$ m/s $= 3{,}0$ m/s para a frente.

Alternativamente, e de modo mais direto, a velocidade final pode ser encontrada a partir da conservação da quantidade de movimento:

$p_i = m v_i = 20$ kg $\times$ 2,0 m/s $= 40$ kg m/s.

Um impulso de 20 newton-seg foi aplicado, resultando uma quantidade de movimento final de $40 + 20 = 60$ kg m/s.

$$\vec{p} = m\vec{v}, \text{ e } v = \frac{p}{m} = \frac{60 \text{ kg m/s}}{20 \text{ kg}} = 3{,}0 \text{ m/s}.$$

c) A quantidade de movimento do rapaz foi, inicialmente, 60 kg $\times$ 2,0 m/s $= 120$ kg m/s. A variação da quantidade de movimento do rapaz foi de −20 newton-seg (negativo, porque o impulso foi dirigido em sentido oposto ao seu movimento original). A quantidade de movimento final do rapaz é $120 - 20 = 100$ kg m/s. Como $\vec{p} = m\vec{v}$,

$$v = \frac{p}{m} = \frac{100 \text{ kg m/s}}{60 \text{ kg}} = 1{,}7 \text{ m/s}, \text{ na direção do carrinho.}$$

PROBLEMA 13

Dois carrinhos pesados sem atrito estão em repouso, ligados por um barbante.Uma mola bem leve está comprimida entre êles (Fig. 23-25). Quando o barbante é queimado, a mola se expande de 2,0 cm a 3,0 cm e os carrinhos se separam. Ambos batem no mesmo

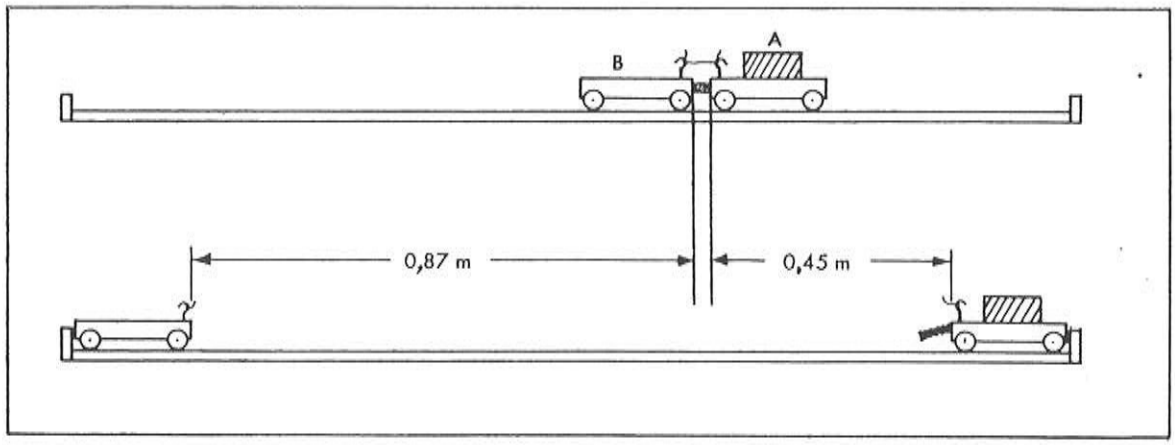
instante contra pára-choques fixos na mesa, mas o carro A moveu-se 0,45 m e o carro B, 0,87 m. Qual a razão:

(a) da velocidade de A para a de B, após a interação?

(b) de suas massas?

(c) dos impulsos aplicados aos carrinhos?

(d) das acelerações dos carrinhos, enquanto a mola os empurra?



Este problema trata da conservação da quantidade de movimento, mas também pode ser usado para introduzir o conceito da terceira lei de Newton, dada na Seção 8 do texto.

a) O carrinho A moveu-se 0,45 metros, durante um tempo t, e o carrinho B moveu-se 0,87 metros neste mesmo tempo. Suas velocidades, portanto, foram:

$$v_a = \frac{0{,}45}{t}, \text{ e } v_b = \frac{0{,}87}{t}.$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, a razão das velocidades é:

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{0{,}45}{0{,}87} = 0{,}52.$$

b) Como as duas quantidades de movimento devem ser iguais em intensidades:

$$m_a v_a = m_b v_b, \text{ ou}$$

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{v_b}{v_a} = \frac{1}{0{,}52}.$$

c) Como as quantidades de movimento são iguais e opostas, os impulsos são também *iguais e opostos.*

d) Como a aceleração média é $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$\frac{a_a}{a_b} = \frac{\Delta v_a/t}{\Delta v_b/t} = \frac{\Delta v_a}{\Delta v_b} = 0{,}52$, mas de sentidos opostos.

PROBLEMA 14

Um carro de bagagem de massa igual a 10^4 kg move-se sôbre um trilho a 2 m/s. Um segundo carro, de masa duas vêzes maior, aproxima-se dêle em sentido oposto. Se ambos colidem e param, com que velocidade se movia o segundo?

Êste é um problema exatamente oposto ao de uma "explosão". Aqui, a quantidade de movimento final é zero. Portanto, a quantidade de movimento inicial é também zero.

A resposta para êste problema pode ser obtida diretamente da conservação da quantidade de movimento. Como a quantidade de movimento final é zero, a quantidade de movimento do carrinho deve ter sido igual, mas de sinal contrário. Desde que a razão de suas massas é 1/2, a razão de suas velocidades deve ser 2/1.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$m_2 v_2 = - m_1 v_1$$

$$v_2 = \frac{- m_1 v_1}{m_2}$$

$$= \frac{- (10^4 \text{ kg} \times 2 \text{ m/s})}{2 \times 10^4 \text{ kg}}$$

$$= - 1 \text{ m/s}.$$

O sinal menos especifica que o sentido do movimento é oposto ao do carro de bagagem mais leve.

PROBLEMA 15

Um próton (massa $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) com velocidade de 1×10^7 m/s, colide com um núcleo de hélio em repouso; o próton recua com a velocidade de 6×10^6 m/s. O núcleo de hélio move-se para a frente com a velocidade de 4×10^6 m/s, após a colisão.

(a) Pode você calcular a massa do núcleo de hélio? Se puder, qual é ela?

(b) Pode você calcular a fôrça que agiu durante a colisão? Se puder, qual é ela?

(c) Se você respondeu "não" às questões (a) ou (b), esteja preparado para discutir em classe porque deu essa resposta.

É um problema de conservação da quantidade de movimento, com sabor de física nuclear.

a) Consideremos m_p a massa do próton e v_p a sua velocidade, antes da colisão. Como o núcleo do hélio estava em repouso, a quantidade de movimento total antes da colisão era $m_p v_p$. Após a colisão, é $m_{He} v_{He} - m_p v_p'$, onde v_p' é a velocidade final do próton; o sinal é negativo, porque a velocidade v_p' é de sentido oposto a tôdas as outras velocidades:

$$m_p v_p = m_{He} v_{He} - m_p v_p', \text{ e}$$

$$m_{He} = \frac{m_p v_p + m_p v_p'}{v_{He}} = \frac{m_p (v_p + v_p')}{v_{He}}$$

$$m_{He} = \frac{1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg} \, (10^7 + 6 \times 10^6 \text{ m/s})}{4 \times 10^6 \text{ m/s}}$$

$$= 4 \times 1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

b) Não.

c) A fôrça durante a colisão *não pode ser calculada*, a menos que o tempo de interação seja conhecido.

Nota 1. Podemos avaliar a fôrça da seguinte maneira: Através de outros tipos de experiências, sabe-se que as fôrças atuam num espaço de cêrca de $2{,}0 \times 10^{-15}$ m. Se dividirmos $2{,}0 \times 10^{-15}$ m por $0{,}5 \times 10^7$ m/s, obteremos $4{,}0 \times 10^{-22}$ s para o tempo de duração da colisão. Empregando êste valor,

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 1 \times 10^7 \text{ m/s}}{4 \times 10^{-22} \text{ s}} \approx$$

$\approx$ 40 newtons.

Esta é a ordem de grandeza do cálculo. A velocidade média pode ser menor; a distância pode ser menor, desde que os núcleos do próton e do hélio possam apenas se tocar. Ainda que v seja 10 vêzes menor, a fôrça é da ordem de 10 newtons, fantàsticamente grande, considerando que é a fôrça entre duas pequenas partículas. Entretanto, para êste problema, a resposta correta é que a fôrça não pode ser calculada.

Nota 2. Há certo significado em responder "não" à parte (b). Mostra o real poder do emprêgo da conservação da quantidade de movimento. Êste é um caso em que não se pode conhecer a fôrça real em jôgo, mas é aplicável à conservação da quantidade de movimento e através dêle pode-se obter informações úteis, tal como a massa do núcleo que recebe o impacto.

PROBLEMA 16

Na Fig. 23-26, a bola maior entrou pela parte superior e a menor pela parte inferior. Como você vê, no meio ocorreu uma colisão.

(a) Desenhe, na mesma escala, os vetores que representam as variações de velocidade da bola maior e da menor. Tome cuidado para que cada um esteja na direção e no sentido correto.

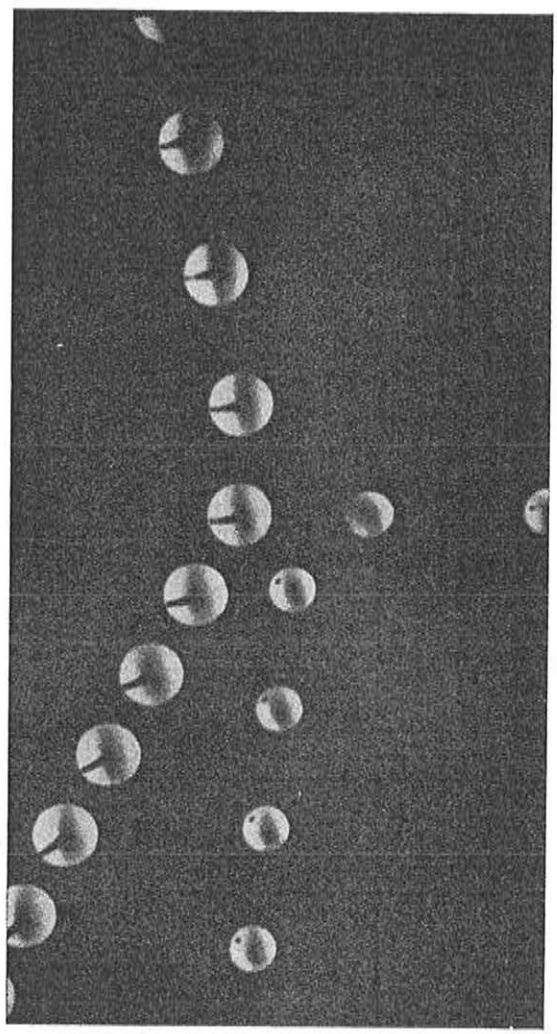
(b) Essas variações de velocidade têm sentidos opostos?

(c) Têm o mesmo valor?

(d) Se seus valôres são diferentes, qual a razão entre êles?

(e) A massa da bola grande é 201 g. Qual a massa da bola pequena?

Deve-se estimular os alunos para que trabalhem com a precisão de 0,1 milímetro e 0,1°. embora as distorções na fotografia sejam, provàvelmente, maiores do que isto. Dependendo da experiência prática que os alunos tenham dêste tipo de problema gráfico, ao pedi-lo, pode-se ressaltar a possibilidade de traçar os vetores velocidade, *proporcionalmente*, mesmo sem conhecer a distância real em escala ou o intervalo de tempo entre os flashes. A velocidade do objeto pode ser traçada, proporcional à distância entre os flashes sucessivos. A direção do movimento pode ser determinada, traçando uma reta por um dos lados da seqüência de imagens da bola, usando um papel transparente para êste fim.



As distâncias podem ser determinadas, traçando uma linha central e, em seguida, medindo-as pelos bordos mais brilhantes.

a) O diagrama vetorial é o mostrado abaixo. A equação vetorial é $\vec{v}_e + \vec{\Delta v} = \vec{v}_s$. Entretanto, $\vec{\Delta v}$ é o vetor da extremidade de $\vec{v}_e$ à extremidade de $\vec{v}_s$.

b) As variações de velocidade estão a menos de 0,5°, no sentido oposto. Qualquer medida entre 0 e 1,5° é razoável.

c) Não. Dos diagramas vetoriais, obtém-se:

$$\frac{\Delta v_{maior}}{\Delta v_{menor}} = \frac{1{,}13}{2{,}68} = 0{,}422.$$

d) Pela conservação da quantidade de movimento, a razão da variação das velocidades deve ser inversamente proporcional à razão das massas:

$$m_{maior}\,\Delta v_{maior} = m_{menor}\,\Delta v_{menor}$$

$$\frac{\Delta v_{maior}}{\Delta v_{menor}} = \frac{m_{menor}}{m_{maior}}.$$

e) Desde que

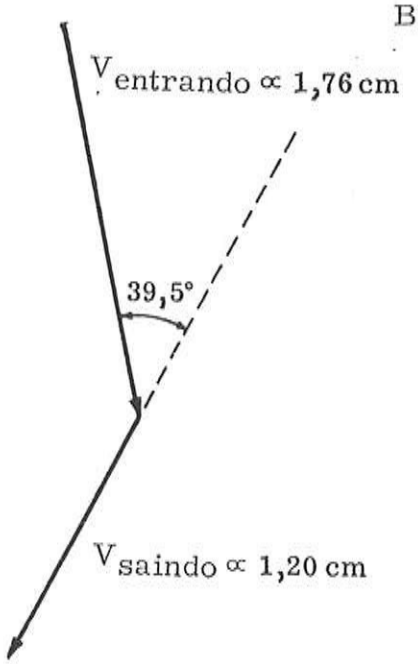
$$\frac{m_{menor}}{m_{maior}} = \frac{\Delta v_{maior}}{\Delta v_{menor}} = 0{,}422,$$

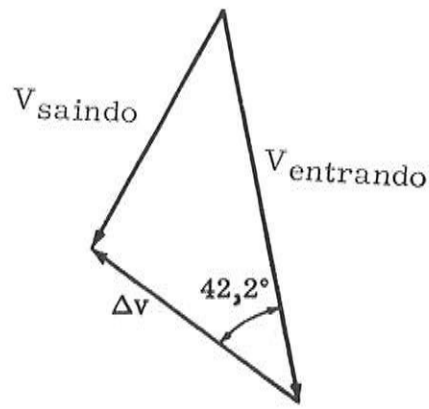
$m_{menor} = 0{,}422 \times 201 = 84{,}8$ g (um valor entre 80 e 90 é aceitável). Evidentemente, estas bolas são de 201 e 85 g, já utilizadas em outras fotografias.

° ° °

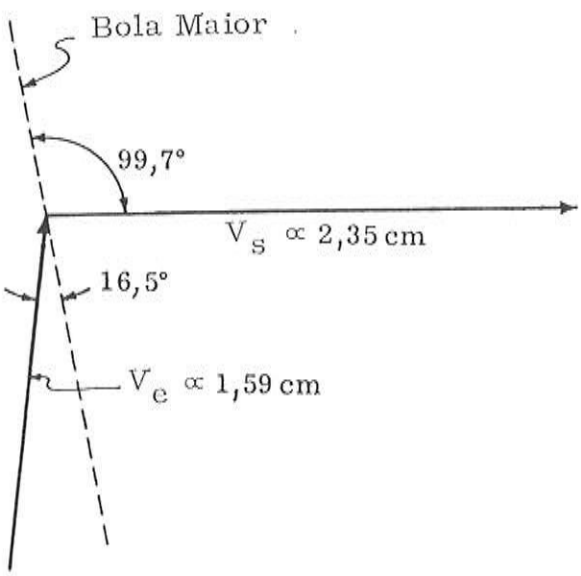
Nota: Você talvez esteja interessado em saber se a energia foi conservada. Peça a cada aluno que guarde a solução dêste problema para verificar a conservação da energia, quando

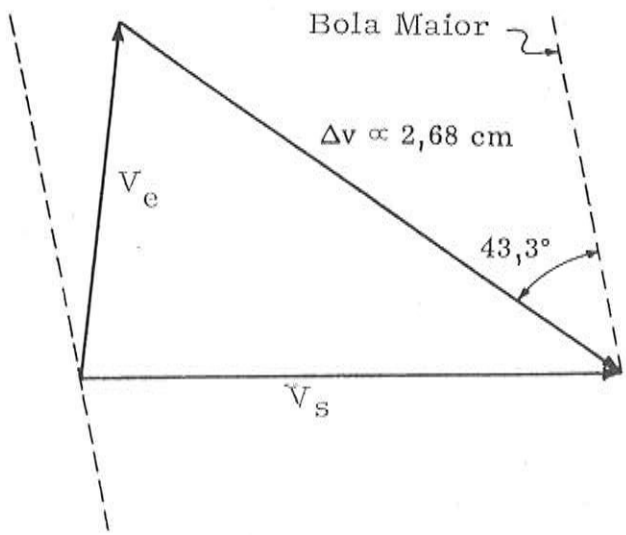
Bola Maior





Bola Menor





êste assunto fôr tratado mais tarde. A energia inicial era proporcional a

$$\frac{1}{2} \times 201 \times 1{,}76^2 + \frac{1}{2} \times 84.8 \times 1{,}59^2 = 418,$$

e a energia final à

$$\frac{1}{2} \times 201 \times 1{,}20^2 + \frac{1}{2} \times 84{,}8 \times 2{,}35^2 = 378.$$

Portanto, perdeu-se cêrca de 9,5% de energia; a colisão *não* foi elástica, mas quase.

PROBLEMA 17

Uma estrêla dupla consiste de duas grandes massas que se atraem gravitacionalmente. Observando o movimento de ambas as massas, podemos ver que elas giram uma em tôrno da outra.

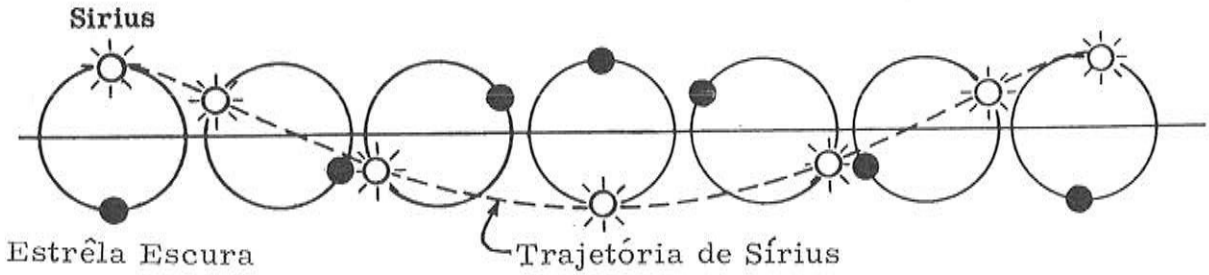
(a) Na sua opinião, o que acontece à quantidade de movimento de cada massa de uma estrêla dupla, à medida que passa o tempo? Explique sua resposta.

(b) Quando observada cuidadosamente, a estrêla brilhante Sirius parece tremer ao invés de mostrar um movimento uniforme do centro de massa. Dessa e de outras observações, os astrônomos concluíram que Sirius tem uma companheira escura. Ela é, realmente, uma estrêla dupla. Como êsse fato explica o estranho movimento observado?

Êste problema leva o aluno a discutir a conservação da quantidade de movimento em uma questão astronômica.

a) A quantidade de movimento de uma das estrêlas não deve permanecer constante, porque há uma fôrça externa — a fôrça de atração gravitacional da outra estrêla — atuando sôbre ela. (As variações da quantidade de movimento, devido à luz, são desprezíveis). Ainda que a quantidade de movimento de cada uma varie, a *soma* das quantidades de movimento de ambas as estrêlas permanece constante, uma vez que se considera o sistema de dupla estrêla tão afastado de outras estrêlas, que pode ser examinado como um sistema isolado. Isto significa que quando varia a conservação da quantidade de movimento em uma das estrêlas, deve variar também na outra, com igual intensidade, porém de sinal contrário. As variações são periódicas, isto é, repetem-se, tôda vez que uma estrêla completa uma revolução em tôrno da outra.

b) Considere que Sírius e sua companheira escura tenham massas iguais e girem uma em tôrno da outra, movendo-se o conjunto através do espaço. O ponto médio entre as duas estrêlas move-se uniformemente.



O modo como êste movimento apareceria a um observador depende da extensão e da freqüência de revolução do sistema binário e, ainda, do ângulo do qual o movimento é observado. Se o observador estiver no mesmo plano de revolução, uma estrêla eclipsará periòdicamente a outra. Isto é denominado binário eclipsante. De outros ângulos, a estrêla visível parecerá tremer em sua trajetória. A intensidade e freqüência do tremor dependerão das massas relativas das estrêlas e da forma de suas órbitas.

PROBLEMA 18

Um vagão carregado, de massa $3{,}0 \times 10^4$kg, choca-se com um carro frigorífico parado, de massa $2{,}0 \times 10^4$kg. Antes do impacto, o vagão movia-se a 1,0 m/s. Se, após o choque, êles se movem juntos, qual é a nova velocidade?

Antes da colisão, a quantidade de movimento total dos dois vagões é a quantidade de movimento do vagão carregado, porque sòmente êle está se movendo. Após a colisão, a quantidade de movimento do sistema dos dois carros é a mesma que antes. Como a colisão junta os dois carros, ambos movem-se com a mesma velocidade, após a colisão.

$$p_f = p_i$$

$$(m_v + m_f)\, v_f = m_v v_v, \text{ e } v_f = \frac{m_v v_v}{m_v + m_f} =$$

$$= \frac{3{,}0 \times 10^4\,\text{kg} \times 1{,}0\,\text{m/s}}{3{,}0 \times 10^4\,\text{kg} + 2{,}0 \times 10^4\,\text{kg}} = 0{,}60\ \text{m/s}.$$

Os alunos, em sua maioria, já viram e ouviram a pancada ruidosa de dois vagões, ao serem engatados. É interessante chamar a atenção para o fato de que, embora existam fôrças complicadas durante o engate, o resultado global é simples de se entender. Se a questão fôr ventilada em discussão, você poderá esclarecer-lhes que a energia cinética se perde no ruído produzido. Contudo, procure evitar embaraços não mencionando energia, nesta altura. Êste será o assunto dos próximos três capítulos.

PROBLEMA 19

Quando um próton (massa $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) colide com um nêutron (massa igual), os dois podem se unir formando um dêuteron (cuja massa é $3{,}34 \times 10^{-27}$ kg). Na realidade, o nêutron tem massa um pouco maior que a do próton, e a massa do dêuteron é levemente menor que a soma das duas. Entretanto, essas diferenças são inferiores a 1 parte em 400. Com que velocidade o dêuteron se moverá, se êle fôr formado por um próton que se move à velocidade de $7{,}0 \times 10^6$ m/s, para a direita, e um nêutron que se move a $3{,}0 \times 10^6$ m/s para a esquerda?

Nota: Realmente, nesta colisão é emitido um raio X. A quantidade de movimento transportada pelo raio X é cêrca de 20% da quantidade de movimento final do dêuteron. Uma resposta que despreze êste dado conterá, portanto, algum êrro.

Êste problema envolve partículas nucleares, em lugar de vagões de estrada de ferro, ilustrando a larga aplicação da conservação da quantidade de movimento.

Na resolução dêste problema, o raio X é inicialmente desprezado.

A quantidade de movimento inicial é

$$p_i = m_p v_p - m_n v_n .$$

O sinal menos indica que as partículas estão se movendo em sentidos opostos. A quantidade de movimento final é:

$$p_f = m_d v_d .$$

Como a quantidade de movimento se conservou, $p_f = p_i$, e, uma vez que todos os movimentos estão ao longo de uma reta, podemos escrever: $m_d\, v_d = m_p\, v_p - m_n\, v_n$

$$v_v = \frac{m_p\, v_p - m_n\, v_n}{m_d} =$$

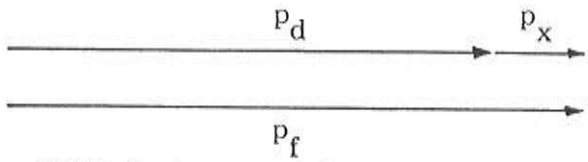
$$\frac{1{,}67 \times 10^{-27}\text{kg} \times (7{,}0 \times 10^6\text{m/s} - 3{,}0 \times 10^6\text{m/s})}{3{,}34 \times 10^{-27}\text{kg}}$$

$= 2{,}0 \times 10^6$ m/s, na direção em que se move o próton.

* * *

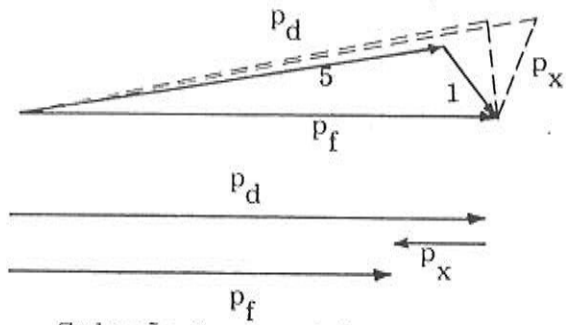
A fim de obter a solução que leva em conta a emissão de raios X, deve-se lembrar que a quantidade de movimento total do sistema é ainda conservada, isto é, o vetor soma da quantidade de movimento do dêuteron e do raio X deve ainda ser:

$m_p v_p - m_n v_n = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg} \times (7{,}0 \times \times 10^6\text{m/s} - 3{,}0 \times 10^6\,\text{m/s}) = 6{,}7 \times 10^{21}\,\text{kg}$ m/s. Foi dado $p_x = 0{,}2\ p_d$, mas como a direção de emissão do raio X não pode ser prevista, a direção do movimento do dêuteron também não pode ser prevista. Várias combinações possíveis de p_d e p_x, que têm razões de 5:1, são mostradas abaixo. Duas soluções extremas também são mostradas, em seguida, com os cálculos respectivos dos valôres de p_d:



Solução 1: $p_d + 0{,}2\, p_d = p_f$

$p_d = 0{,}83\, p_f$



Solução 2: $p_d - 0{,}2\, p_d = p_f$

$p_d = 1{,}25\, p_f$

PROBLEMA 20

Uma mangueira de bombeiro, com bocal regulável, lança jatos de água para dentro de um caminhão que pode deslocar-se sôbre uma superfície horizontal com atrito muito pequeno. A água fica armazenada no tanque do caminhão.

(a) Suponha que a massa do caminhão seja de $4{,}5 \times 10^3$kg e que êle está em repouso, quando o primeiro jato de água o alcança. A água incide nêle a 20 m/s, em direção horizontal, e o primeiro jato é de meia tonelada. Qual é a quantidade de movimento do caminhão, depois de receber o primeiro jato? Com que velocidade êle se move?

(b) Lançamos, agora, um segundo jato no caminhão. A água se move à mesma velocidade (20 m/s) em relação ao solo. Que massa deve ter o segundo jato, para que a velocidade do caminhão aumente de nôvo da mesma quantidade?

(c) Se você aumentasse a velocidade com que a água é lançada, de modo que todos os jatos se movam com a mesma velocidade em relação ao caminhão, como se modificaria sua resposta à parte (b)?

a) Para o primeiro jato de água, a quantidade de movimento é (1/2 ton) (20 m/s) = = 10 ton m/s.

Após a água estar no caminhão, a massa total é 1/2 ton (água + 4 1/2 ton (caminhão) = 5,0 ton.

A quantidade de movimento conserva-se; portanto, a velocidade final do caminhão mais a água, v, é 10 ton m/s = 5 ton × v, v = 2 m/s.

A quantidade de movimento própria do caminhão, é agora de (4,5 ton) (2m/s) = 9 ton m/s.

b) Para o segundo jato, a velocidade da água é ainda 20 m/s. Seja M a massa da água no segundo jato. Portanto, a quantidade de movimento do segundo jato é 20 M m/s. A velocidade final dêste jato deve ser igual à velocidade final do sistema, 4 m/s. Logo, a *variação* da quantidade de movimento, experimentada pelo segundo jato, é simplesmente 4 M − 20 M = − 16 M m/s.

O caminhão, mais o primeiro jato de água têm uma quantidade de movimento inicial de 10 ton m/s, e, como sua velocidade é dobrada ao receber o segundo jato, sua quantidade de movimento final deve ser de 20 ton m/s. Assim, sua *variação* na quantidade de movimento é 10 ton m/s.

A conservação da quantidade de movimento evidencia que a soma da *variação* da quantidade de movimento do segundo jato com a *variação* da quantidade de movimento do caminhão mais o primeiro jato, deve ser zero.

$$10 \text{ ton m/s} - 16\ M \text{ m/s} = 0$$

$$\therefore\ M = 5/8 \text{ ton.}$$

O primeiro jato de água (0,5 ton) fornece uma velocidade de 2 m/s ao caminhão. Como era de se esperar, seriam necessárias mais de 0,5 ton de água no segundo jato, para aumentar novamente de 2 m/s a velocidade do caminhão com o jato original.

c) Se o segundo jato se movesse a 20 m/s em relação ao caminhão, êle deveria se mover a 22 m/s em relação ao solo. Neste caso, a velocidade da água na solução do ítem (b) seria modificada para 22 m/s, e a massa necessária de água seria de 5/9 ton, uma massa de água maior do que a exigida na parte (a), porém menor do que a exigida na parte (b).

Talvez seja interessante considerar quão rápido o caminhão seria empurrado, utilizando a condição das partes (a) e (b). É evidente a resposta de que sua velocidade nunca ultrapassará 20 m/s. Utilizando a condição da parte (c), contudo, o caminhão poderia ser empurrado a uma velocidade arbitràriamente grande — desprezando as limitações da relatividade e, mais particularmente, das mangueiras de bombeiro!

PROBLEMA 21

Um foguete está no espaço livre, lançando um jato de gases e ganhando velocidade em sentido oposto. O que acontece ao centro de massa de tôda a matéria, da que é ejectada e da que é deixada no foguete?

Um foguete, movendo-se no "espaço livre", significa um sistema isolado. O sistema constitui-se da matéria ejectada e da que permanece no foguete. Uma vez que não há fôrça externa atuando sôbre o sistema foguete, o centro de massa do sistema não deve acelerar. Portanto, a velocidade do centro de massa é constante.

PROBLEMA 22

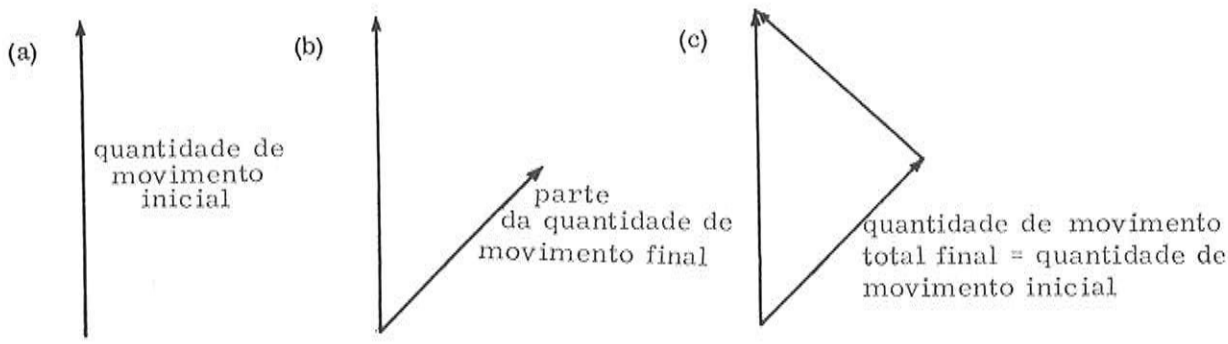
Numa tentativa infrutífera para colocar em órbita um satélite, o foguete transportador, movendo-se verticalmente para cima a 3000 m/s, explode e se fragmenta em dois pedaços. Um dêsses continua para cima, num ângulo de 45° com a vertical e com velocidade de 3500 m/s, imediatamente após a explosão.

(a) Qual é a velocidade do outro pedaço, sendo sua massa igual a 0,60 da massa do primeiro?

(b) Qual a velocidade do centro de massa do foguete, logo após a explosão?

(c) Qual a variação de velocidade do centro de massa, durante 1 segundo logo após a explosão?

a) Seja M a massa do primeiro fragmento do foguete e a do segundo fragmento 0,60 M. A massa original era, portanto, 1,6 M. Para uma solução gráfica do problema, construímos um vetor proporcional à *quantidade de movimento* original do foguete, isto é, proporcional a 3 000 m/s $\times$ 1,6 M $=$ 4 800 M m/s. Devemos traçar um vetor de 4,8 cm, verticalmente para cima como em (a). Após a explosão, sabemos que um dos fragmentos tem uma quantidade de movimento de 3 500 m/s $\times$ 1,0 M $=$ 3 500 M m/s, 45° para cima, à direita, como em (b). O segundo fragmento deve ter uma quantidade de movimento p, como em (c). Medidas mostram que a quantidade de movimento do segundo fragmento é 3 400 M m/s, formando um ângulo de 47° com a vertical.



Assim, chamando v a velocidade do segundo fragmento, obtemos $3\,400\ M\ m/s = 0{,}60\ M \times v$; e a velocidade final do segundo fragmento é *5 700 metros/s para cima, formando um ângulo de 47° com a vertical*, e do outro lado da vertical em relação ao primeiro fragmento.

Podemos também resolver êste problema, decompondo as quantidades de movimento em componentes verticais e horizontais:

componente inicial vertical $= 4\,800\ M\ m/s$,

componente inicial horizontal $= 0$,

componente final vertical do primeiro fragmento $= 3\,500 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 1{,}0\ M = 2{,}475\ M\ m/s$,

componente final horizontal do primeiro fragmento $= 3\,500 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 1{,}0\ M = 2{,}475\ M\ m/s$.

Conseqüentemente, da conservação da quantidade de movimento, obtemos para o segundo fragmento:

$$P_h = -2\,475\ M\ m/s,$$

$P_v = 4\,800\ M\ m/s - 2\,475\ M\ m/s = 2\,325\ M\ m/s.$

Então, $P = \sqrt{(2\,475\ M)^2 + (2\,325\ M)^2} = 3\,295\ M\ m/s$,

e $\operatorname{tg} \Theta = \frac{2\,475}{2\,325}$, $\Theta = 46{,}8°$.

A velocidade é, então: $\frac{3\,395\ M\ m/s}{0{,}60\ M} = 5\,660 \frac{m}{s}$ 46,8° da vertical.

b) A velocidade do centro de massa do foguete era 3 000 m/s, exatamente antes da explosão, e como não atuaram fôrças *externas* sôbre o foguete, a velocidade do centro de massa, após a explosão, é ainda 3 000 m/s.

Uma vez que estamos considerando sòmente a velocidade do centro de massa *imediatamente* após a explosão, o impulso devido à gravidade atuante nesse pequeno intervalo de tempo da explosão será desprezível, e a velocidade permanecerá ainda 3 000 m/s.

c) A fim de compreender como o movimento do centro de massa varia após a explosão, necessitamos apenas imaginar como o foguete todo se comportaria, se não tivesse se fragmentado em dois pedaços, e se o combustível tivesse se esgotado. Se nenhuma fôrça externa atuasse sôbre o foguete, êle continuaria a mover-se com a mesma velocidade em módulo e direção. Isto foi visto na solução do ítem (b).

PROBLEMA 23

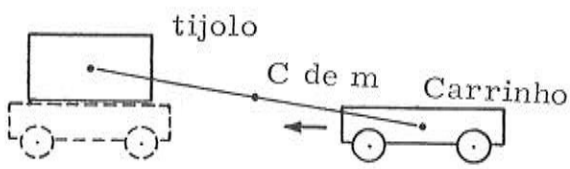
Um tijolo de 2,0 kg, é jogado, sem movimento horizontal, num carrinho de 2,0 kg que se move numa mesa horizontal, sem atrito, a 0,40 m/s.

(a) Qual a variação de velocidade do carrinho?

(b) Qual a velocidade do centro de massa do sistema composto pelo carrinho e pelo tijolo, antes dêste ser jogado?

a) A velocidade inicial do carrinho é 0,40 m/s. Para conservar a quantidade de movimento, quando sua massa é dobrada, sua velocidade é reduzida à metade. Portanto, sua velocidade final é 0,20 m/s.

b) O centro de massa do tijolo de 2 kg e do carrinho de 2 kg permanece no ponto médio sôbre a linha que os une. Conseqüentemente, o centro de massa do carrinho e do tijolo move-se com uma velocidade que é a metade da velocidade do carrinho, antes da "colisão". Logo, o centro de massa move-se a 0,20 m/s, antes da colisão (e após a colisão).



PROBLEMA 24

Uma metralhadora atira dez projéteis por segundo a uma velocidade de 600 m/s. A massa de cada projétil é 100 g.

(a) Que impulso a metralhadora transmite aos projéteis em 10 s?

(b) Que impulso os projéteis aplicam à metralhadora em 10 s?,

(c) Qual é a fôrça média aplicada sôbre a metralhadora?

(d) Esboce gráficos aproximados de

(i) Fôrça *média* sôbre a metralhadora em função do tempo;

(ii) Fôrça *real* sôbre a metralhadora em função do tempo.

(e) Como estão relacionados os gráficos (i) e (ii)?

a) Cada projétil tem uma quantidade de movimento de:

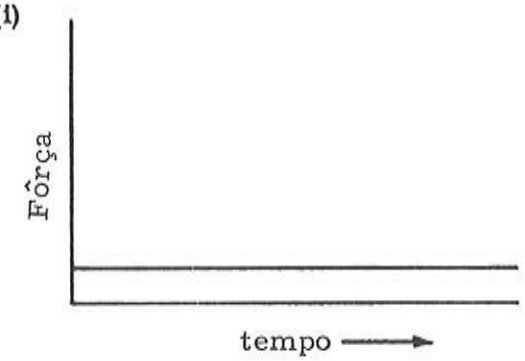
$$0{,}1 \text{ kg} \times 600 \text{ m/s} = 60 \text{ kg m/s}.$$

Em dez segundos, 100 projéteis são atirados; dêsse modo, o impulso total aplicado pela metralhadora aos projéteis é 60 kg m/s $\times$ 100 = = 6 000 kg m/s ou newton-seg.

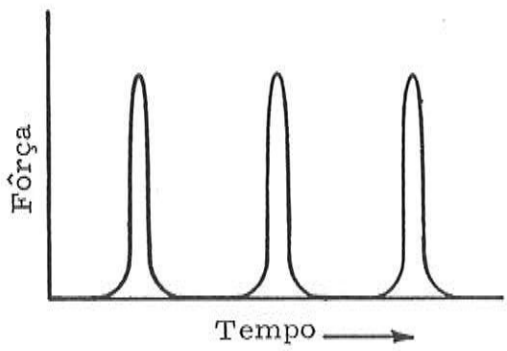
b) Uma vez que não há impulso resultante no sistema metralhadora e projéteis, a quantidade de movimento é conservada. Por esta razão, o impulso aplicado pelos projéteis à metralhadora é 6 000 newton-seg, no sentido oposto ao do ítem (a).

c) Desprezando a reação dos gases (o que pode ser feito com uma arma bem projetada) o impulso total aplicado à metralhadora em 10 segundos é 6 000 newton-seg. Isto é 600 newton-seg por segundo, que dá como fôrça média 600 newtons.

d) (i)



(ii)



Um gráfico aproximado da fôrça real em função do tempo é mostrado em (ii). O tempo de duração do impulso da fôrça, comparado ao tempo entre os intervalos da fôrça, seria ainda menor do que o mostrado; e sabemos pouco sôbre a real forma dos picos.

c) As áreas sob os dois gráficos são iguais.

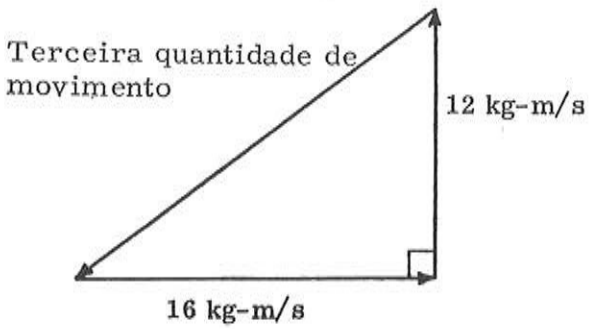
PROBLEMA 25

Uma explosão divide uma rocha em três partes. Dois pedaços são lançados em direções perpendiculares entre si; um dêles tem massa de 1,0 kg e é lançado a 12 m/s, o outro, de 2,0 kg, é lançado a 8,0 m/s. O terceiro pedaço voa a 40 m/s.

(a) Faça um desenho mostrando a direção em que o terceiro pedaço é lançado.

(b) Qual a sua massa?

a) Devemos considerar que a rocha está inicialmente em repouso. Portanto, tinha uma quantidade de movimento zero, antes da explosão, e assim, deve ter quantidade de movimento zero após a explosão. A quantidade de movimento do pedaço de 1,0 kg é 12 kg m/s; a quantidade de movimento do pedaço de 2,0 kg é 16 kg m/s, formando um ângulo reto com o primeiro. O terceiro pedaço deve ter uma quantidade de movimento $\vec{p}$, dada pelo diagrama vetorial que mostra que a soma das três quantidades de movimento é zero.



b) O diagrama mostra a direção em que o terceiro pedaço é lançado, e, a partir do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5, deduz-se que tem uma quantidade de movimento de 20 kg m/s. Como sua velocidade é 40 m/s, sua massa é 1/2 kg.

PROBLEMA 26

O sistema indicado na Fig. 23-27 consiste em uma armação de 5,0 kg com duas massas no meio, uma de 1,0 kg e a outra de 4,0 kg. Em cada extremo da armação, há aparadores feitos de massa de vidraceiro. As duas massas e a armação são montadas sôbre discos de gêlo sêco (as massas dos discos estão incluídas nos valôres dados acima). O centro de massa de todo o sistema está no centro da armação. Uma explosão separa as duas massas, e a de 1,0 kg sai com a velocidade de 12 m/s. Finalmente, as duas massas são detidas pela massa de vidraceiro.

(a) Qual a velocidade da massa de 4,0 kg logo após a explosão?

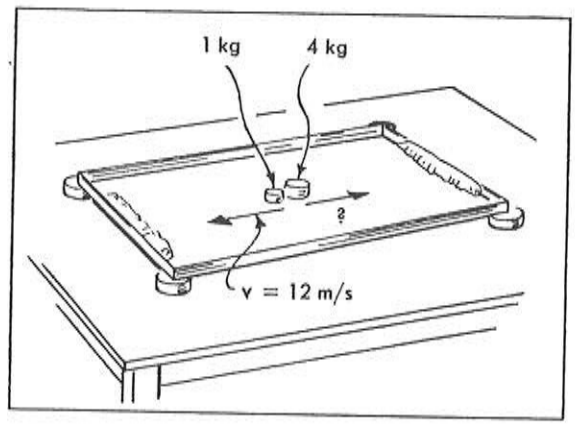
(b) Onde está o centro de massa de todo o sistema, após 1 s? Após 2 s?

(c) Qual a velocidade da armação e das massas ligadas a ela, após 100 s?

(d) Descreva o movimento qualitativamente, a partir do instante da explosão até 100 s.

(e) A que distância se move a armação?

a) A quantidade de movimento deve ser conservada na explosão, entre as massas de 1,0 e 4,0 kg. A massa de 1,0 kg possui uma quantidade de movimento de 12 kg m/s, após a explosão. A massa de 4,0 kg deve ter uma quantidade de movimento igual e oposta e, por isso, uma velocidade de 3,0 m/s.

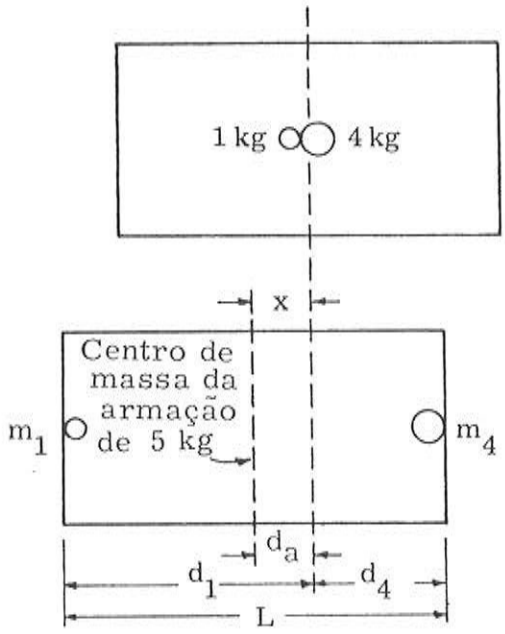


b) Como não há fôrças *externas* atuando sôbre o sistema, o centro de massa de todo o sistema permanece fixo durante todo o tempo.

c) Desde que não existem fôrças *externas* atuando, e como a quantidade de movimento antes da explosão do sistema era zero, a quantidade de movimento permanece zero. Quando a armação e as duas massas estão ligadas, tôdas têm a mesma velocidade — zero. (Com dimensões razoáveis, as massas atingem a armação, antes de decorrer 100 segundos).

d) Com a explosão, as massas de 1,0 e 4,0 kg separam-se com velocidades de 12 e 3 metros/s, respectivamente. A massa de 1,0 kg atinge primeiramente a armação, aderindo à ela e movendo-a em sua direção. A quantidade de movimento da armação e da massa de 1,0 kg é 12 kg m/s, que é a quantidade de movimento da massa antes da colisão. Em seguida, a massa de 4,0 kg choca-se e transfere 12 kg m/s, no sentido oposto, parando a armação e as massas.

e) A distância percorrida pela armação pode ser calculada, resolvendo a parte (d) quantitativamente. Entretanto, o método mais simples é considerar que o centro de massa não se move.



Suponha que a armação se moveu de uma distância x. Logo, ela atua como uma massa de 5,0 kg, à distância x do centro de massa anterior. Sendo L o comprimento da armação, a massa de 1,0 kg está a (L/2 + x do centro de massa, e a massa de 4,0 kg está a (L/2 — x) do centro de massa.

$$d_1 m_1 + d_a m_a = d_4 m_4$$

$$\left(\frac{L}{2} + x\right) m_1 + x\, m_a = \left(\frac{L}{2} - x\right) m_4$$

$$\frac{Lm_1}{2} + x\, m_1 + x\, m_a = \frac{Lm_4}{2} - x\, m_4$$

$$x\,(m_1 + m_4 + m_a) = \frac{L\,(m_4 - m_1)}{2}$$

$$x\,(1{,}0 + 4{,}0 + 5{,}0) = \frac{L\,(4{,}0 - 1{,}0)}{2}$$

$$x = 0{,}15\ L.$$

Muitos alunos, incapazes de resolver esta parte do problema utilizando L, poderão resolvê-la, se lhes fôr dado um valor específico para L.

———

CAPÍTULO 24

TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

O Capítulo 24 introduz a energia, um dos mais úteis conceitos da Física. A idéia de energia abrangerá os dois próximos capítulos e será intensamente empregada no restante do curso. A aplicação da lei da conservação de energia é um poderoso instrumento, na solução de uma grande variedade de problemas, particularmente aquêles em que os detalhes da fôrça de interação não são conhecidos (por exemplo, em colisões).

Para um comentário geral sôbre os três capítulos de energia, talvez seja interessante referir-se ao sumário da Parte III, no início dêste volume.

RESUMO DO CAPÍTULO

O trabalho é introduzido como uma forma mensurável de energia transferida, partindo de idéias sôbre o consumo de combustível. O trabalho, que provoca a aceleração de um corpo, produz uma correspondente variação na quantidade 1/2 mv^2 (energia cinética). A colisão elástica é analisada, detalhadamente.

Seções de 1 a 3. Das noções intuitivas sôbre "energia", "tarefa", "trabalho" e "combustível", uma definição do conceito científico de *trabalho* é desenvolvida. O trabalho é igual ao produto da fôrça pelo deslocamento produzido *na direção da fôrça.*

Seção 4. O trabalho, fornecido para acelerar um corpo, produz uma variação na quantidade 1/2 mv^2 (energia cinética). A mesma quantidade de trabalho produz sempre a mesma variação na energia cinética. Um objeto em movimento pode realizar uma quantidade de trabalho exatamente igual ao seu 1/2 mv^2 inicial.

Seções de 5 a 7. As variações nas energias cinéticas, em uma colisão entre dois corpos, são analisadas, e dá-se maior ênfase a colisões elásticas (isto é, colisões em que a energia cinética é conservada). Finalmente, demonstra-se que uma colisão é "elástica" quando a fôrça entre os dois corpos é, ùnicamente, uma função da distância de separação entre êles.

Seções de 8 a 11. As conseqüências gerais da conservação da quantidade de movimento e da energia cinética são aplicadas a interações elásticas, a fim de obter soluções para uma certa classe de problemas. Algumas das características das colisões inelásticas são, também, discutidas.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 24

O Capítulo 24 contém uma grande quantidade de assuntos novos e importantes, que exigirão um tempo considerável de aula para um pleno desenvolvimento. Deve-se demorar na resolução de problemas envolvendo trabalho e energia cinética, a fim de dominar corretamente o uso quantitativo dêsses conceitos em situações físicas. A seção Casa, Classe e Laboratório contém grande número de problemas adequados para estimular discussões em classe. Certos problemas suplementares, úteis para testes ou discussões, são apresentados nas páginas subseqüentes.

A tabela seguinte sugere um possível planejamento para êste capítulo, de conformidade com o planejamento geral dado na seção sumária para a Parte III. As seções entre colchêtes podem ser dadas com menor ênfase nas discussões de classe, sem quebra de continuidade.

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp.
Secs. 1, 2, 3	3	0	-	2	0	-
Sec. 4	1	0	-	1	0	-
Secs. 5, [6], [7]	3	1	III-11	1	1	III-11
Secs. 8, [9], 10, 11	2	0	-	2	0	-

MATERIAIS RELATIVOS AO CAPÍTULO 24

Laboratório. Experiência III-11. *Colisões Lentas.* Esta experiência emprega dois carrinhos maciços e pesados, com molas "aparadoras" macias, numa colisão frontal. A "colisão" ocorre de maneira suficientemente lenta, que permite aos alunos observá-la em detalhe, fazendo medidas quantitativas. Esta experiência deve ser diretamente integrada à discussão de classe das Seções de 5 a 7.

Filmes. "Energy and Work", pela Professôra Dorothy Montgomery, do Hollins College mostra que o trabalho para elevar uma pesada bola transforma-se em energia cinética, quando a bola cai. A relação entre o trabalho fornecido e a variação na energia cinética é salientada, em seguida, pela demonstração com um dispositivo, no qual uma fôrça variável (mas reproduzível) atua através de uma dada distância. Isto é feito, encontrando o trabalho pela área sob a curva fôrça-distância e a energia cinética, pela medida da massa e da velocidade. Um dispositivo divertido é utilizado para lembrar aos alunos de que mgh expressa a energia potencial gravitacional. Finalizando, o filme abre caminho para a energia calorífica, mostrando que, como a bola em queda é detida, a perda de energia cinética é acompanhada de um aumento em calor. Êste filme pode ser exibido em conexão com o Capítulo 24 ou 25 Os professôres, na sua maioria, preferem utilizá-lo quase no meio ou no fim do Capítulo 25. Tempo de projeção: 28 minutos.

Casa, Classe e Laboratório. A tabela que se segue classifica os problemas, de acôrdo com seus níveis avaliados de dificuldade e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente adequados para discussão em classe. Problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas de todos os problemas são dadas nas páginas do CCL.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe
1, 2, 3	5*	1, 2*, 3, 4*		1, 2*, 4*, 5*
4	7, 9, 10	6*, 8*, 11*, 12 13, 14, 15*		6*, 8*, 11*
5, 6, 7	20	17*, 18*, 21*, 22	16*, 19	16*, 17, 21*
8, 9, 10, 11	24, 26, 27*, 29	25, 28, 30, 31*, 32	23, 33, 34	23, 24, 25, 28, 31*

Seção 1 — Transferência de Energia

Seção 2 — Trabalho: Uma Medida da Energia Transferida

Seção 3 — Mais Fatos Sôbre a Definição de Trabalho

FINALIDADE. Introduzir o trabalho como uma medida quantitativa da energia transferida.

CONTEÚDO a. A quantidade de energia transferida pode ser medida, em têrmos do trabalho realizado ou em têrmos do consumo de combustível — dois serviços idênticos requerem o dôbro do combustível ou o dôbro do trabalho de um único serviço.

b. O consumo de combustível varia aparentemente, com o valor da fôrça exercida e com a distância através da qual a fôrça atua. O trabalho é definido como o produto da fôrça × distância. O joule é definido como a unidade de trabalho, quando a fôrça é expressa em newtons, e a distância na qual a fôrça atua é expressa em metros.

c. A quantidade de trabalho é independente do tempo de aplicação da fôrça.

d. Uma fôrça que não move um objeto não realiza trabalho. O trabalho é realizado, sòmente quando uma fôrça atua paralelamente ao deslocamento.

ÊNFASE. Êste assunto é muito importante e deverá tomar, talvez, duas ou três aulas para o seu desenvolvimento. Será sensato não tentar *definir* energia em têrmos de trabalho. Deixe que o conceito se desenvolva naturalmente, neste e nos dois capítulos seguintes. Entretanto, é oportuna, aqui, uma definição exata de *trabalho*, já que o trabalho é um conceito puramente mecânico.

DSENVOLVIMENTO. De modo geral, os alunos aceitarão a idéia de consumo de combustível, como uma medida quantitativa de alguma coisa, pelo menos, do custo da tarefa particular executada. Esta é uma boa idéia para nela se insistir, já que afinal de contas, a lei da conservação da energia que estamos desenvolvendo não pode ser representada apenas pelo custo total avaliado do combustível, ao realizar uma ampla variedade de tarefas. O custo é um conceito intuitivamente quantitativo, e a extrapolação do consumo de combustível para a definição mecânica de trabalho pode ser considerada quantitativa.

A lógica do desenvolvimento inicial de trabalho e energia foi cuidadosamente resolvida, de acôrdo com um plano no texto, e será aconselhável seguir esta lógica o mais estritamente possível. De outro modo, é muito fácil cair numa definição circular de "trabalho" e "energia", utilizando aparentemente os dois têrmos para descrever a mesma coisa. O têrmo "trabalho" deve ser limitado a fôrças externas que alteram a energia do sistema. O conceito torna-se terrìvelmente confuso, se o trabalho é feito por algo no interior do sistema, uma vez que é muito difícil isolar o agente ou a fôrça que realiza o trabalho (por exemplo, quando um pêndulo oscila, a energia está contìnuamente sendo convertida, de potencial para cinética e vice-versa; — não faz sentido falar do pêndulo realizando trabalho sôbre si mesmo ou sôbre o campo gravitacional da Terra; o pêndulo e a Terra constituem um único sistema, e a energia total do sistema não se altera, enquanto o pêndulo oscila).

COMENTÁRIOS. Certos alunos talvez não entendam, e se preocupem com a idéia de que nenhum trabalho é realizado, quando uma fôrça é aplicada a um objeto que não se move. As vigas de cimento armado mantêm de pé um edifício. Elas exercem uma tremenda fôrça, mas não se movem em nenhum lugar. Não requerem combustível. As vigas não estão realizando trabalho. Todavia, algumas vêzes, todos nós carregamos uma pesada carga sôbre nossas cabeças, esperando por alguém que nos alivie disso. É penoso manter uma carga apreciável, por mais de um curto espaço de tempo. Isto nos cansa. Por isso, é natural dizermos que trabalhamos. Contudo, o único trabalho realizado foi contra os atritos internos (bombear sangue), e gerar calor por combustão. O resultado é que aquecemos nossos corpos, mas não realizamos trabalho útil sôbre outro sistema.

Freqüentemente, verificamos que o nosso vocabulário técnico fica encoberto pela nossa linguagem cotidiana, menos precisa. Estar alerta para o "trabalho". Agora, temos uma definição precisa de trabalho. Os alunos simplesmente precisam compreender que "trabalho", em Física, não abrange muitas das

idéias, para as quais é empregado familiarmente. Resolver um problema é "trabalho duro", mas a energia consumida é muito pequena.

O trabalho é sòmente uma forma de transferência de energia. Outras formas serão desenvolvidas em capítulos subseqüentes.

* * *

O trabalho é realizado apenas pela componente da fôrça, na direção do deslocamento. O texto desenvolve estas idéias, mostrando que nenhum combustível é consumido, quando um objeto desliza com velocidade constante sôbre uma mesa sem atrito. A fôrça exercida pela mesa, para sustentar o objeto, é perpendicular ao movimento e, assim, não realiza trabalho. (Veja a Apêndice 6, no fim dêste volume, para uma discussão do trabalho como um produto escalar de dois vetores).

O mesmo problema também pode ser tratado, do ponto de vista do estado final do sistema. A energia contida foi alterada pela ação da fôrça? Considere o disco de gêlo sêco, seguro por um fio, de tal modo que se mova em um círculo de raio constante. Novamente, êste é o caso de uma fôrça constante atuando perpendicularmente ao movimento. Suponha que se queime o fio com uma chama, após 5 revoluções. O disco liberta-se tangencialmente, com a mesma velocidade (módulo) com que descrevia a circunferência. Agora, repita a experiência mas, desta vez, queime o fio após 10 revoluções. A fôrça centrípeta atua durante o dôbro do tempo, neste caso. Ela acelera o disco, contìnuamente. Todavia, o disco de gêlo sêco se liberta, exatamente do mesmo modo que na primeira experiência. A fôrça atua perpendicularmente à direção do movimento. Não há realização de trabalho.

* * *

O texto evidencia que o trabalho realizado depende sòmente da fôrça e da distância percorrida na direção da fôrça, mas não depende do tempo de ação da fôrça. Alguns alunos talvez não se conformem com esta afirmação, porque lhes ocorrerão exemplos nos quais o tempo parece ser um outro fator (por exemplo, gasta-se mais gasolina para percorrer uma dada distância a 100 km/h do que a 50 km/h). A diferença no consumo de combustível não está associada à diferença na energia cinética do carro, nos dois casos. As energias cinéticas inicial e final são zero, em ambos os casos. As fôrças de atrito, provocadas ao mover-se um sólido sôbre outro (por exemplo, pneus sôbre uma estrada), são essencialmente independentes do módulo da velocidade dos objetos; assim, o atrito dos pneus não deve alterar o consumo de combustível. A resposta deve ser atribuída ao efeito do atrito e à resistência do ar sôbre o carro, à resistência ao movimento entre as várias partes do carro e ao óleo de lubrificação. Quando um corpo está se movendo através de um fluido, a fôrça de atrito aumenta aproximadamente com a velocidade do corpo, proporcionalmente à velocidade. (Êste mesmo efeito é responsável pelo fenômeno da velocidade limite). Portanto, um carro em alta velocidade gasta mais combustível do que em baixa velocidade, para cobrir a mesma distância. Isto, porque uma fôrça maior deve ser aplicada para mover um carro mais ràpidamente a uma velocidade constante, a fim de vencer a resistência de atrito, do que a necessária para mover o mesmo carro com uma velocidade menor. Logo, mais trabalho é realizado pelo carro mais rápido, e, assim, mais combustível é consumido.

PROBLEMAS COMPLEMENTARES

1. Calcule o trabalho realizado por um rapaz que puxa um trenó a uma distância de 20 m, enquanto exerce uma fôrça de 100 newtons sôbre uma corda que forma um ângulo de 45° com a horizontal. ($1\,000\sqrt{2}$ joules).

2. Um homem puxa para cima uma massa de 20 kg num plano inclinado, sem atrito, que forma um ângulo de 30° com o solo horizontal. Êle desloca a massa para um ponto situado a 5,0 metros de altura do solo.
   (a) Que trabalho realizou? (980 joules).
   (b) Que fôrça necessitou para elevar a massa? (98 newtons).
   (c) Qual foi a distância percorrida pela massa, ao longo do plano? (10 m).
   (d) Qual seria o trabalho necessário para fazer a mesma tarefa, se o plano tivesse atrito, com uma fôrça retardadora de 50 newtons ao longo do plano? (1 480 joules).

3. Que trabalho é feito por um homem, que pega uma bola de boliche de 7,5 kg, da altura

de 2,0 m de um armário, e a transfere, baixando-a ao solo? (150 joules são realizados sôbre o homem pela bola).

4. Que trabalho é necessário para carregar uma valise de 15 kg, a uma distância horizontal de 50 m? (Zero).

5. Um rapaz de 60 kg empurra uma moça de 50 sôbre uma pista de dança. Êle exerce uma fôrça média de 80 newtons sôbre o seu par. Durante a dança, êles se movem à razão de 0,50 m/s, por 5,0 minutos. Que trabalho realizou o coitado? (12 000 joules).

Seção 4 — Energia Cinética

FINALIDADE. Introduzir a energia cinética.

CONTEÚDO. O trabalho é uma forma de transferência de energia. Quando se realiza trabalho sôbre um objeto, de modo que seja colocado em movimento e não se produza outras alterações, então, tôda a energia transferida aparece em forma de energia do movimento ou energia cinética. Portanto, o trabalho realizado é exatamente igual à variação no valor da quantidade $1/2\ mv^2$. Esta quantidade é definida como energia inerente ao movimento ou energia cinética. O mesmo trabalho produzirá sempre a mesma variação na energia cinética, quer uma pequena fôrça atue em uma grande distância, quer uma grande fôrça atue em uma pequena distância. Um objeto em movimento pode realizar trabalho. A quantidade de trabalho obtido, ao levar um objeto ao repouso, é igual ao trabalho gasto em provocar o movimento. A energia cinética de um objeto, $1/2\ mv^2$, é um importante parâmetro para descrever uma característica dinâmica do objeto. Ela não depende, absolutamente, da história anterior do objeto, para adquirir a condição em questão.

ÊNFASE. Estas idéias são básicas para o entendimento da energia cinética. Pelo menos, um período completo de aula deve ser despendido na discussão desta seção.

DESENVOLVIMENTO. Esta seção introduz a primeira definição quantitativa de algumas formas de energia. Para fornecer aos alunos uma percepção da energia cinética e sua relação com o trabalho, valerá a pena apresentar alguns exemplos em classe. O texto sugere uma amostra. De início, você pode apresentar, em detalhes, o exemplo de uma massa de 1 kg, acelerada por uma fôrça de 5 newtons, atuando através de 10 metros, e por uma fôrça de 10 newtons, atuando através de 5 metros. Mostre que idêntico trabalho é realizado, e que a mesma energia cinética é desenvolvida nos dois casos.

° ° °

Freqüentemente, os alunos sentem dificuldade em compreender que a energia cinética e a quantidade de movimento são duas grandezas físicas completamente diferentes. Esta diferença deve ser bem evidenciada. Os dois exemplos seguintes podem ser úteis. O primeiro exemplo desenvolve a energia cinética como uma propriedade do movimento. O exemplo mostra como idêntico trabalho, realizado em dois casos diferentes, produz a mesma variação na energia cinética, mas uma variação bem diferente na quantidade de movimento. O segundo exemplo ressalta as propriedades diferentes de dois objetos movendo-se com a mesma quantidade de movimento, mas com energias bem diferentes.

Exemplo 1. a) Considere uma fôrça de 1 500 newtons atuando numa distância de 200 metros, sôbre um carro de 1 500 kg, que parte do repouso. O trabalho realizado é:

$$T_1 = F_1 x_1 = 1\,500 \times 200 = 3 \times 10^5 \text{ joules.}$$

Para determinar a velocidade final do carro, após ter êle percorrido êsses 200 metros, observamos que a aceleração foi:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{1\,500}{1\,500} = 1 \text{ m/s}^2; \text{ portanto}$$

$$v_1^2 = 2\,a_1\,x_1 = 400 \text{ m}^2/\text{s}^2, \text{ e}$$

$$v_1 = 20 \text{ m/s.}$$

A quantidade de movimento do carro será:

$$p_1 = mv_1 = 1\,500 \times 20 = 3 \times 10^4 \text{ kg m/s.}$$

A energia cinética será:

$$(E_c)_1 = \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 = \frac{1}{2}\, 1\,500 \times 400 =$$

$$= 3 \times 10^5 \text{ joules,}$$

que é igual a T_1, o trabalho realizado (veja acima).

b) Agora, considere a fôrça de 1 500 newtons atuando novamente, no mesmo sentido, por mais 200 metros.

$$T_2 = F_2 x_2 = 1\,500 \times 200 = 3 \times 10^5 \text{ joules.}$$

Para determinar a velocidade, observamos que a aceleração é, novamente:

$$a_2 = \frac{F_2}{m} = \frac{1\,500}{1\,500} = 1 \text{ m/s}^2.$$

A velocidade final, v_2, é dada por:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\,a_2 x_2 = 400 + 2 \times 1 \times 200 = 800 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

$$\therefore v_2 = 28{,}3 \text{ m/s.}$$

A nova quantidade de movimento do carro será:

$$p_2 = mv_2 = 1\,500 \times 28{,}3 = 4{,}24 \times 10^4 \text{ kg m/s.}$$

Portanto, a variação na quantidade de movimento durante o segundo intervalo foi:

$$(\triangle p)_2 = p_2 - p_1 = 1{,}24 \times 10^4 \text{ kg m/s,}$$

enquanto no trecho inicial:

$$(\triangle p)_1 = p_1 - p_1 = 3 \times 10^4 \text{ kg m/s.}$$

A energia cinética final será:

$$(E_c)_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} 1\,500 \times 800 = 6 \times 10^5 \text{ joules.}$$

Portanto, a variação na energia cinética, E_c, foi a mesma em ambos os intervalos, enquanto a quantidade de movimento foi bem diferente. Em cada caso,

$$\triangle(E_c) = T = 3 \times 10^5 \text{ joules.}$$

Por que isto acontece? No primeiro período, o carro acelera de zero para uma velocidade de 20 m/s, com aceleração constante. Portanto, o lapso de tempo decorrido foi:

$$v_1 = 20 = v_1 + a_1 t_1 = 0 + (1 \times t_1),$$

$$\therefore t_1 = 20 \text{ segundos.}$$

O lapso de tempo decorrido, durante a segunda aceleração, foi:

$$v_2 = 28{,}3 = v_1 + a_2 t_2 = 20 + (1 \times t_2),$$

$$\therefore t_2 = 8{,}3 \text{ segundos.}$$

Portanto, apesar de fôrças idênticas atuarem através da mesma distância, o *tempo* de ação dessas fôrças foi bem diferente nos dois casos. Isto ocorre porque, para a segunda aceleração, havia uma grande velocidade inicial que concorreu para que a distância dada fôsse percorrida num tempo bem menor. Como foi demonstrado no Capítulo 23, a variação da quantidade de movimento é causada pelo impulso. Nos dois intervalos de tempo em questão, o trabalho realizado foi o mesmo, mas o impulso, fôrça $\times$ *tempo*, foi bem diferente.

Exemplo 2. A fim de destacar a diferença entre as duas medidas do movimento, quantidade de movimento e energia, é interessante citar um exemplo tal como êste: uma bala de 100 g e um carro de 1 500 kg chocam-se com um bloco de madeira. A bala com uma velocidade inicial de 300 metros por segundo; o carro com 0,02 metros por segundo. Logo, tanto o carro como a bala têm uma quantidade de movimento inicial de 30 kg m/s, mas a energia cinética da bala é $(E_c)_b = 4{,}5 \times 10^3$ joules, enquanto para o carro $(E_c)_c = 0{,}3$ joules. Esta diferença nas energias cinéticas faz com que o carro dê apenas uma leve pancada no bloco de madeira, enquanto a bala, com a mesma quantidade de movimento, porém com muito mais energia, rompe ou arrebenta o bloco de madeira.

É interessante recordar uma discussão que houve no século XVIII. Descartes, filósofo e matemático francês, afirmou que a quantidade mv era uma característica importante do movimento de um corpo e que era uma constante para um sistema isolado. O filósofo e matemático alemão Leibnitz combateu-o severamente, declarando que Descartes estava errado — a quantidade importante era mv^2, não mv. Agora, vemos que ambos estavam certos, mas referiam-se a propriedades completamente diferentes.

Um outro ponto interessante e, algumas vêzes, mal compreendido no que tange à variação da energia cinética, relaciona-se com a sua medida em diferentes sistemas de referência que se movem, um em relação a outro. A energia cinética de um objeto é relativa. Relativamente a

um observador num trem em movimento, uma bola de basebol tem uma velocidade bem diferente (portanto, também, quantidade de movimento e energia cinética) do que quando vista por um observador no Sol. Como a quantidade de movimento varia com a primeira potência da velocidade, as variações na quantidade de movimento são idênticas, observadas de qualquer sistema. Contudo, a energia cinética varia com o quadrado da velocidade; por isso, as variações na energia cinética são diferentes, quando observadas de diferentes sistemas de referência. O exemplo seguinte ilustra esta situação.

Exemplo 3. Imagine um homem viajando sôbre um vagão (gôndola) de um trem de carga. Suponha que o trem esteja se movendo a 10 m/s. O homem lança uma bola de basebol na direção do movimento do trem, exercendo uma fôrça de 50 newtons, através de um movimento de 1 metro, de suas mãos. A bola atinge uma velocidade de 10 m/s, relativamente ao vagão. A energia cinética da bola, relativa ao vagão, é $\frac{1}{2} \times 1 \text{ kg} \times (10 \text{ m/s})^2 = 50$ joules. Mas, como veria isto um observador no solo? Inicialmente, a bola já estava se movendo, com uma velocidade de 10 m/s, devido ao movimento do vagão. Sua energia cinética inicial era, portanto, 50 joules. Após o lançamento, a bola tem uma velocidade de 20 m/s. Sua energia cinética final foi $\frac{1}{2} \times 1 \text{ kg} \times (20 \text{ m/s})^2 = 200$ joules, e sua variação na energia cinética, na operação lançamento, foi 200 — 50 = 150 joules. Qual é a fonte do trabalho que produz essa variação na energia? A fôrça que atuou sôbre a bola foi, ainda, de 50 newtons. Contudo, a distância em que a fôrça atuou é bem diferente, quando vista do solo. Ela pode ser calculada da seguinte maneira.

No trem, a mão do homem moveu-se 1 metro. Se sua fôrça fôsse constante, a aceleração seria constante. A velocidade final da mão do homem foi de 10 m/s. Portanto, a velocidade média foi de 5 m/s, e o tempo da aceleração teve duração de $t = \frac{s}{v} = \frac{1}{5}$ segundo. Entretanto, em 1/5 do segundo, o trem move-se $1/5 \times 10 = 2$ metros, relativamente ao observador no solo. Assim, ao empurrar a bola, o braço do homem moveu-se 1 metro como resultado do seu próprio movimento e 2 metros, devido ao movimento do trem, um total de 3 metros, relativamente ao observador no solo. Logo, o trabalho realizado, do ponto de vista do observador no solo, foi 50 newtons × 3 metros = 150 joules, exatamente igual à variação da energia cinética de sua observação. Esta não é uma quantidade de trabalho fictício. O homem realizou sòmente 50 joules, ao empurrar a bola com uma fôrça de 50 newtons por 1 metro. Mas seus pés empurram o trem para trás, e êste empurra para a frente os seus pés, com a mesma fôrça de 50 newtons. Enquanto exerce essa fôrça sôbre os pés do homem, o trem percorre 2 metros. Assim, o próprio trem realiza 100 joules de trabalho sôbre bola. Êste trabalho provém da energia liberada pela queima do combustível do trem.

PROBLEMAS COMPLEMENTARES

1. Uma massa de 10 kg move-se com uma velocidade constante de 10 m/s.

(a) Que trabalho deve ser feito sôbre a massa, a fim de dobrar a velocidade para 20 m/s? (1 500 joules foram transferidos à massa).

(b) Que trabalho deve ser realizado, para reduzir sua velocidade para 5,0 m/s? (—375 joules foram retirados da massa).

2. Uma fôrça constante de 20 newtons atua por 10 segundos sôbre um objeto de 5,0 kg, inicialmente em repouso.

(a) Qual é a quantidade de movimento final do objeto? (200 kg m/s).

(b) Qual é a energia cinética final do objeto? (4 000 joules).

(c) Que trabalho foi fornecido para acelerar o corpo? (4 000 joules).

3. Uma fôrça que aumenta de 0 para 100 newtons, a uma razão de 10 newtons/s, atua sôbre um corpo durante 10 segundos. 12 500 joules de trabalho são realizados por essa fôrça, para acelerar o corpo a partir do repouso, a uma velocidade final de 50 m/s.

(a) Qual é a massa do corpo? (10 kg).

(b) Quão grande deveria ser a fôrça constante exigida para fornecer ao corpo a mesma velocidade final, se a fôrça atuasse durante um metro de percurso? (12 500 newtons).

4. Uma massa de 2,0 kg, movendo-se a uma velocidade de 20 m/s, tem a mesma quantidade de movimento de uma massa de 10 kg.

(a) Qual é a velocidade da massa de 10 kg? (4 m/s).

(b) Qual é a energia cinética de cada uma das massas? (400 joules, 80 joules).

5. Um corpo de 10 kg tem uma energia cinética de 500 joules. Qual é a sua quantidade de movimento. (100 kg m/s).

6. Um corpo de 10 kg em repouso, sôbre uma mesa sem atrito, recebe um impulso de 30 newton-seg. Qual é a sua energia cinética final? (45 joules).

7. Com que energia cinética uma pedra de 2 kg choca-se com o solo, se cai de uma altura de (a) 5 m? (b) 10 m? (c) 20 m? (d) Compare as quantidades de movimento da pedra, exatamente antes de chocar-se com o solo, nos casos (a), (b) e (c).

a. 100 joules; b. 200 joules; c. 400 joules; d. $p_{20} = \sqrt{2}\, p_{10} = 2 \times p_5$.

Seção 5 — A Transferência da Energia Cinética de Uma Massa à Outra

Seção 6 — Ainda a Colisão Simples

Seção 7 — Conservação da Energia Cinética em Interações Elásticas

FINALIDADE. Mostrar que a energia cinética se conserva, quando a fôrça de interação depende sòmente da distância de separação das massas que interagem.

CONTEÚDO. Nas colisões entre dois corpos a energia cinética total do sistema é a mesma, antes e após a colisão. Todavia, a energia cinética pode variar durante a interação. Quando a fôrça é de repulsão, a quantidade de energia cinética que "desaparece" é calculada por $F\triangle s$, onde F é a fôrça constante de repulsão na interação, e $\triangle s$ é a variação na separação entre os dois corpos. Para uma dada fôrça de repulsão, quando a distância de separação decresce, a energia cinética total diminui. A energia cinética total aumenta, quando a separação aumenta. O critério para uma colisão "elástica" é de que a fôrça entre os dois objetos seja apenas função da distância de separação dos mesmos. Por isso, após terminada a interação, a energia cinética total é a mesma de antes de iniciar a interação.

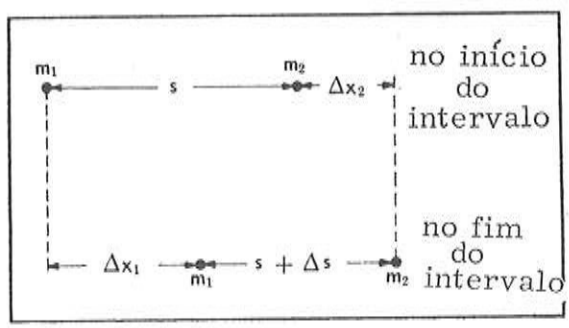
ÊNFASE. O assunto destas seções é importante e um tanto difícil. Programe despender, pelo menos, um dia completo para discussão em classe, ainda que você omita totalmente a solução geral da Seção 7. Para um tratamento completo da unidade tôda, reserve, ao menos, 3 dias para discussão em classe.

LABORATÓRIO. A Experiência III-11, *Colisões Lentas,* deve ser integrada às discussões em classe, das Seções de 5 a 7.

DESENVOLVIMENTO. O exemplo ilustrado nas Figuras 24-8 e 24-9 pode ser revisto em classe, após os alunos terem estudado as Seções 6 e 7.

Alguns alunos talvez pensem que as condições especificadas para uma colisão elástica ocorrem mais freqüentemente, do que na realidade acontece. A fim de esclarecer êste ponto, cite um exemplo de colisão inelástica. Uma colisão de dois automóveis serve para êste propósito. Quando os pára-choques se tocam, há uma compressão. Se isto fôsse tudo o que acontece, não haveria dificuldade. As partes comprimidas voltariam à sua posição anterior, e a fôrça adquiriria os mesmos valôres que tinha durante a compressão. Entretanto, se algo é deformado na colisão, de tal modo que não retornar à forma inicial, então, a fôrça quando os carros se separam, difere da fôrça que atua quando êles se aproximam. Êste é o caso mais comum, uma colisão inelástica.

O seguinte tipo de discussão sucinta recapitula e facilita a compreensão do problema, discutido no texto e ilustrado nas Figuras 24-8 e 24-10. Consideremos a Figura 24-10 do texto. Começaremos com a análise apresentada na legenda da figura.



$\triangle x_1$ = distância percorrida por m_1 durante o intervalo compreendido entre t_o e t_1.

$\triangle x_2$ = distância percorrida por m_2, durante o intervalo entre t_o e t_1.

s = distância de separação entre m_1 e m_2, no instante t_o.

$\triangle s$ = variação de s, durante o intervalo de tempo entre t_o e t_1.

Pela figura, pode-se concluir que:

$$s + \triangle x_2 = \triangle x_1 + (s + \triangle s), \text{ ou}$$

$$\triangle s = \triangle x_2 - \triangle x_1.$$

Como foi assinalado no texto, quando m_1 se desloca de $\triangle x_1$, o faz contra fôrça *retardadora* F. Portanto, perde energia cinética. A variação é igual ao trabalho realizado:

$$(\triangle E_c)_1 = -F \triangle x_1.$$

Para m_2, a fôrça F é uma fôrça aceleradora, e a variação na energia cinética é dada por:

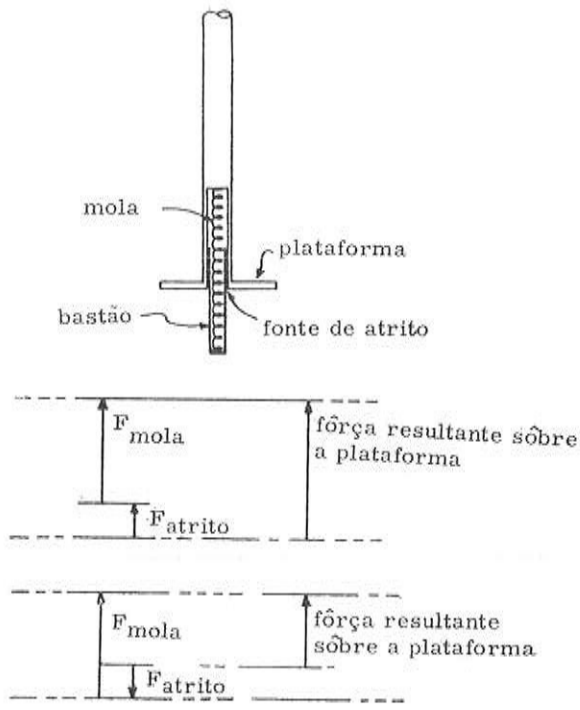
$$(\triangle E_c)_2 = +F \triangle x_2.$$

A variação total na energia cinética das duas massas é, simplesmente, a soma das variações individuais:

$$(\triangle E_c)_{total} = F\triangle x_2 - F\triangle x_1 =$$
$$= F(\triangle x_2 - \triangle x_1) = F\triangle s.$$

Durante o curto intervalo da interação de dois objetos, a variação na energia cinética é dada por $F(t)\triangle s$, onde $F(t)$ é a fôrça atuante e $\triangle s$ é a variação na distância de separação. F é escrito, aqui, como $F(t)$ para indicar que, geralmente, a fôrça será diferente nos vários instantes da interação. Neste caso que envolve a fôrça repulsiva, a energia cinética diminui, quando $\triangle s$ está diminuindo, e aumenta quando $\triangle s$ está aumentando. Se a fôrça de interação depender *apenas* da separação dos dois objetos, então, podemos escrever tanto $F(t)$ como $F(s)$. Assim, quando dois objetos, que se repelem mùtuamente, separam-se de uma distância s para $s + \triangle s$, a variação na energia cinética total será exatamente igual e oposta à variação na energia total que ocorreu, quando os corpos se aproximaram um do outro, de uma separação $s + \triangle s$ para uma separação s. Isto é verdadeiro, porque as fôrças eram idênticas nos dois intervalos de tempo — uma vez que F era uma função única de s. Sempre que isto fôr verdadeiro, a energia cinética se conservará no curso completo da colisão (mas não em cada instante durante a colisão). Colisões entre objetos, cujas fôrças de interação pertencem a êste tipo, são chamadas colisões elásticas.

COMENTÁRIO. Talvez lhe peçam que explique por que as colisões, em sua maioria, são inelásticas. O exemplo do automóvel é um caso simples. Um exemplo mais sutil é o de uma bola de borracha. Sabemos que, quando uma bola de borracha é abandonada de uma certa altura, não volta à altura inicial. A colisão não é perfeitamente elástica. Mas a bola retoma, perfeitamente, sua forma original. Êste é um outro caso em que devemos cuidar do nosso vocabulário. Coloquialmente, a palavra "elástica" é utilizada para se referir à propriedade de uma bola de borracha que retoma sua forma original. Esta é uma condição necessária para uma colisão elástica. Mas não uma condição suficiente. A borracha é um material em que há apreciável fôrça interna de atrito, associada a qualquer deformação.



O comportamento análogo de um brinquedo de criança constituído de um bastão com uma plataforma e uma mola na parte inferior (veja a figura na página anterior), pode auxiliar a explicação do que acontece no caso da bola de borracha.

Neste caso, é mais fácil "separar" as fôrças que atuam sôbre as várias partes dêsse brinquedo, do que aquelas que atuam na bola de boracha de composição uniforme. Tal brinquedo pode ser idealizado como tendo uma plataforma móvel com uma mola ideal, encaixada ao bastão, havendo, porém um apreciável atrito no movimento entre o bastão e a plataforma.

Considere-se as fôrças atuando na parte do bastão que está em contato com a plataforma. Quando o bastão atinge o solo, a compressão da mola inicia. As fôrças atuantes num certo ponto da compressão da mola, no movimento para baixo, são mostradas na figura.

Finalmente, a mola atinge a sua compressão máxima, e a plataforma começa a subir. No mesmo ponto de compressão absoluta, F_{mola} é a mesma, tanto no movimento para cima como no movimento para baixo. Porém, na descompressão da mola, a fôrça de atrito está no sentido oposto ao do caso anterior, e a fôrça resultante quando $\triangle s$ aumenta é menor do que a fôrça resultante, quando $\triangle s$ diminui. Esta relação entre as fôrças é mostrada na figura.

Do mesmo modo, a fôrça resultante, atuando sôbre a bola numa certa distância de separação, s, quando esta se aproxima do piso, é *maior* do que a fôrça que atua na mesma distância s, quando a bola se afasta do piso. A fôrça não depende apenas da distância entre a bola e o chão, mas também da direção na qual a bola está se movendo, em relação ao solo. A energia cinética desaparece, dissipada em forma de energia interna (calor) da bola. Pergunte a seus alunos se algum dêles já segurou uma bola de raqueta ou andebol, após ter sido batida por algum tempo. A temperatura eleva-se sensìvelmente.

PROBLEMAS COMPLEMENTARES

1. Uma bola de 200 g move-se a 6,0 m/s, aproximando-se de uma segunda bola, frontalmente. A segunda bola tem uma massa de 100 g. Enquanto a separação entre as bolas é menor do que 5,0 cm, elas se repelem com uma fôrça constante de 40 newtons. A segunda bola, logo após a colisão, tem uma velocidade de 8,0 m/s.

(a) Quanta energia cinética adquiriu a segunda bola, na colisão? (3,2 kg m^2/s^2 ou 3,2 joules).

(b) Qual é a energia cinética da primeira bola, após a colisão? (0,4 kg m^2/s^2 ou 0,4 joules).

(c) Que distância cada bola percorreu durante a colisão, isto é, enquanto permaneceram a menos de 5,0 cm uma da outra? (8,0 cm).

2. Um bloco tendo uma massa de 5,0 kg desliza sôbre uma superfície sem atrito, com uma velocidade de 1,0 m/s, em direção a um segundo bloco em repouso. O segundo bloco possui uma massa de 1,0 kg. Quando a separação entre os dois blocos é de 10 cm ou menos, repelem-se mùtuamente, com uma fôrça de 50 newtons.

(a) Qual é o módulo e a direção da aceleração de cada bloco durante a colisão, isto é, quando estão a uma distância menor do que 10 cm? ($a_1 = 10$ m/s², para trás; $a_2 = 50$ m/s², para a frente).

(b) O início da colisão é o instante em que os dois blocos estão a uma distância de 10 cm um do outro. A partir de suas posições nesse instante, que distância percorrerá cada um dos blocos em 1/60 s? Em 1/30 s?

$$\triangle x_1 = \underset{1/60\ \text{seg}}{\frac{11}{12} \times \frac{1}{30}}\ \text{m} = 0{,}015\ \text{m},\ \text{e}\ \underset{1/30\ \text{seg}}{\frac{5}{6} \times \frac{1}{60}}\ \text{m} = 0{,}028\ \text{m}.$$

$$\triangle x_2 = \frac{5}{12} \times \frac{1}{60}\ \text{m} = 0{,}0070\ \text{m},\ \text{e}\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{30}\ \text{m} = 0{,}028\ \text{m}.$$

(c) Calcule a variação na energia cinética total, 1/60 s após o início da colisão e 1/30 s após o início da colisão.

$$\text{1/60 seg: } (\triangle E_c)_{total} = 50\left(\frac{5}{12} \times \frac{1}{60} - \frac{11}{12} \times \frac{1}{60}\right)$$

$$= -50 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{60} =$$

$$= -\frac{5}{12}\ \text{newton-metro} =$$

$$= -0{,}42\ \text{joules}.$$

$$\text{1/30 seg: } (\triangle E_c)_{total} = 0\ \text{joules}.$$

3. Uma massa de 10 kg, movimentando-se com uma velocidade de 5,0 m/s, colide elàsticamente com uma massa de 5,0 kg que, inicialmente, estava em repouso. Qual é a energia cinética final do sistema (125 joules).

Seção 8 — Energia Cinética e Quantidade de Movimento

FINALIDADE E CONTEÚDO. Mostrar que a aplicação da conservação de energia e conservação da quantidade de movimento, em colisões elásticas frontais, possibilita-nos determinar velocidades finais, desconhecendo os detalhes da fôrça de interação. Uma aplicação dêste método é ilustrada na descoberta do nêutron por Chadwick.

ÊNFASE. As idéias desta e das seções seguintes do presente capítulo são importantes, mas são destinadas mais à aplicação dos conceitos prévios, do que a uma preparação básica para desenvolvimentos futuros. A solução completa da colisão elástica é interessante e útil, mas um tanto difícil. Umas duas aulas serão necessárias para um tratamento mínimo da colisão elástica e resumo das idéias de todo o capítulo.

COMENTÁRIO. Os alunos talvez não vejam a importância do estudo de "colisões". Uma grande variedade de problemas, na física moderna, refere-se bàsicamente ao chamado problema de dois corpos. Problemas que tratam da órbita de um planêta girando em tôrno do Sol, da dinâmica de um foguete, e da colisão entre dois prótons são exemplos de problemas de dois corpos. Felizmente, esta situação física relativamente simples, a interação de dois objetos, tem larga aplicabilidade. O problema geral, que envolve a interação de mais de dois corpos, ainda não pode ser resolvido precisamente.

Problemas de dois corpos, que tratam dos movimentos dos planêtas, podem ser resolvidos pela aplicação da lei de Newton e, assim, obtém-se soluções para o movimento ao longo de intervalos muito pequenos e sucessivos de uma órbita. Êste tipo de solução é possível, porque a fôrça de interação é bem definida, em todos os pontos do espaço, pela lei da gravitação universal. Ainda assim, é um processo trabalhoso. No caso da propulsão de um foguete ou da colisão de dois prótons, a solução pela aplicação de $\vec{F} = m\vec{a}$ é impossível, porque a fôrça de interação não é conhecida. Podemos obter progresso considerável nestes problemas, aplicando as leis da conservação. Quando a colisão é elástica, podemos usar a conservação da quantidade de movimento e da energia cinética.

DESENVOLVIMENTO. A discussão em classe pode ser iniciada com uma análise da colisão frontal de m_1 e m_2, estando m_2, inicialmente em repouso e, m_1 aproximando-se com a velocidade v_1. A quantidade de movimento total, antes da colisão, deve ser m_1v_1.

Após a colisão, m_1 e m_2 terão velocidades v_1' e v_2', respectivamente (ambas na mesma direção de v_1). O princípio da conservação da quantidade de movimento indica que (1) $m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$. Entretanto, isto não dá uma solução ao problema. Ou seja, o conhecimento das quantidades m_1, m_2 e v_1 ainda não nos possibilita predizer os valôres finais de v_1' e v_2'. Há um número infinito de combinações que satisfarão à equação da quantidade de movimento. Para um certo valor de v_1', há um valor correspondente de v_2' que satisfará à conservação da quantidade de movimento. Para ver isto claramente, considere o caso em que $m_1 = m_2 = m$. Logo, a equação transforma-se em:

(2) $mv_1 = m(v_1' + v_2')$, ou

(3) $v' = v_1 - v_1'$.

Algumas soluções seriam:

$$v_1' = 0, \text{ e } v_2' = v_1;$$

$$v_1' = v_1, \text{ e } v_2' = 0;$$

$$v_1' = \frac{v_1}{2}, \text{ e } v_2' = \frac{v_2}{2}, \text{ etc.}$$

Portanto, não há uma solução única para êste problema. Em linguagem matemática, a dificuldade está simplesmente, em haver duas incógnitas, v_1' e v_2', mas apenas uma relação entre elas, correspondente à conservação da quantidade de movimento. Se uma segunda equação é adicionada, pode ser removida a indeterminação da equação. A equação que está dispo-

nível para uma colisão elástica é aquela que expressa a conservação da energia cinética:

$$(4)\ \frac{1}{2}\,mv_1^2 = \frac{1}{2}\,mv'^2_1 + \frac{1}{2}\,mv'^2_2, \text{ ou}$$

$$(5)\ v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2$$

Porém, obtivemos da conservação da quantidade de movimento a relação:

$$(3)\ v'_2 = v_1 - v'_1.$$

Substituindo em (5):

$$v_1^2 = v'^2_1 + (v_1 - v'_1)^2 = v'^2_1 + v_1^2 -$$

$$2v_1 v'_1 + v'^2_1, \text{ ou } v'^2_1 - v_1 v'_1 = 0$$

Portanto, $v'_1 = v_1$, ou $v'_1 = 0$

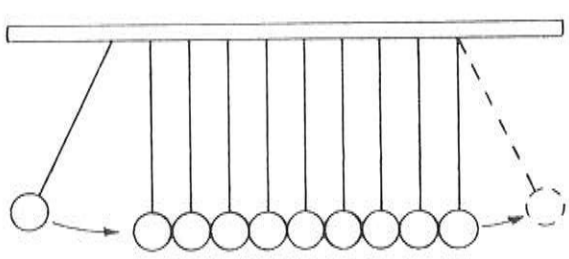
No primeiro caso, de (3), $v'_2 = 0$. Logo, simplesmente, não tivemos uma colisão; m_1, de algum modo, passou por m_2, e podemos ignorar êste caso. A outra solução é $v'_1 = 0$, e de (3), $v'_2 = v_1$; a primeira bola pára, e a segunda adquire a velocidade inicial da primeira.

Os alunos deverão entender que a solução foi encontrada, sem nenhum conhecimento detalhado da lei da fôrça entre m_1 e m_2. É sòmente necessário que a interação seja elástica.

(O Apêndice 7 dêste volume trata de colisões não frontais de duas massas iguais).

° ° °

DEMONSTRAÇÃO. Há uma boa demonstração clássica que ilustra a singularidade da solução dêste tipo de problema. Uma fileira de bolas de bilhar ou de golfe é suspensa por fios presos a uma barra, de maneira que as bolas fiquem em contato umas com as outras, conforme a figura abaixo.



Puxe para trás a última bola e deixe que a classe adivinhe a solução dêste problema. Se essa bola tem a velocidade, v, no momento do choque, o que acontecerá na outra extremidade? Aplicando sòmente a conservação da quantidade de movimento, teríamos uma bola lançada com velocidade v, duas bolas com v/2, três com v/3, etc. Aplicando a conservação da energia cinética, verificamos que apenas a solução de uma bola lançada com velocidade v satisfaz à equação. Se as bolas fôrem razoàvelmente elásticas, isto acontecerá experimentalmente. Assim também, se duas bolas fôrem puxadas para trás inicialmente, a única solução possível será aquela em que duas bolas são lançadas, etc.

Os alunos talvez queiram saber se estas leis de conservação podem ser aplicadas a colisões não frontais. Pode indicar um método para o tratamento dêste assunto, como o que se segue.

Podemos escolher o eixo x como sendo a direção da partícula em movimento. Então, as componentes das quantidades de movimento das duas partículas, após a colisão, devem ser adicionadas para se obter a quantidade de movimento inicial:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}. \qquad (1)$$

Após a colisão, ambas as partículas devem se mover no mesmo plano, pois qualquer que seja a quantidade de movimento que possuam, não paralela ao eixo x, sua soma deve ser zero (dois vetores, não no mesmo plano, não poderão ter como soma um vetor na direção x, mais um vetor nulo). Indicaremos o plano de movimento, após a colisão, por plano x-y. Portanto, $m_1 v_{1y} = 0 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y}$, e tôdas as velocidades perpendiculares ao plano x-y são zero:

$$v_{1\perp} = v'_{1\perp} = v'_{2\perp} = 0 \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) expressam a conservação da quantidade de movimento.

A conservação de energia pode ser expressa como:

$$\frac{1}{2}\,mv_1^2 = \frac{1}{2}\,m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}\,m_2 v'^2_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,m_1 (v'^2_{1x} + v'^2_{1y}) + \frac{1}{2}\,m_2 (v'^2_{2x} + v'^2_{2y}). \qquad (3)$$

Estas três equações nos possibilitam determinar três incógnitas — as três quantidades restantes

nas equações devem ser medidas. Por exemplo, se uma partícula conhecida como um nêutron (m_1 conhecido) se chocasse com um próton numa câmara de bôlhas, o traço visível do próton nos possibilitaria medir v'_{2x} e v'_{2y}. Poderíamos então calcular as velocidades inicial e final do nêutron invisível, v_1, v'_{1x}, e v'_{1y}.

PROBLEMAS TESTES

1. Uma massa de 10 kg, movendo-se com uma velocidade de 5 m/s, colide frontalmente com uma massa em repouso de 10 kg. A colisão é elástica. Qual é a velocidade final de cada uma das massas? (0,5 m/s).

2. Uma massa de 2 kg, movendo-se com uma velocidade de 20 m/s, colide elàsticamente, numa colisão frontal, com uma massa de 5 kg, inicialmente em repouso. Determine as velocidades finais e as respectivas direções dessas massas. (2 kg: $-\frac{60}{7}$ m/s; 5 kg: $+\frac{80}{7}$ m/s).

3. Uma massa de 10 kg, movendo-se para a direita com uma velocidade de 5 m/s, colide clástica e frontalmente com uma outra massa de 10 kg, movendo-se inicialmente a 10 m/s para a esquerda. Qual é a velocidade final de cada uma dessas massas? (10 m/s para a esquerda, 5 m/s para a direita).

4. Uma massa de 5 kg, movendo-se a 4 m/s, atinge lateralmente uma massa em repouso de 5 kg. A colisão é elástica. Após a colisão, uma massa move-se a 45°, com a direção incidente. Qual é a velocidade final de cada massa (módulo e direção)? ($2\sqrt{2}$ m/s a + 45°, $2\sqrt{2}$ m/s a — 45°).

Seção 9 — Trabalho e Energia Cinética Quando Atuam Várias Fôrças

FINALIDADE. Mostrar que a energia cinética, transferida para um corpo ou de um corpo, quando atuam várias fôrças sôbre êle, é idêntica à energia que seria transferida pela resultante dessas fôrças que atuam sôbre o corpo, para o mesmo trecho do movimento.

CONTEÚDO. A conclusão acima está baseada numa consideração da ação das componentes das fôrças, ao longo de uma direção de movimento, em um dado instante.

ÊNFASE. Esta seção é, simplesmente, um comentário que generaliza as conclusões, a partir de considerações prévias sôbre interações simples.

Seção 10 — Perda de Energia Cinética numa Interação Com Atrito

FINALIDADE. Mostrar que, se uma fôrça de atrito agir sôbre um corpo, parte da energia transferida poderá transformar-se em calor, ao invés de transformar-se em energia cinética.

CONTEÚDO. Dois exemplos são cuidadosamente escolhidos para esta discussão. Êste tópico, de certo modo, apresenta alguma dificuldade; assim, exemplos adicionais devem ser escolhidos com cuidado, a fim de se evitar envolver em explicações demoradas e prematuras. (Esta seção conduz ao próximo capítulo). O primeiro exemplo é de um bloco deslizando sôbre uma mesa. A mesa não se move, mas o bloco exerce uma fôrça sôbre ela e está diminuindo de velocidade. Para onde vai a energia cinética "perdida", enquanto o bloco se move? Transfere-se para a energia cinética das moléculas da mesa, ou seja, transforma-se em calor. Observe que a "colisão" do bloco com a mesa é diferente de uma colisão elástica: a fôrça depende da velocidade do bloco, não de sua posição relativa à mesa.

O segundo exemplo é o recuo de uma bola de massa de vidraceiro. Neste caso, a bola se deforma durante a colisão; assim, a fôrça na volta comporta-se diferentemente da fôrça no impacto. A energia cinética resultante da bola modifica-se na colisão, e a bola se aquece — a energia cinética foi transformada em calor.

Colisões dêste tipo são chamadas inelásticas; são caracterizadas por uma perda geral de energia cinética dos corpos como um todo, e um aumento de energia cinética de movimento interno de moléculas.

DESENVOLVIMENTO. Os Problemas 25, 26, 28, 29, 30, 31 e 34 do CCL são relativos a colisões inelásticas. O problema seguinte poderá ser útil como problema teste.

Uma massa de 20 kg, movendo-se com velocidade de 3 m/s, colide inelàsticamente com uma massa em repouso de 10 kg. As duas se unem e movem-se com a mesma velocidade.

(a) Qual é a velocidade final das duas massas?

(b) Quanta energia cinética é "perdida" no choque?

Solução:

(a) $m_1 = 20$ kg
$m_2 = 10$ kg
$v_1 = 3$ m/seg.
$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_2$
$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{20}{30} \times 3 = 2 \text{ m/s.}$$

(b) $$E_{c1} = \frac{1}{2} \times 20 \times 3^2 = 90 \text{ joules}$$

$$E'_{c(1+2)} = \frac{1}{2} \times 30 \times 2^2 = 60 \text{ joules.}$$

Portanto, 30 joules de energia são "perdidos" na colisão.

COMENTÁRIO. É aconselhável verificar se os alunos não confundem a perda de energia cinética em calor, com o "desaparecimento" temporário de energia cinética durante uma colisão elástica. Aprenderão no próximo capítulo que, numa colisão elástica, a energia cinética "desaparece", transformando-se em energia potencial, da qual pode retornar. A energia transformada em calor poderá ser recuperada apenas parcialmente.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

A tabela abaixo classifica os problemas, de acôrdo com o grau avaliado de dificuldades de cada um e as seções a que se referem. Os que são apropriados para discussão em classe estão indicados. Problemas especialmente recomendados estão marcados com um asterisco (*).

As respostas de todos os problemas, que requerem uma resposta numérica ou abreviada, são apresentadas após a tabela. Soluções detalhadas são dadas nas páginas 147-163.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe
1, 2, 3	5*	1, 2*, 3, 4*		1, 2*, 4*, 5*
4	7, 9, 10	6*, 8*, 11*, 12, 13, 14, 15*		6*, 8*, 11*
5, 6, 7	20	17*, 18*, 21*, 22	16*, 19	16*, 17, 21*
8, 9, 10, 11	24, 26, 27*, 29	25, 28, 30 31*, 32	23, 33, 34	23, 24, 25, 28, 31*

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. Veja discussão.
2. (a) 6×10^6 joules.
   (b) 6×10^6 joules.
3. (a) $\approx$ 20 litros.
   (b) Provàvelmente mais, certamente não a metade.
4. (a) Nenhuma.
   (b) Nenhuma.
   (c) 120 joules.
   (d) — 1 500 joules.
5. (a) 0,2 joules.
   (b) 0,2 joules.
6. (a) 30,0 joules.
   (b) 30,0 joules.
   (c) 5,48 m/s.
7. Nos dois casos, 1 200 joules.

8. (a) $(E_c)_A = 4\ (E_c)_B$.
   (b) Igual.
   (c) Igual.
   (d) Igual.
   (e) $(E_c)_A = 2\ (E_c)_B$.
9. (a) 1 200 joules.
   (b) 11 m/s.
10. (a) 1,4 joules.
    (b) 1,2 m/s.
11. (a) −32 joules.
    (b) 8,0 metros.
    (c) 32 joules.
12. (a) $3{,}86 \times 10^5$ joules.
    (b) $3{,}86 \times 10^5$ joules.
    (c) Não há maneira de saber.
13. (a) 39 joules.
    (b) 160 newtons.
    (c) Nenhum.
14. (a) 40 newtons.
    (b) Perpendicular ao movimento.
15. (a) 90,0 joules.
    (b) 160 joules.
    (c) Veja discussão.
16. (a) $\triangle x_1 = (0{,}16t - t^2)$ metros.
    $\triangle x_2 = 3{,}0\ t^2$ metros.
    (b) 0,04 segundos.
    (c) $v'_1 = v_1 - 0{,}08$ m/s.
    $v'_2 = v_1 + 0{,}08$ m/s.
17. (a) 4 joules.
    (b) 14,5 joules.
    (c) 38 joules.
    (d) 42 joules.
18. 2,67 joules.
19. 0,020 joules/s.
20. (a) 0,10 m/s, para cada corpo.
    (b) corpo de 1,5 kg para a frente.
    corpo de 0,5 kg para trás.
21. 0,2%.
22. (a) 0,02 joules.
    (b) 1,0 joule
    (c) 0,02 joules.
    (d) 1:1.
    (e) Quando $\frac{m_2}{m_1}$ é muito pequeno ou muito grande.
23. (a) $(E_c)_1 = 0{,}20$ joules.
    $(E_c)_2 = 0$.
    (b) $(E'_c)_2 = 0{,}18$ joules.
    $(E'_c)_1 = 0{,}02$ joules.
    (c) Massa 10 kg: 0,089 joules.
    Massa 5 kg: 0,044 joules.
    (d) 0,083 m.
24. (a) Igual à inicial.
    (b) Maior que a inicial.
25. (a) 0,22.
    (b) 0,70.
    (c) 1,09.
26. Sim.
27. (a) $v_1 = 3{,}3 \times 10^7$ m/s.
    $v'_1 = 0$.
    (b) $4{,}4 \times 10^6$ m/s.
    (c) Após a colisão com o próton, a velocidade é zero. Após a colisão com o nitrogênio, a velocidade é $-2{,}9 \times 10^7$ m/s.
28. (a) $5{,}0 \times 10^4$ kg m/s.
    (b) 0,67 m/s.
    (c) $5{,}0 \times 10^4$ joules,
    $1{,}7 \times 10^4$ joules; não.
29. Sim, esquenta as mãos.
30. Veja discussão.
31. 78 joules.
32. (a) 5,0 newtons.
    (b) 12,5 joules.
    (c) 4,5 joules; 8,0 joules; igual.
33. (a) Idêntica à velocidade inicial.
    (b) 0.
34. (a) 0.
    (b) $4{,}5\ mv^2$.
    (c) $1/2\ mv^2$.
    (d) $4\ mv^2$.
    (e) $3\ mv^2$.
    (f) Diferença causada pela energia transferida da cauda à cabeça do foguete.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

A usina elétrica de uma cidade consome carvão para produzir vapor que faz girar uma turbina; esta aciona um gerador elétrico. O departamento de águas da cidade usa esta eletricidade para girar um motor elétrico que bombeia água para um reservatório situado no alto de uma colina. Indique, pela ordem, tôdas as transformações de energia que ocorrem.

a) A energia química do carvão é transformada em energia térmica da chama.

b) A energia da chama é transferida para a água que se vaporiza. Do ponto de vista microscópico, a energia térmica do vapor está em forma de energia cinética nas moléculas do vapor. Estas, por sua vez, transmitem energia cinética ao rotor da turbina, colidindo com suas pás. A rotação do eixo da turbina gira o rotor do gerador, transformando assim, uma parte da energia química do combustível em energia elétrica.

c) A energia elétrica é convertida em energia cinética pelo motor elétrico que aciona a bomba. Esta energia cinética é transferida à água, de forma a transportá-la para o reservatório.

d) À medida que a água é elevada para o reservatório, move-se contra a fôrça de gravidade, adquirindo energia potencial. A energia potencial da água, no reservatório, pode ser convertida em energia cinética, quando ela escoa do reservatório através do encanamento e sai pela torneira.

PROBLEMA 2

Um cabo puxa um carro montanha acima, com a fôrça de 4×10^3 newtons, à velocidade de 5 m/s. O carro leva 5 minutos para atingir o tôpo.

(a) Que trabalho é realizado para conduzir o carro até o alto da montanha?

(b) Que trabalho seria realizado para levar o carro até o mesmo ponto, com velocidade de 2,5 m/s?

a) Subindo ao tôpo da montanha, o carro percorre 5 min $\times$ 60 s/min $\times$ 5 m/s $=$ 1 500 metros. O trabalho realizado é igual à fôrça multiplicada pela distância na qual a fôrça atuou.

4×10^3 newtons $\times$ 1 500 m $= 6 \times 10^6$ newton-metros ou joules.

b) Se a mesma fôrça é necessária para puxar o carro montanha acima, a uma velocidade mais baixa, tanto a fôrça como a distância são as mesmas para ambas as velocidades. Assim, o trabalho efetuado, para que o carro suba a montanha numa velocidade menor, seria o *mesmo que a uma velocidade maior:* 6×10^6 joules. (Fontes de atrito, como rolamentos, pulias, etc, em geral exercem fôrça de atrito menor em velocidades baixas do que em altas velocidades. Logo, enquanto a quantidade de trabalho necessário, a fim de movimentar o *carro* para *cima* da montanha, é a mesma, qualquer que seja a velocidade, a quantidade de energia transferida em forma de calor nos rolamentos, etc, dependerá da velocidade).

PROBLEMA 3

Um removedor de neve usa 14 litros de gasolina para limpar 18 km de estrada em 20 minutos.

(a) Quantos litros, aproximadamente, serão necessários para limpar 27 km à mesma velocidade?

(b) Acha você que bastaria a metade do combustível para limpar os 27 km no dôbro do tempo? Por que? Prepare-se para discutir em classe sua resposta.

a) Os alunos devem ser capazes de resolver esta parte do problema, mesmo que desconheçam o funcionamento de um removedor de neve. Ao remover 27 km ao invés de 18 km, sem variação de velocidade, tôdas as condições permanecem as mesmas, exceto a distância. Por isso, limpar 27 km envolve a mesma fôrça motriz atuante por 3/2 da distância, e a máquina (ou máquinas) terão que realizar 1 1/2 vêzes a quantidade do trabalho efetuado para remover 18 km. Como o combustível consumido é proporcional ao trabalho realizado, 21 litros de gasolina serão necessários.

b) A energia necessária para realizar a mesma tarefa é a mesma nas duas velocidades. A energia necessária para outros fatôres (como aquecer a máquina, os mancais e o ar circundante) varia com a velocidade da remoção da neve e depende do tipo do romovedor. Não há uma razão particular para se esperar que o consumo total de combustível seja reduzido à metade. Pode ser maior ou menor do que antes, dependendo do tipo de removedor empregado.

Para perceber que é necessário empregar mais combustível, considere o que acontece quando o tempo de funcionamento da máquina é aumentado grandemente. A máquina deve, evidentemente, consumir mais combustível, a fim de manter-se aquecida e, eventualmente, grande parte do ar circundante.

PROBLEMA 4

Que energia é transferida a uma mala de 15 kg, enquanto:

(a) Você a segura durante 5 minutos, esperando um ônibus?

(b) Corre com ela uma distância horizontal de 10 m, em 2 s, com velocidade constante, para alcançar o ônibus?

(c) Suspende-a 0,80 m para subir no ônibus? ônibus?

(d) Transporta-a 20 m, descendo uma rampa inclinada de 30° com a horizontal?

Êste problema evidencia o fato de que o trabalho é a medida da transferência de energia; produto da fôrça pela distância percorrida *na direção em que atua a fôrça.*

a) Apesar do efeito cansativo de segurar uma mala, você não efetua trabalho algum e, portanto, *não transfere energia* à mala, porquanto o trabalho é definido como sendo fôrça × distância percorrida. Se tivesse colocado a mala sôbre um banco, enquanto esperava o ônibus, não pensaria que o banco tivesse transferido energia à mala. b) Semelhantemente, apesar de não ser tão óbvio, você não efetua trabalho e *não transfere energia* à mala, enquanto corre num trajeto horizontal. (Uma quantidade desprezível de trabalho será necessária para "empurrar" a mala através do ar). O trabalho é efetuado, sòmente, quando a fôrça age *na direção do movimento.* Como antes, você poderá concluir que, se a mala estivesse sôbre rodas sem atrito, ninguém duvidaria do fato da calçada não tranferir energia à mala, enquanto ela se deslocasse.

c) Quando você suspende a mala 0,80 metros, exerce uma fôrça de 15 kg × 9,8 nt/kg = 150 nt. Como a fôrça atua na direção do movimento, você realiza um trabalho de 150 nt × × 0,80 m ou 120 joules, transferindo 120 joules de energia à mala.

d) Quando transporta a mala 20 metros, descendo a rampa, a componente de seu pêso, na direção do movimento rampa abaixo, efetua trabalho *sôbre você.* A componente do pêso paralela à rampa é de 1/2 × 150 newtons; a distância percorrida na rampa é de 20 metros; o trabalho realizado pela mala sôbre você é de 75 newtons × 20 m = 1 500 joules. Uma resposta literal para a parte (d) afirmaria que a energia transferida à mala de 15 kg é —1 500 joules. (Esta energia é transferida a você e à rampa, em forma de calor).

PROBLEMA 5

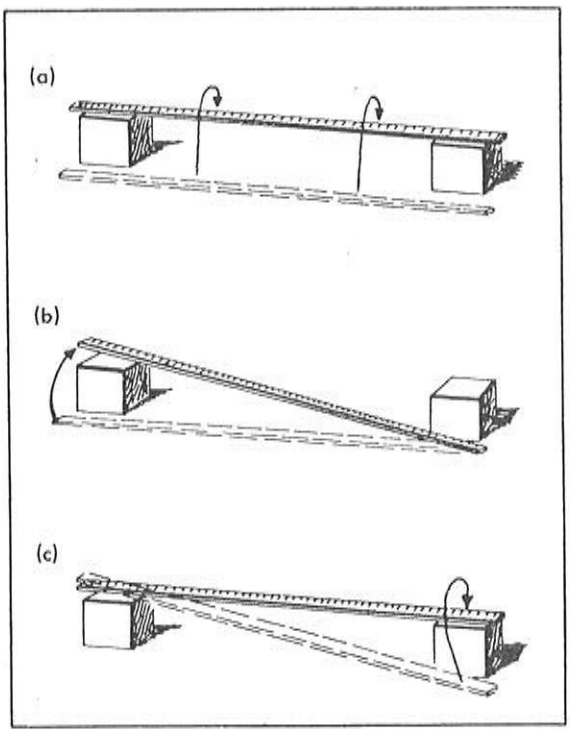
Uma régua de 1 metro de massa 0,20 kg está numa mesa, próxima de dois blocos de 10 cm de altura. (Fig. 24-17).

(a) Se você suspende a régua, mantendo-a horizontal, e a coloca sôbre os blocos, que trabalho realiza?

(b) Se suspende um dos extremos e o coloca num dos blocos e depois suspende o outro, pondo-o no segundo bloco, que trabalho você realiza para mover a régua?

a) Se suspender a régua, mantendo-a horizontalmente, você erguerá de uma só vez a régua e estará exercendo uma fôrça de 0,20 kg × 9,8 nt/kg ou 2,0 nt. Esta fôrça move a régua 10 cm na direção da fôrça, realizando um trabalho de 2,0 nt × 0,1 m = 0,2 joules.

b) Se suspender a régua, uma extremidade de cada vez, e colocá-la sôbre os blocos, terá efetuado a mesma quantidade de trabalho, mas em duas vêzes. Na primeira vez, você suspende a metade do pêso da régua e a mesa sustenta a outra metade do pêso; assim, você efetua



$\frac{1}{2} \times 2{,}0$ nt $\times$ 0,1 m = 0,1 joule de trabalho. Portanto, quando suspender a outra extremidade, estará novamente levantando a metade do pêso, enquanto a outra metade apoia-se sôbre o bloco. Neste caso, também estará efetuando 0,1 joule de trabalho, e o trabalho total é de 0,2 joules como antes. (Poderá frisar que, apesar da transferência de energia ser efetuada em duas vêzes, a transferência de energia é a mesma que antes, porque a tarefa realizada é a mesma).

PROBLEMA 6

Uma fôrça de 10,0 newtons atua sôbre um patim, de massa igual a 2,00 kg, inicialmente em repouso sôbre uma mesa sem atrito. O patim percorre 3,00 m, enquanto a fôrça atua.

(a) Que trabalho é realizado?

(b) Que quantidade de energia é transferida ao patim?

(c) Qual a velocidade final do patim?

a) O trabalho realizado é de 10,0 nt $\times$ 3,00 m = 30,0 jôules.

b) A energia transferida ao patim é medida pelo trabalho realizado, 30,0 joules.

c) A velocidade final do patim é obtida, sabendo-se que a energia cinética do patim em movimento, 1/2 mv^2, é igual à energia transferida ao patim:

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = 30{,}0 \text{ joules},$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 30{,}0}{2{,}00}} = 5{,}48 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 7

Compare o trabalho realizado para suspender uma massa de 6,0 kg a 20 metros com a energia cinética adquirida pela mesma massa, quando cai da mesma altura a partir do repouso.

O trabalho realizado em erguer a massa de 6,0 kg a 20 metros é:

6,0 kg $\times$ 9,8 nt/kg $\times$ 20 m = 1 200 joules.

Quando uma massa de 6 kg cai 20 metros, sob a ação da fôrça do seu próprio pêso, sua velocidade é dada por:

$v^2 = 2$ as $= 2$ gh $= 2 \times 9{,}8$ nt/kg $\times$ 20 m $=$ $= 400$ $(m/s)^2$.

A energia cinética da massa de 6,0 kg em queda livre é de:

$$E_c = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2} \times 6 \text{ kg} \times 400\ (m/s)^2 =$$

$= 1\,200$ joules.

A energia cinética adquirida por um corpo, em queda livre de uma certa altura, foi, assim, demonstrada sendo igual ao trabalho realizado ao se elevar o corpo àquela altura.

Nota: Enquanto a massa está sendo levantada, a fôrça resultante sôbre ela (fôrça para cima mais gravidade) é zero. Portanto, nenhuma energia foi transformada em energia cinética durante o processo. Entretanto, evidentemente, a energia é transferida da pessoa que levanta para alguma forma armazenada,

que depois (quando abandonada) pode ser transformada em energia cinética.

PROBLEMA 8

Compare as energias cinéticas de dois objetos A e B, idênticos sob todos os aspectos, exceto um. Admita que a única diferença seja:

(a) A tem o dôbro da velocidade de B;

(b) A move-se para o norte e B para o sul;

(c) A move-se em círculo, B em linha reta;

(d) A é um projétil que cai verticalmente, B é um projétil que sobe verticalmente com a mesma velocidade;

(e) A consiste de duas partes separadas, ligadas por um cordel leve, cada uma tendo a massa de B.

a) Como a energia cinética é 1/2 mv^2, A possui 2^2 ou 4 vêzes a energia cinética de B.

b) A energia cinética é um escalar independente da direção; por isso, a energia cinética de A é *igual* à de B.

c) Idêntica a (b), as energias cinéticas são *iguais*, pois os módulos das velocidades são iguais.

d) Novamente idêntica a (b), as energias cinéticas são *iguais*, já que os módulos das velocidades são iguais. (Certamente, neste caso as energias cinéticas não serão iguais um momento mais tarde, uma vez que a de A está aumentando, enquanto a de B está diminuindo).

e) Como a massa de A é duas vêzes a de B, a energia cinética de A é *o dôbro* da energia cinética de B.

PROBLEMA 9

Uma fôrça de 30 newtons acelera um objeto de 2,0 kg a partir do repouso, por uma distância de 3,0 metros, numa superfície horizontal sem atrito; a fôrça muda, então, para 15 newtons e age por mais 2,0 metros.

(a) Qual é a energia cinética final do objeto?

(b) Qual a sua velocidade?

a) A energia cinética é igual à energia transferida sôbre o objeto, pela resultante das fôrças que agem sôbre êle. A energia transferida ao objeto é igual ao trabalho que lhe é fornecido pela fôrça:

$$30 \text{ nt} \times 3{,}0 \text{ m} + 15 \text{ nt} \times 2{,}0 \text{ m} = 120 \text{ joules.}$$

b) A velocidade do objeto pode ser determinada, baseando-se no fato de que a sua energia cinética é 1/2 mv^2:

$$v = \sqrt{\frac{2 \times E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 120}{2{,}0}} = 11 \text{ m/s.}$$

PROBLEMA 10

Uma fôrça de 4,0 newtons, formando um ângulo de 45° com a horizontal, acelera um disco de gêlo sêco de massa igual a 2,0 kg, inicialmente em repouso, por uma distância de 0,50 m sôbre uma mesa horizontal.

(a) Determine o trabalho realizado sôbre o disco.

(b) Qual a velocidade do disco?

a) A componente horizontal da fôrça de 4,0 newtons possui uma intensidade de $4{,}0 \times 0{,}707 = 2{,}8$ newtons. Como o disco se move num plano horizontal, apenas esta componente da fôrça de 4,0 newtons efetua o trabalho, transferindo energia cinética ao disco. Êste trabalho é $2{,}8 \text{ nt} \times 0{,}50 \text{ m} = 1{,}4$ joules.

b) A velocidade do disco é obtida de $E_c = 1/2\ mv^2$.

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}4}{2}} = 1{,}2 \text{ m/s.}$$

(Note que a componente vertical da fôrça de 4 newtons não efetua trabalho sôbre o disco; simplesmente, alivia um pouco o pêso do disco sôbre a mesa, ou exerce pressão sôbre a mesa, dependendo de estar a fôrça dirigida para cima ou para baivo a 45°).

PROBLEMA 11

Sôbre a massa de 3,0 kg, movendo-se a 5,0 m/s, age uma fôrça de 4,0 newtons, oposta ao sentido do movimento. Se o objeto é desacelerado até que sua velocidade seja de 2,0 m/s, qual é

(a) a variação de energia cinética?
(b) a distância percorrida enquanto a fôrça atua?
(c) a energia ganha pelo sistema que fornece a fôrça?

a) A energia cinética da massa, antes de atuar a fôrça, é de $1/2 \times 3{,}0 \times 25{,}0 = 38$ joules. A energia cinética da massa, depois da ação da fôrça, é de $1/2 \times 3{,}0 \times 4{,}0 = 6{,}0$ joules. A variação na energia cinética é, portanto, -32 joules.

b) Como o decréscimo na energia cinética é igual ao trabalho realizado pela massa de 3,0 kg,

$$Fd = 32 \text{ joules},$$

$$d = \frac{32 \text{ joules}}{4{,}0 \text{ newtons}} = 8{,}0 \text{ metros}.$$

c) De acôrdo com a lei de conservação da energia, a energia recebida pelo sistema que fornece a fôrça é igual à perda de energia da massa de 3,0 kg, ou 32 joules.

PROBLEMA 12

Um autmóvel cuja massa é 1 000 kg, move-se, segundo indica seu velocímetro, a 100 km/h.
(a) Qual é sua energia cinética?
(b) Que trabalho foi realizado para conseguir essa energia cinética?
(c) Pode você determinar a fôrça que agiu sôbre o carro para produzir tal energia cinética? E durante que percurso atuou essa fôrça? Prepare-se para defender em classe sua resposta.

a) $100 \text{ km/h} = 10^5 \text{ m}/3\,600 \text{ s} = 27{,}8 \text{ m/s}$. A energia cinética da massa de 1 000 kg com esta velocidade é $1/2 \times 1\,000 \times (27{,}8)^2 = 3{,}86 \times 10^5$ joules.

b) Um pouco mais de trabalho deve ter sido realizado, a fim de fornecer esta energia cinética, com o carro partindo do repouso. (Muito mais trabalho foi efetuado ao todo, uma vez que o motor do automóvel transfere energia em forma de calor na exaustão de gases, nos mancais, etc).

c) *Não há forma de se determinar* que fôrça agiu sôbre o carro, ou qual a distância percorrida; sabemos apenas que o produto da fôrça pela distância é $3{,}86 \times 10^5$ joules. Qualquer combinação de fôrça e distância, cujo produto é $3{,}86 \times 10^5$ joules, deve produzir uma velocidade de 100 km/h.

PROBLEMA 13

Uma pedra de 2,0 kg gira no extremo de uma corda de 0,50 m, com velocidade de 2,0 revoluções por segundo.
(a) Qual é sua energia cinética?
(b) Quanto vale a fôrça centrípeta que age sôbre ela?
(c) Que trabalho é efetuado por essa fôrça em uma revolução?

a) A fim de determinar a energia cinética da pedra, temos que conhecer tanto a sua velocidade como a sua massa. A pedra descreve a circunferência de raio 0,50 m, em 1/2 segundo. Assim, sua velocidade é de

$$\frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 0{,}50 \text{ m}}{\frac{1}{2} \text{ s}} = 2{,}0\ \pi \text{ m/s}.$$

Sua energia cinética é, portanto:

$$E_c = \frac{1}{2} \times 2{,}0 \text{ kg} \times (2{,}0\,\pi \text{ m/s})^2 = 4{,}0\,\pi^2 = 39 \text{ joules}.$$

b) A fôrça centrípeta é $F = \frac{m v^2}{R} = \frac{2{,}0 \times 39}{0{,}50} \approx 160$ newtons.

c) *Nenhum trabalho* é realizado pela fôrça centrípeta, já que ela atua sempre perpendicularmente à direção do movimento e, assim, não possui componente na direção do movimento. Isto é verificado pelo fato de que a velocidade da pedra não aumenta; sua energia cinética não varia.

PROBLEMA 14

Um corpo percorre uma curva com a energia cinética constante de 10 joules. Parte da curva é um arco de círculo, de raio 0,50 m.

(a) Qual a fôrça resultante sôbre o corpo, enquanto percorre essa parte da curva?
(b) Qual a direção dessa fôrça?

a) Como a fôrça centrípeta é dada por $F = \frac{mv^2}{R}$, e a energia cinética, E_c, é $1/2\ mv^2$, então, $F = \frac{2E_c}{R} = \frac{2 \times 10}{0{,}50} = 40$ newtons.

b) Como a energia cinética é constante, a velocidade deve permanecer constante, e a fôrça necessária para produzir a deflexão deve ser *perpendicular ao movimento*, dirigida para o centro do círculo.

PROBLEMA 15

Um homem puxa com uma corda a massa de 20,0 kg, inicialmente em repouso no chão, exercendo uma fôrça horizontal de 20,0 newtons, e a massa se desloca de 8,0 m. A massa tem, então, a velocidade de 3,00 m/s.
(a) Qual é sua energia cinética final?
(b) Que energia foi fornecida pelo homem?
(c) Como explica você a diferença entre as duas respostas anteriores?

a) A energia cinética final da massa é $1/2 \times 20{,}0\ kg \times (3{,}00\ m/s)^2 = 90{,}0$ joules.

b) Por outro lado, o homem efetuou 20,0 newtons $\times$ 8,0 metros = 160 joules de trabalho.

c) É a fôrça resultante $\times$ distância que fornece a medida da transferência da energia em energia cinética de movimento do corpo. Da diferença nas energias, podemos concluir que a fôrça resultante (em média) é menor que a fôrça aplicada pelo homem; deve ter havido mais uma fôrça em ação, possìvelmente de atrito.

PROBLEMA 16

A Fig. 24-8 ilustra a interação de dois corpos, m_1 e m_2, sendo $m_1 = 3m_2$. A fôrça repulsiva F é constante, enquanto a separação é inferior a d, e nula quando a separação é maior que d.

Suponha que F seja 6,0 newtons, $d = 20$ cm, $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 1{,}0$ kg e que a velocidade inicial de m_1 seja $v_1 = 16$ cm/s.

(a) Encontre expressões para Δx_1 e Δx_2 (as distâncias percorridas por m_1 e m_2 durante a interação) em função do tempo t. Use a lei de Newton e a relação $\Delta x = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2$ (a velocidade inicial v_1 é v_1 para m_1 e zero para m_2).
(b) No fim da interação, a distância entre as massas é de nôve d e $\Delta x_1 = \Delta x_2$. Que tempo dura a interação?
(c) Encontre expressões para v'_1 e v'_2, as velocidades após a interação, em têrmos de v_1. Lembre-se de que, sendo constante a aceleração, $v = v_1 + at$.

A curiosidade pode levar alguns alunos a perguntarem se m_1 choca-se com m_2. Se m_2 estivesse fixo, de tal modo que não pudesse se mover, para haver o choque, m_1 teria que se aproximar de m_2 contra uma fôrça de repulsão de 6 newtons numa distância de 0,2 m, perdendo assim 1,2 joules de energia. Como a energia cinética de m_1 é apenas $1/2 \times 3{,}0 \times (0{,}16)^2 = 0{,}038$ joules, êle pararia antes de colidir com m_2, mesmo que m_2 não se movesse.

a) A aceleração de m_1 é $\frac{-F}{m_1} = -2{,}0\ m/s^2$; o sinal menos indica que m_1 está desacelerado. Portanto, $\Delta x_1 = 0{,}16\ t - 1/2 \times 2{,}0 \times t^2 = (0{,}16\ t - t^2)$ metros. A aceleração de m_2 é $\frac{F}{m_2} = 6{,}0\ m/s^2$; logo,

$$\Delta x_2 = 0 + \frac{1}{2} \times 6{,}0 \times t^2 = 3{,}0\ t^2 \text{ metros.}$$

b) Para determinar o tempo no qual $\Delta x_1 = \Delta x_2$, iguale as duas expressões encontradas na parte (a):

$$\Delta x_1 = 0{,}16\ t - t^2 = \Delta x_2 = 3{,}0\ t^2$$
$$4{,}0\ t^2 = 0{,}16t$$
$$t = 0{,}04 \text{ segundos.}$$

c) Em função de v_1, para $t = 0{,}04$ s:

$v_1' = v_1 + at = v_1 - (2{,}0\ m/s^2 \times 0{,}04\ seg) = v_1 - 0{,}08\ m/s.$

$v_1' = v_2 + at = 0 + (6{,}0\ m/s^2 \times 0{,}04\ seg) = 0{,}24\ m/s = v_1 + 0{,}08\ m/s.$

Não há nada misterioso no fato de que v_1' seja menor do que v_1, pela mesma quantidade pela qual v'_2 é maior que v_1. Isto ocorre, porque a proporção entre as duas massas é 3/1. Daí, $\triangle v_2 = 3\triangle v_1$.

Nota: Êste problema está direta e totalmente relacionado à matéria da Seção 24-6. Pode ser extensivo a uma discussão em classe, a fim de examinar e mostrar que são iguais a perda de energia cinética de m_1 e o ganho de energia de m_2.

PROBLEMA 17

Um objeto de 3,0 kg é acelerado a partir do repouso, de acôrdo com a função de fôrça indicada na Fig. 24-18. Qual é a energia cinética do objeto a

(a) s = 2m?
(b) s = 5m?
(c) s = 13m?
(d) s = 15m?

A variação na energia cinética é igual ao trabalho realizado. Com uma fôrça constante, o trabalho efetuado em qualquer intervalo de distância é, simplesmente, o produto fôrça × distância. Quando a fôrça varia com a distância, o trabalho pode ser determinado, calculando-se a área sob a curva do gráfico fôrça-distância.

O gráfico abaixo mostra a área sob a curva, da Fig. 24-18, que foi dividida em segmentos fàcilmente calculáveis.

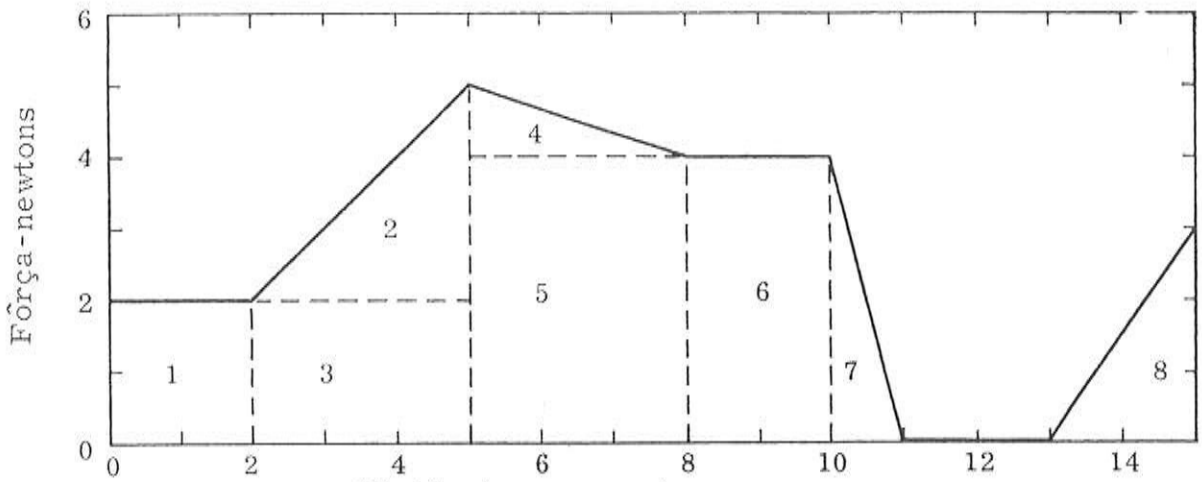


Figura 24-18

$A_1 = 2 \times 2 = 4$ joules.

$A_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4{,}5$ joules.

$A_3 = 2 \times 3 = 6$ joules.

$A_4 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 1{,}5$ joules.

$A_5 = 3 \times 4 = 12$ joules.

$A_6 = 4 \times 2 = 8$ joules.

$A_7 = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$ joules.

$A_8 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ joules.

a) Quando s = 2 m, $A_{total} = A_1 = 4$ joules $= E_c$.

b) Quando s = 5 m, $A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 = 14{,}5$ joules $= E_c$, ou $E_c = 15$ joules com dois algarismos significativos.

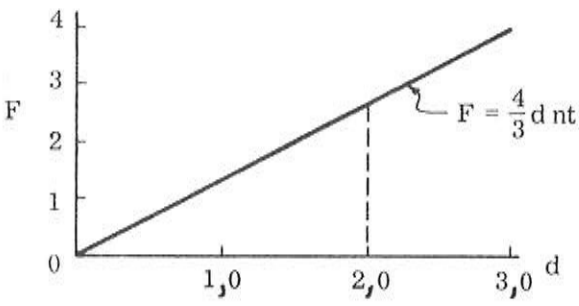
c) Quando s = 13 m, $A_{total} = 14{,}5 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = 38$ joules.

d) Quando s = 15 m, $A_{total} = 38 + A_8 = 42$ joules $= E_c$.

PROBLEMA 18

Um objeto de 10,0 kg percorre 2,00 m contra uma fôrça retardadora que aumenta linearmente 4,00 newtons para cada 3,00 metros que a massa percorre (veja Fig. 24-19). Se a fôrça é nula no início, que energia cinética é perdida?

A energia perdida pela massa de 10,0 kg é medida pelo trabalho que ela realiza. O trabalho efetuado pela massa, enquanto se movimenta contra a fôrça retardadora que varia com a distância, pode ser calculado da área sob o gráfico fôrça - distância. Entre 0 e 2,00 metros, $E_c = T = 1/2 \times 2{,}67$ newtons $\times$ 2,00 metros = 2,67 newton-metros ou joules.



PROBLEMA 19

Dois corpos de 3,0 kg interagem. Em certo momento, o primeiro corpo move-se para a direita a 0,50 m/s, e o outro move-se também para a direita a 0,30 m/s e, portanto, a velocidade com que se aproximam os dois corpos é de 0,20 m/s. Se a fôrça de interação é repulsiva e igual a 0,10 newtons, qual a taxa de decréscimo da energia cinética naquele instante?

Num certo intervalo de tempo, Δt, o primeiro corpo move-se de uma distância $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$, enquanto o segundo corpo se move de uma distância $\Delta x_2 = v_2 \Delta t$. A fôrça de repulsão atua em sentido oposto ao do movimento do primeiro corpo, mas no mesmo sentido de percurso do segundo. Por isso, durante o intervalo de tempo considerado, a energia cinética do primeiro corpo diminui de $F\Delta x_1$ e a do segundo corpo aumenta de $F\Delta x_2$. Portanto, o *decréscimo* total em energia cinética é de:

$$F\Delta x_1 - F\Delta x_2 = \Delta E_c$$

e a razão de decréscimo de energia cinética é $\Delta E_c / \Delta t$, ou:

$$\frac{\Delta E_c}{\Delta t} = \frac{F\Delta x_1 - F\Delta x_2}{\Delta t} = F\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t} - \frac{\Delta x_2}{\Delta t}\right)$$

$= F(v_1 - v_2) = 0{,}10$ newton $\times$ [(0,50 — 0,30) m/s)] = 0,020 joule/s.

(Talvez os alunos tenham curiosidade em saber o que acontece com a energia cinética "perdida". Naturalmente, êsse decréscimo ficou armazenado em forma de energia potencial do sistema dos dois corpos. Êste assunto será discutido no próximo capítulo).

PROBLEMA 20

Um corpo de 1,5 kg está em repouso e é atingido frontalmente por outro de massa 0,50 kg que se move à velocidade de 0,20 m/s. A fôrça de interação depende apenas da distância entre os dois corpos.

(a) Qual é a velocidade final de cada corpo?

(b) Em que direção cada um se move, após a interação?

Êste problema pode ser resolvido de acôrdo com o desenvolvimento exposto na Seção 24-8. Para os alunos que não examinaram cuidadosamente aquêle desenvolvimento, êste problema serve como exercício de aplicação das equações deduzidas naquela seção.

a) Seja m_1 o corpo de 0,50 kg em movimento, e m_2 o corpo de 1,5 kg que foi "atingido":

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \times \frac{0{,}50\ \text{kg}}{2{,}0\ \text{kg}} \times 0{,}20\ \text{m/s} =$$

$= 0{,}10$ m/s.

Semelhantemente, $v'_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 =$

$= \dfrac{(0{,}50 - 1{,}5)\ \text{kg}}{2{,}0\ \text{kg}} \times 0{,}20\ \text{m/s} = -0{,}10\ \text{m/s}.$

b) O significado do sinal positivo, na resposta para v'_2, é que m_2, o segundo corpo (o atingido) *move-se no mesmo sentido* da bola incidente, antes da colisão. O significado do sinal negativo, na resposta para v'_1, é que m_1, a bola inicidente (mais leve) *ricocheteia, volta para trás na colisão,* de forma que sua velocidade final é em sentido oposto ao de sua velocidade antes da colisão.

PROBLEMA 21

Um elétron em movimento atinge "frontalmente" um próton em repouso. A fôrça entre êles depende apenas da separação. (A massa do próton é 1840 vêzes maior que a do elétron). Que fração da energia cinética do elétron é transferida ao próton?

Êste problema, como o Problema 20, ilustra uma colisão em que um corpo leve choca-se com um pesado, exceto que neste caso, o corpo leve é bem mais leve que o pesado. O que precisamos saber sôbre as massas é a relação entre elas; assim, podemos escrever:

$$v_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} v_1,$$

e

$$v_1' = \frac{1 - \dfrac{m_2}{m_1}}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}.$$

Neste problema, m_1 é o elétron; assim: $\dfrac{m_2}{m_1} =$

$= 1\,840$, e

$$v_2' = \frac{2}{1841} v_1 = 1{,}086 \times 10^{-3} v_1$$

$$v_1' = \frac{1 - 1840}{1 + 1840} v_1 = -\frac{1839}{1841} v_1 = -0{,}999\ v_1.$$

Assim, o elétron recua com 0,999 de sua velocidade incidente, e o próton adquire uma velocidade para a frente de, aproximadamente, 1/1 000 da velocidade inicial do elétron.

A energia cinética inicial do elétron era $(E_c)_e = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2$. A energia cinética final do próton é

$$(E'_c)_p = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} 1840\ m_1 \left(\frac{2}{1841}\right)^2 v_1^2.$$

A razão $\dfrac{(E'_c)_p}{(E_c)_e} = \dfrac{\dfrac{1}{2} 1840\, m_1 \left(\dfrac{2}{1841}\right)^2 v_1^2}{\dfrac{1}{2} m_1 v_1^2} =$

$$= 1840 \left(\frac{2}{1841}\right)^2 = \frac{4}{1842} = 0{,}00217 = 0{,}217\%.$$

Isto é, o próton recua com, aproximadamente, 0,2 % da energia cinética inicial do elétron.

PROBLEMA 22

Um objeto de massa $m_1 = 2{,}0$ kg, movendo-se com a energia cinética de 1,0 joule choca-se frontalmente com um objeto de massa m_2 em repouso. Admitindo que a fôrça de interação depende sòmente da separação, calcule a energia cinética transferida, se

(a) $m_2 = 0{,}01$ kg.
(b) $m_2 = 2{,}0$ kg.
(c) $m_2 = 400$ kg.

Quanto vale a razão entre m_1 e m_2, quando a transferência de energia cinética fôr

(d) máxima?
(e) muito pequena?

Nota: Para encontrar mais fàcilmente essa relação, talvez convenha determinar a energia cinética transferida quando m_2 sofre acréscimos, e fazer um gráfico.

A energia cinética de m_2, após a colisão, é:

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{4 \frac{m_2}{m_1}}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{4 r}{(1 + r)^2},$$

onde $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ é simplesmente a energia cinética inicial de m_1, 1 joule neste problema, e $r = m_2/m_1$, a razão das massas.

a) $r = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$, e $\frac{4 r}{(1 + r)^2} = \frac{0{,}020}{1{,}01} = 0{,}0198$

$(E'_c)_2 = 0{,}02 \times 1$ joule $= 0{,}02$ joules.

b) $r = \frac{2{,}0}{2} = 1$, e $\frac{4 r}{(1 + r)^2} = \frac{4}{4} = 1$

$(E'_c)_2 = 1$ joule.

c) $r = \frac{400}{2} = 200$, e $\frac{4 r}{(1 + r)^2} = \frac{800}{40201} = 0{,}02$

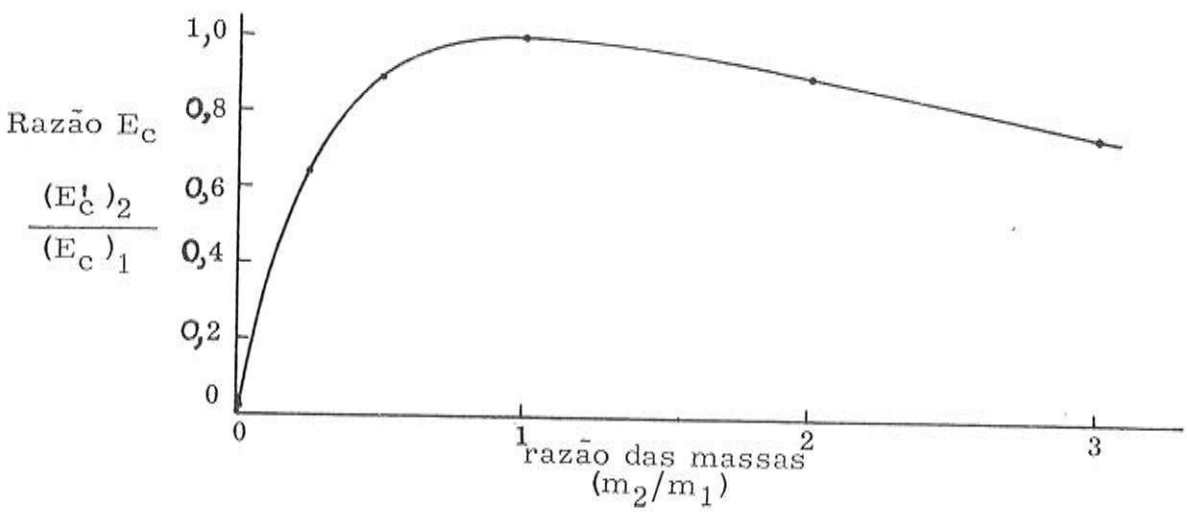
$(E'_c)_2 = 0{,}02 \times 1$ joule $= 0{,}02$ joules.

d) O gráfico da função $\frac{4 r}{(1 + r)^2} = \frac{(E'_c)_2}{(E_c)_1}$ é dado abaixo, mostrando um máximo para $m_2/m_1 = r = 1$.

e) A função tem valôres muito pequenos, tanto para r muito pequeno como para r muito grande. (O valor zero para $r = 0$ é fácil de se ver, analìticamente. O método para se chegar a zero, para r muito grande, pode ser compreendido como se segue: quando r é muito grande, $1 + r \approx r$, e a função se torna

$$\frac{4 r}{(1 + r)^2} = \frac{4 r}{r^2} = \frac{4}{r};$$

$\frac{4}{r}$ tende a zero, quando r tende para o infinito).



PROBLEMA 23

Um corpo de 5,0 kg está em repouso e um outro, de 10 kg, aproxima-se dêle à velocidade de 0,20 m/s. A fôrça de interação é nula quando a distância entre êles é superior a 0,10 m, e vale 4,0 newtons quando a separação é inferior a esta distância. (Note que algumas das respostas a êste problema são mais fáceis de obter, usando a conservação da quantidade de movimento).

(a) Qual a energia cinética das massas antes da interação?

(b) Qual a energia cinética de cada massa depois de completada a interação?

(c) Qual será a energia cinética de cada massa quando a separação fôr mínima? Lembre que as velocidades são iguais quando a separação é mínima.

(d) Qual é a separação mínima? (Sua resposta à pergunta (c) lhe fornece a perda total de energia cinética das duas massas, quando a separação é mínima).

a) $(E_c)_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \times 10\ (0{,}20)^2 =$

$= 0{,}20$ joules.

$(E_c)_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0.$

b) $(E'_c)_2 = (E_c)_1 \times \frac{4r}{(1+r)^2}$ (Veja a solução do Problema 22, no Guia).

$r = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, e $\frac{4r}{(1+r)^2} = \frac{8}{9}$ ∴

$(E'_c)_2 = \frac{8}{9} \times 0{,}20$ joules $= 0{,}18$ joules.

Como a energia cinética deve ser a mesma antes e após a interação (quando a fôrça de interação é zero):

$(E'_c)_1 = (E_c)_1 - 0{,}18 = 0{,}20 - 0{,}18 = 0{,}02$ joules.

c) Durante a interação, a energia cinética *não* é conservada. (A energia é temporàriamente armazenada em forma de energia potencial). Entretanto, a quantidade de movimento conserva-se, já que não há fôrças externas agindo. Quando a separação das massas é mínima, suas velocidades são iguais. Representemos esta velocidade por v''. Então, a quantidade de movimento das duas massas é $(m_1 + m_2)\, v''$, e é igual a $m_1 v_1$ pela conservação da quantidade de movimento. Assim, $v'' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$. A energia cinética da massa de 10 kg, neste instante, é de

$$1/2\ m_1\ v''^2 = 1/2\ m_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2\right)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 0{,}20 \times \frac{100}{225} =$$

$= 0{,}089$ joules.

Do mesmo modo, a energia cinética da massa de 5,0 kg é:

$$(E_c)_2 = \frac{1}{2} m_2 v''^2 = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2\right) \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= 0{,}20 \times \frac{50}{225} = 0{,}044 \text{ joules.}$$

A energia cinética total é $0{,}089 + 0{,}044 =$ $= 0{,}133$ joules, que é menor do que a energia cinética original, pelo exposto acima. Como a energia cinética original era 0,2 joules, a perda total de energia cinética é 0,067 joules.

d) Agora que conhecemos a energia cinética ganha pela massa de 5,0 kg e a energia cinética perdida pela massa de 10 kg, conhecemos também a energia cinética resultante perdida pelo par e, portanto, o trabalho efetuado contra a fôrça de interação:

$$F\Delta s = -(\Delta E_c)_1 + (\Delta E_c)_2$$

$$\Delta s = \frac{-(\Delta E_c)_1 + (\Delta E_c)_2}{F} = \frac{-0{,}111 + 0{,}044}{4{,}0} =$$

$$= -\frac{0{,}067}{4{,}0}.$$

(O sinal negativo para $(\Delta E_c)_1$ indica decréscimo na energia cinética).

$$\Delta s = -0{,}017 \text{ m.}$$

(Aqui, o sinal negativo representa que a distância de separação diminuí de 0,017 m). Como $\triangle s = -0{,}017$ m, a separação mínima é de $0{,}10 - 0{,}017 = 0{,}083$ m.

PROBLEMA 24

Uma granada antiaérea tem energia cinética E_c e quantidade de movimento $\vec{p}$ no momento de explodir. Que pode você dizer sôbre:

(a) a quantidade de movimento dos pedaços?

(b) a energia cinética dos pedaços?

a) Como nenhuma fôrça externa age sôbre a granada, sua quantidade de movimento permanece invariável na explosão. O vetor soma das quantidades de movimento de todos os pedaços é, portanto, igual à quantidade de movimento da granada, exatamente antes da explosão.

b) A energia cinética total dos pedaços deve ser igual à energia cinética da granada, mais o trabalho realizado (a energia transferida para energia cinética dos pedaços) pela explosão e, assim, é maior do que a energia cinética inicial do projétil.

PROBLEMA 25

(a) Faça, na Fig. 24-6, as medidas necessárias e calcule a razão entre a energia cinética da bola marcada com um ponto prêto antes do choque e sua energia cinética depois do choque.

(b) Que fração da energia cinética da bola marcada é transmitida à outra?

(c) Qual a razão entre a energia cinética total antes da colisão e a energia cinética total depois da colisão?

a) As medidas das distâncias, na figura, são difíceis de serem convertidas para distâncias reais, porque a escala é indistinta; todavia, a conversão não é necessária. A bola marcada, inicialmente, movimentou-se 1,09 cm/flashe. Após a colisão, a bola marcada movimentou-se 0,51 cm/flashe. Como a energia cinética é proporcional a v^2, a proporção entre as energias cinéticas da bola marcada, antes e depois da colisão,é:

$$\frac{0{,}51^2}{1{,}09^2} = 0{,}22.$$

b) Após a colisão, a bola não marcada movimenta-se numa velocidade de 0,91 cm/flashe. Como a energia cinética é proporcional a v^2, e como as bolas têm massas iguais, a fração da energia inicial da bola marcada, recebida pela bola não marcada, é:

$$\frac{0{,}91^2}{1{,}09^2} = 0{,}70.$$

c) Depois da colisão, a soma das energias cinétia das duas bolas é $0{,}22 + 0{,}70 = 0{,}92$ da energia cinética inicial. 8 % da energia se dissipou em forma de calor. Portanto, a energia cinética antes da colisão é 1,09 da energia cinética após a colisão.

PROBLEMA 26

Uma bola de 3 kg, movendo-se a 6 m/s, atinge outra de mesma massa que se move com a mesma velocidade mas em sentido oposto. Após a colisão, cada bola move-se com a mesma rapidez que antes, mas em sentido oposto. É elástica esta colisão?

Esta colisão foi elástica, uma vez que a energia cinética de cada bola é a mesma, antes e após a colisão. Se se perdesse alguma energia cinética, a colisão teria sido inelástica.

PROBLEMA 27

Em uma das experiências que levaram à determinação da massa do nêutron, Chadwick mediu a velocidade de prótons que tinham sido atingidos frontalmente por nêutrons. A velocidade dos prótons era de $3{,}3 \times 10^7$ m/s.

(a) Qual era a velocidade dos nêutrons, antes e após a colisão com os prótons?

(b) Chadwick mediu também a velocidade de átomos de nitrogênio atingidos frontalmente por nêutrons. Qual era essa velocidade?

(c) Qual a velocidade dos nêutrons, após cada tipo de colisão?

a) Êste é um caso de colisão frontal de um objeto com um outro de mesma massa, inicialmente em repouso. A energia cinética do projétil é inteiramente transmitida ao alvo, e o projétil é levado ao repouso. Analìticamente:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v'_2 = v'_2 = 3{,}3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 0.$$

b) $m_2 = 14\, m_1$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 14\, m_1} v_1 =$$

$$= \frac{2 \times 3{,}3 \times 10^7}{15} = 4{,}4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

c) Da parte (a), conclui-se que, após colidir frontalmente com um próton, a velocidade de nêutron será 0. Depois de colidir frontalmente com o nitrogênio, o nêutron terá a velocidade de:

$$v'_1 = \frac{m_1 - 14\, m_1}{m_1 + 14\, m_1} \times 3{,}3 \times 10^7 = -2{,}9 \times 10^7$$

m/s.

(Isto é, após colidir com o nitrogênio, os nêutrons ricocheteiam para trás).

PROBLEMA 28

Um vagão vazio A, de massa $2{,}5 \times 10^4$ kg (25 toneladas) move-se sôbre um trilho horizontal a 2,0 m/s, até engatar-se em um vagão estacionário B de massa $5{,}0 \times 10^4$ kg. Há pouco atrito e os freios não estão aplicados.

(a) Qual a quantidade de movimento inicial de A?

(b) Qual a velocidade dos dois vagões, ao se moverem juntos após a interação?

(c) Qual a energia cinética total antes e após o impacto? Trata-se de colisão elástica?

$v_1 = 2{,}0$ m/s; $m_1 = 2{,}5 \times 10^4$ kg.

$v_2 = 0$; $m_2 = 5{,}0 \times 10^4$ kg.

a) $p_1 = m_1 v_1 = 5{,}0 \times 10^4$ kg m/s.

b) $p' = p_1 \therefore (m_1 + m_2)\, v' = m_1 v_1$

$$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{5{,}0 \times 10^4}{7{,}5 \times 10^4} = 0{,}67 \text{ m/s.}$$

c) $E_c \text{ (antes)} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 5{,}0 \times 10^4$ joules

$$E_c \text{ (depois)} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, v'^2 =$$

$$= 1{,}7 \times 10^4 \text{ joules.}$$

$3{,}3 \times 10^4$ joules foram transferidos, na colisão, para outras formas de energia; portanto, a colisão deve ter sido inelástica.

PROBLEMA 29

Esfregue vigorosamente as palmas de suas mãos. Você realiza trabalho? Que acontece à energia?

Há realização de trabalho, quando você esfrega suas mãos uma contra a outra, pois cada braço exerce uma fôrça em cada mão, na direção do movimento. A energia despendida pelos músculos aquece as mãos.

PROBLEMA 30

Faço com que um de meus dedos deslize com a velocidade constante de 3 cm/s, sôbre a superfície de vidro de uma mesa, sob a ação de uma fôrça horizontal de 1 newton.

(a) Que trabalho é realizado em 1 s pela fôrça exercida por meu braço sôbre o dedo? Que energia êle transfere ao dedo, por segundo?

(b) Quanto vale e em que sentido atua a fôrça de atrito sôbre meu dedo? Que

trabalho ela realiza por segundo sôbre o dedo? Em que sentido ela transfere energia — dá ou retira energia do dedo?

(c) Qual é a fôrça resultante sôbre o dedo? Que trabalho realiza, por segundo, a resultante sôbre o dedo em movimento? Que acontece à energia cinética do dedo?

(d) Qual a fôrça exercida horizontalmente sôbre a mesa, por meu dedo? De quanto se move a mesa? Que trabalho realiza sôbre a mesa esta fôrça, em cada segundo? Em que sentido ela transfere energia — dá ou retira energia da mesa?

(e) Que acontece na região em que o dedo e a mesa estão em contato?

a) O dedo é empurrado sôbre a superfície da mesa 3 cm em 1 segundo, exercendo uma fôrça horizontal de 1 newton; assim, o trabalho efetuado (e a energia transferida) é: 1 newton $\times$ 0,03 m = 0,03 joules por segundo.

b) Como o dedo se move com velocidade constante, a fôrça de atrito sôbre êle é igual em módulo, mas oposta em sentido, à fôrça de 1 newton aplicada pelo braço. Portanto, o trabalho é realizado (e a energia é transferida) do dedo, exatamente na mesma razão que a da parte (a), 0,03 joules por segundo.

c) A fôrça resultante sôbre o dedo é zero, porque êle se move numa velocidade constante. Logo, a fôrça resultante não realiza trabalho, e a energia cinética do dedo permanece constante.

d) A fôrça exercida pelo dedo sôbre a mesa é idêntica a do braço sôbre o dedo, mas a mesa pròpriamente não se move. Conseqüentemente, nenhum trabalho é realizado por esta fôrça no seu significado usual, e a energia cinética total da mesa não aumenta. Portanto, a energia transferida do dedo, conforme a parte (b), deve se transformar em algo diferente. Fica na região onde o dedo e a mesa estão em contato, e

e) lá encontramos calor.

Nota: Um ponto a ser destacado, neste problema, é que o trabalho é realizado pelo braço ao empurrar o dedo sôbre a mesa. Nenhuma modificação ocorre na energia cinética. Que aconteceu à energia que foi transferida do braço, ao realizar o trabalho mecânico? A única modificação, que ocorreu com os objetos em questão, foi o aquecimento do dedo e da mesa. O aluno é, então, induzido a suspeitar que esta é uma outra forma de energia que deve, eventualmente, completar o quadro geral. Isto é análogo à sugestão da idéia de energia potencial, implícita nos problemas de interações elásticas em que a energia cinética não é conservada.

Há certos pontos difíceis na compreensão completa dêste problema. A discussão acima deveria ser suficiente, mas os alunos talvez estejam confusos com a complexidade das fôrças de atrito. Embora alguns dêstes detalhes sejam apresentados abaixo, será conveniente evitá-los.

O dedo se aquece. Contudo, nas respostas (a) e (b), afirmou-se que a energia está sendo retirada do dedo, na mesma velocidade com que está sendo fornecida para o dedo. Isto não parece estar de acôrdo com o princípio de conservação da energia. A explicação encontra-se no fato de que as fôrças de atrito são muito complicadas, quando observadas detalhadamente. Os pontos de interação das superfícies não estão rìgidamente presos aos corpos, que deslizam uns sôbre os outros. Embora, como foi afirmado na Seção 9 do texto, o trabalho realizado em cada ponto de interação *sôbre o centro da mesa* seja

$$T_a = F_{ax}x,\ T_b = F_{bx}x,\ \ldots,$$

esta não é, necessàriamente, a história completa. A dificuldade é que as componentes das fôrças F_{ax}, F_{bx}, etc não agem, comumente, no mesmo ponto do corpo, e são possíveis movimentos relativos dos pontos de aplicação. Assim, enquanto o corpo como um todo pode se mover de uma distância x, os pontos de aplicação das pequenas fôrças que contribuem para fornecer a fôrça total ("fôrça de fricção") podem mover-se de distâncias bem diferentes.

Considere um "simples" exemplo macroscópico. Um violinista passa o arco sôbre uma corda do seu violino. Ao fazer isto, êle movimenta o arco por uma distância L, aplicando a fôrça F. Efetua, então, uma quantidade de trabalho, $T_v = F_vL$. Uma fôrça de atrito opõe-se ao movimento, associada ao deslizamento do arco sôbre a corda. Esta fôrça deve ser igual e oposta a F_v, pois o arco não acelera. Todavia, esta fôrça de atrito é realmente a média de uma

fôrça variável entre o arco e a corda. Num modêlo simples, pode-se considerar que o arco empurra a corda para a frente, até que a fôrça elástica restauradora da corda exceda a fôrça de atrito estático da corda sôbre o arco. A corda, então, começa a escorregar para trás, enquanto o arco continua a mover-se para a frente. A correlação entre fôrça × distância e fôrça × × tempo fica muito complicada. Não é mais óbvio que a soma das pequenas contribuições locais (F_iX_i) seja igual ao valor F_vx.

No caso do dedo sôbre a mesa, esta identidade deve ser decomposta localmente (na região do contato), porque a energia em forma de calor acumula-se no dedo. Então, como o trabalho mecânico é a única forma importante de transferência de energia neste problema, o trabalho negativo, efetuado pela fôrça de atrito sôbre o dedo na região da interação, deve ser menor que o trabalho positivo efetuado pelo braço ao empurrar o dedo.

Realmente, como o trabalho é um escalar e a fôrça um vetor, deve-se considerar o trabalho total efetuado por um certo número de fôrças como sendo a soma de trabalhos individuais, e não como a soma vetorial das fôrças × o deslocamento. A última consideração é satisfatória, quando você está interessado sòmente no movimento do centro de massa e na energia cinética. Considere o exemplo de uma mola prêsa dentro da "bôca" de um alicate. Aperte o alicate. A fôrça + F atua numa das extremidades da mola, por uma distância + x. A fôrça, −F, atua na outra extremidade da mola, empurrando-a por uma distância −x. A fôrça resultante sôbre a mola é zero. Portanto, a aceleração é zero, e a variação na energia cinética global é zero. Contudo, o trabalho realizado sôbre a mola é:

$$(+F)\ (+x) + (-F)\ (-x) = 2\ Fx.$$

Não é recomendável entrar em detalhes sôbre a natureza microscópica, nesta fase do desenvolvimento. O calor será estudado, microscòpicamente, no Capítulo 26. Então, êste problema deverá ser discutido novamente.

PROBLEMA 31

Uma lâmpada de 100 g cai de uma tôrre alta e alcança a velocidade de 20 m/s, após cair 100 m. Aproximadamente, quanta energia foi transferida para o ar?

A fôrça de gravidade para baixo efetua uma quantidade de trabalho igual à fôrça × a distância que a lâmpada cai, 0,1 kg × 9,8 nt/kg × 100 m, igual a 98 joules. Entretanto, após a lâmpada cair 100 m, sua energia cinética é:

$$E_c = \frac{1}{2}\ mv^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}1\ \text{kg} \times (20\ \text{m/s})^2 =$$

$$= 20\ \text{joules}.$$

A diferença entre o trabalho efetuado sôbre a lâmpada e sua energia cinética representa o trabalho realizado pela lâmpada contra a fôrça de atrito do ar. Ela importa em 78 joules, e essa energia aquece o ar e a lâmpada.

PROBLEMA 32

Uma fôrça de 3,0 newtons e outra de 4,0 newtons são aplicadas simultâneamente a um objeto de 4,0 kg, inicialmente em repouso. As duas fôrças formam entre si um ângulo de 90° e atuam durante 2,0 s.

(a) Qual é a resultante?

(b) Use êste valor para calcular o trabalho total realizado.

(c) Qual é o trabalho realizado por cada fôrça, separadamente? Compare a soma dêstes trabalhos com a resposta ao ítem (b).

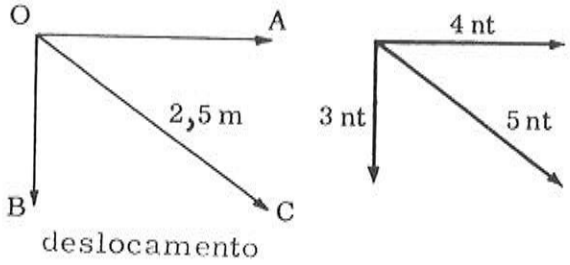
a) A fôrça resultante é 5,0 newtons, formando um ângulo de 37°, medido a partir da direção da fôrça de 4,0 newtons. (O triângulo vetorial é um triângulo retângulo 3-4-5).

b) A aceleração da massa de 4,0 kg é 1,25 m/s². Durante os 2,0 segundos em que a fôrça atua, a massa percorre uma distância:

$$s = \frac{1}{2}\ at^2 = \frac{1{,}25 \times 4}{2} = 2{,}5\ \text{m}.$$

O trabalho realizado pela fôrça resultante é de 5,0 newtons × 2,5 metros = 12,5 joules.

c) O diagrama vetorial dos deslocamentos é similar ao das fôrças atuantes.



Portanto, quando a massa se desloca 2,5 metros de 0 para C, suas componentes na direção (OA) da fôrça de 4,0 newtons é 4/5 de OC. Similarmente, a massa se movimenta 3/5 de 2,5 metros, na direção OB, que é a direção da fôrça de 3,0 newtons. Logo, o trabalho realizado pelas fôrças de 4,0 e 3,0 newtons é:

$$T_4 = 4{,}0 \text{ nt} \times \frac{4}{5} \times 2{,}5 \text{ m} = 8 \text{ joules.}$$

$$T_3 = 3{,}0 \text{ nt} \times \frac{3}{5} \times 2{,}5 \text{ m} = 4{,}5 \text{ joules.}$$

$T_3 + T_4 = 8 + 4{,}5 = 12{,}5$ joules, a mesma quantidade de trabalho efetuada pela fôrça resultante.

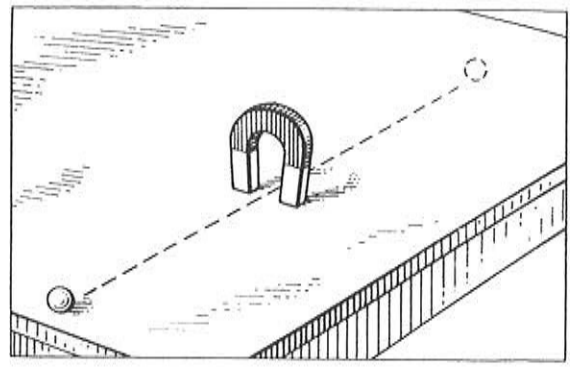
PROBLEMA 33

Um ímã em forma de ferradura, de massa m, está em pé sôbre uma mesa sem atrito. Uma bola de rolamento de aço, de massa m, é lançada sôbre a mesa de bem longe, com velocidade v, atravessa o ímã e ultrapassa-o. Admita que a fôrça de atração F varie com a distância e seja a mesma, antes e depois do ímã (Fig. 24-20).

(a) Qual a velocidade final da esfera?

(b) Qual a velocidade final do ímã?

Êste problema envolve uma colisão elástica, embora os alunos talvez não a reconheçam como uma colisão. Além disso, esta colisão é um tanto diferente, pois as fôrças são de atração. Isto ocorre apenas porque a bola pode passar sob o arco do ímã, ao invés de ser retida pelo ímã. Por que a colisão é elástica? Porque a



fôrça entre os dois objetos depende sòmente da separação entre êles.

Tanto o ímã como a bola recebem a ação da fôrça magnética; assim, ambos são acelerados, um em direção ao outro; o ímã acelera do repouso, e a bola acelera a partir de sua velocidade inicial. Enquanto a bola e o ímã se movem, um aproximando-se do outro, a fôrça (e as acelerações) aumentam constantemente, até que a bola passa através do ímã. A fôrça, então, tende ràpidamente para zero e inverte de sinal. À medida que a bola se afasta do ímã, a fôrça, tanto sôbre a bola como sôbre o ímã, é uma fôrça retardadora. Em cada valor da distância de separação, a fôrça retardadora é igual em intensidade, mas oposta em sentido à fôrça aceleradora que agiu, quando a bola e o ímã se aproximavam. A uma distância de separação muito grande, o ímã chegará ao repouso. A fim de conservar a quantidade de movimento e a energia, a bola deve, então, atingir sua velocidade inicial.

° ° °

Nota. Durante esta interação, enquanto a bola sai do ponto A e passa pelo ímã no ponto B, o ímã é primeiro acelerado para A e, depois, levado ao repouso. Durante êste processo, de acôrdo com a conservação da quantidade de movimento, a bola deve ter sido acelerada para B, a uma velocidade maior do que sua velocidade inicial, v_0, e depois desacelerada, até que, longe do ímã, sua velocidade volta a ser outra vez v_0. Conjuntamente, o efeito do ímã é diminuir o tempo que a bola leva para ir de A a B. Isto é feito, usando-se o ímã como "combustível de foguete" de natureza temporária. A bola puxa o ímã para trás e, assim, ganha velocidade. Em

seguida, atua do outro lado, parando o ímã e perdendo, assim, seu incremento de velocidade. O movimento do centro de massa é constante durante todo o tempo — a quantidade de movimento do ímã, para trás, é contrabalanceada pela quantidade de movimento extra da bola, para a frente.

A energia cinética conserva-se, isto é, E_c inicial = E_c final, mas a energia cinética não é conservada durante a interação. Neste problema (fôrça de atração), a energia cinética é maior quando a bola está passando sob o ímã, pois, naquele instante, tanto a bola como o ímã estão se deslocando com suas velocidades máximas. Os alunos talvez tenham curiosidade em saber como a energia é conservada. A resposta, naturalmente, é que se permitiu que a "mola magnética" se contraísse. Há energia armazenada num campo magnético, e esta energia é tanto menor, quanto mais a bola está próxima do ímã. A energia armazenada no campo magnético é transformada em energia cinética, enquanto a bola se aproxima do ímã e, enquanto a bola se afasta do ímã, a energia cinética extra adquirida é revertida em energia armazenada no campo magnético. A energia armazenada no campo magnético está em forma de energia potencial. Energia potencial é a matéria do próximo capítulo. Pode perguntar aos alunos o que acontece ao ímã. No final da interação, o ímã estará no mesmo lugar que no início da interação?

PROBLEMA 34

Um foguete de dois estágios move-se com velocidade v, numa região onde a gravidade é desprezível. Êle consiste de um estágio final ou cabeça, de massa m, e uma cauda de massa $2m$, que inclui uma carga explosiva para separar a cabeça. A carga é cuidadosamente projetada, de forma que, após a separação, a cauda tenha a menor energia possível. (Admita que os gases resultantes da explosão permaneçam na cauda).

(a) Qual é a menor energia que pode ter a cauda?

(b) Neste caso, que energia terá a cabeça após a explosão? Dê a resposta em têrmos de m e v.

(c) Que quantidade de energia cinética tinha a *cabeça* antes da explosão?

(d) Que quantidade de energia cinética ganhou a cabeça?

(e) Que quantidade de energia é fornecida pelo combustível, na explosão?

(f) Por que a resposta (e) difere da resposta (d)?

a) Como a energia cinética é sempre uma quantidade positiva, o menor valor possível é *zero*.

b) Após a explosão, pela conservação, a quantidade de movimento inicial do foguete todo, $p = 3\ mv$, é igual à quantidade de movimento final da cabeça, $p' = mv'$. Resolvendo esta igualdade para v, encontramos:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ 3\ mv &= mv' \\ v' &= 3\ v \end{aligned}$$

A energia cinética da cabeça, depois da explosão, é: $E_c = \frac{1}{2} \times m \times (3v)^2 = 4{,}5\ mv^2$.

c) Antes da explosão, a cabeça tinha uma energia cinética de $\frac{1}{2}\ mv^2$.

d) A cabeça ganhou $4\ mv^2$ de energia cinética.

e) No processo da explosão, a cauda perdeu mv^2 de energia cinética, enquanto a cabeça ganhou $4\ mv^2$. A diferença de $3\ mv^2$ foi fornecida pela carga explosiva.

f) A diferença entre a resposta (e) e a resposta (d) está na energia cinética, transferida da cauda do foguete à cabeça, durante a explosão.

———

CAPÍTULO 25

ENERGIA POTENCIAL

RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo, o conceito de energia é ampliado, a fim de incluir a energia potencial. O intercâmbio de energia entre as duas formas, cinética e potencial, é estudado; formula-se a lei de conservação da energia mecânica para fôrças "conservativas".

Seções 1 e 2. A colisão elástica é reexaminada, observando que a energia cinética, que "desaparece" durante a interação pode ser considerada como armazenada. Uma expressão para a energia potencial de uma mola comprimida ou distendida é desenvolvida. Estas novas idéias são generalizadas para uma interação arbitrária de dois corpos.

Seções de 3 a 5. Os resultados das Seções 1 e 2 são ampliados pela consideração da energia potencial de um campo gravitacional. São consideradas as energias potenciais dos corpos próximos à superfície da Terra. Desenvolve-se os critérios para estados "livres" e "ligados" sob atração gravitacional.

Seção 6. As conclusões anteriores são generalizadas, a fim de mostrar que a energia mecânica total é conservada em um grande número de sistemas complexos.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 25

A tabela seguinte sugere possíveis planejamentos para êste capítulo, de acôrdo com os planejamentos delineados na seção introdutória para a Parte III.

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp.
Secs. 1, 2	3	0	-	2	0	-
Secs. 3, 4, 5	3	2	III-12 III-13	2	1	III-12
Sec. 6	1	0	-	0	0	-

MATERIAIS RELATIVOS AO CAP. 25

Laboratório. A Experiência III-12, *Variações na Energia Potencial,* emprega uma massa suspensa numa mola, a fim de examinar a transferência de energia, da energia potencial gravitacional para a energia potencial da mola distendida. Esta experiência será melhor realizada, após discutida a Seção 3.

A Experiência III-13, *A Energia de um Pêndulo Simples,* utiliza um pêndulo simples e o

marcador de tempo para obter dados das energias cinética e potencial, nos vários pontos de oscilação do pêndulo. Adicionando as curvas para as energias cinética e potencial, verifica-se a quase constância da energia total do sistema. Esta experiência é ligeiramente de menor prioridade que a III-12. Pode ser feita, após o estudo da Seção 3.

Veja as Notas de Laboratório para sugestões.

Casa, Classe e Laboratório. A tabela seguinte classifica os problemas de acôrdo com o nível de dificuldade de cada um dêles e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente adequados para discussão em classe. Os problemas que são recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas dos problemas são dadas no CCL.

Os Problemas 23 e 24 podem ser pedidos conjuntamente.

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe
1	2, 12*	1, 3*, 5, 6, 7, 8*, 10	4, 11	4, 9, 10
2		13	14	13
3	15, 19, 20	17	16*, 18, 19	15, 16, 19, 20
4	23	22, 25, 27	21, 24	23
5	26			26

Filme. Se ainda não foi exibido, "Work and Energy", descrito no resumo do Capítulo 24, pode ser projetado durante êste capítulo.

Seção 1 — O Amortecedor de Mola

FINALIDADE. Introduzir o conceito de energia potencial e sua aplicação; fornecer uma base para casos de fôrças mais gerais, tratando em detalhe um exemplo familiar: a mola.

CONTEÚDO a. A energia mecânica é conservada sempre que a fôrça entre dois corpos dependa sòmente de sua separação.

b. Numa boa mola (elástica) a fôrça necessária para mantê-la comprimida, com uma certa deformação, é sempre a mesma, independente da maneira de compressão da mola ou do número de vêzes em que ela é comprimida. Quando isto acontece, tanto o trabalho necessário para comprimir a mola, como a energia que pode ser observada quando a mola é sôlta, são sempre iguais e independentes do modo como a mola atingiu êsse ponto de compressão.

c. A energia potencial de uma mola, U, é dada pela área sob a curva da fôrça em função da compressão.

d. $\frac{1}{2}\,mv^2 + U = E =$ constante numa interação elástica.

e. Quando a fôrça é proporcional ao deslocamento, $F = kx$, a energia potencial é $U = 1/2\ kx^2$, e $1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2 = E$. Esta relação nos permite avaliar a velocidade em qualquer ponto de uma interação elástica.

ÊNFASE. O entendimento desta seção é fundamental para a compreensão do restante do capítulo.

COMENTÁRIOS. Os detalhes de uma mola não elástica não devem ser frisados, mas é sempre bom ter a certeza de que os alunos compreendem qual propriedade é a decisiva. Para a mola ser elástica, ela deve realizar a mesma quantidade de trabalho, tanto na distensão como na compressão. Os alunos devem saber que podem calcular a energia potencial de uma mola, pela área sob a curva fôrça-compressão. Provàvelmente, êles memorizarão $U = 1/2\ kx^2$

automàticamente, mas o importante é compreender de onde proveio esta fórmula. O objetivo fundamental é familiarizar-se com a conservação de energia e transferência de energia. Isto pode ser obtido pela discussão de inúmeros exemplos, em que a forma de energia (cinética ou potencial) é tratada, e observados os sinais de transferência. Nesta seção, procure evitar a abstração da energia potencial gravitacional ou qualquer outro campo de fôrça (ação à distância).

° ° °

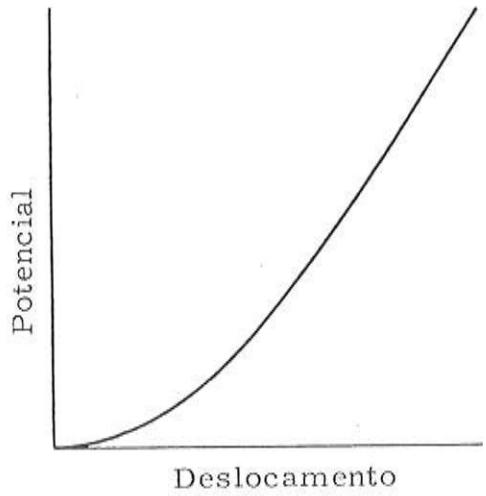
Discuta diversos tipos diferentes de interação entre uma massa e uma mola. Por exemplo, considere a massa chocando-se com a mola, mas prenda a mola com uma espécie de catraca, no momento de compressão máxima. Então, a massa fica em repouso. Se soltar a mola vagarosamente, ela realiza trabalho, transferindo para sua mão a energia que estava armazenada em forma de energia potencial. (Como se compara o trabalho que *sua mão* realiza, *ao soltar* a mola, com a energia cinética original da massa? Sem dúvida, é *negativo*, pois você "absorve" a energia potencial da mola; é *negativo*, porque, ao soltar a mola, sua mão se move em sentido oposto ao da fôrça que exerce sôbre a mola)

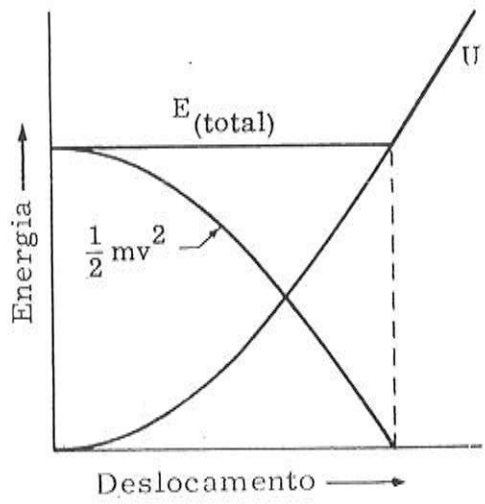
Deixe que uma massa atinja e comprima a mola; em seguida, depois de prender a mola da mesma forma que antes, substitua essa massa por uma outra diferente. Observe detalhadamente a aceleração desta segunda massa e demonstre que energia cinética final é ainda a mesma.

Outra variante: suponha que a massa atinja a mola e seja empurrada de volta, porém, deixe a mola oscilando. Como se compara a energia cinética da massa com o seu valor antes da colisão? É menor por um valor que é, exatamente, a energia deixada na mola. Pergunte à classe se a energia deixada na mola é potencial ou cinética. [A energia passa de uma forma para outra, do mesmo modo que a energia de uma massa, que oscila prêsa a uma mola de massa desprezível, vai e vem da energia cinética (quando a mola não está distendida e a massa se move com a máxima rapidez) para a energia potencial (quando a massa está momentâneamente parada, e a mola está comprimida ou distendida de um valor máximo)].

° ° °

A Figura 25-6 pode justificar uma pequena discussão. O gráfico é uma curva da energia potencial de uma mola especial, em função da compressão. Peça à classe que considere o mesmo tipo de gráfico para uma mola ideal, cuja curva F versus x é mostrada na Figura 25-5. Para esta mola, temos $F = kx$ e $U = 1/2\ kx^2$, como foi demonstrado. Assim, o gráfico da energia potencial se parece com a Figura 25-4, reproduzida abaixo.





Se desejarmos representar tôdas as energia envolvidas no movimento de uma massa, m enquanto a mola é comprimida, podemo

construir as três curvas num mesmo gráfico. A curva da energia potencial será idêntica à mostrada na figura. A energia total, $E = 1/2\ mv^2 + U$, deve permanecer constante, quando a mola é elástica. Quando $U = 0$ (para $x = 0$), $E = 1/2\ mv^2$. Portanto, a linha horizontal reta que representa E é feita na altura que corresponde ao valor da energia cinética, quando a compressão é zero. A energia cinética é, assim, dada em cada ponto pela diferença entre a linha horizontal representando E e a curva representando U, $1/2\ mv^2 = E - U$.

Como um valor negativo de $1/2\ mv^2$ não tem significado, traçamos a linha representando E sòmente até o ponto onde intercepta U. Nesse ponto, $1/2\ mv^2 = 0$, e, portanto, $v = 0$.

Seção 2 — Energia Potencial de Dois Corpos que Interagem

FINALIDADE. Generalizar a seção anterior; estudar vários tipos de fôrças como uma preparação para a energia potencial gravitacional.

CONTEÚDO a. Com fôrças que dependem sòmente da separação, a energia cinética que "desaparece" durante a colisão é armazenada como energia potencial e pode ser recuperada.

b. A energia potencial depende apenas da separação e não dos detalhes da colisão.

c. A energia potencial é armazenada "num campo de fôrça" — uma mola imaginária.

ÊNFASE. Esta seção deve ser desenvolvida, baseando-se completamente na Seção 1. Talvez seja útil referir-se, antecipadamente, às Seções 3 e 4, pois as fôrças gravitacionais são sòmente exemplos específicos de uma fôrça de ação à distância, considerados em detalhes, até agora.

COMENTÁRIOS. São feitas considerações sôbre a energia potencial de um sistema de dois corpos que interagem a uma distância. A parte matemática foi desenvolvida no Capítulo 24, onde a energia cinética durante a colisão foi estudada detalhadamente. Para as fôrças de ação à distância, em contraste aparente com a mola, não há espaço visível para a armazenagem de energia potencial. Isto talvez dificulte certos alunos. O que faz com que a introdução do conceito de energia potencial seja necessária é o fato de que alguma energia cinética desaparece numa parte da colisão, e reaparece mais tarde. Poder-se-ia dizer que "a energia cinética é destruída, mas, posteriormente, uma quantidade igual é criada" ou "a energia cinética é convertida em energia potencial, e esta é depois reconvertida em energia cinética". A segunda maneira de ver tem certa vantagem, pois dá ênfase ao fato de que o trabalho total que as partículas podem realizar é o mesmo em qualquer instante durante a colisão, quer o deixemos aparecer diretamente como energia cinética, quer prendamos as partículas, fazendo com que se separem vagarosamente (caso em que a energia aparece como trabalho contra nós).

Onde está situada a energia potencial? Para a colisão da Seção 1, dizemos: "na mola". Podemos considerar a fôrça entre dois corpos que interagem à distância, interação esta produzida por uma "mola imaginária", tal como foi sugerido no texto. Realmente, não há necessidade de "localizar" a energia potencial, não importa quão natural isto possa parecer. *O que é realmente necessário, para que o conceito de energia potencial seja útil, é que possamos empregá-lo a fim de predizer o trabalho realizado (ou fornecido), quando os corpos passam de uma separação à outra.* Com efeito, a separação dos corpos fornece-nos uma indicação concisa da energia potencial de um sistema, tal como no alongamento de uma mola. Conforme o exposto no texto, mesmo uma mola real deve, numa escala atômica, ser compreendida em têrmos de fôrças de ação à distância, "molas imaginárias".

Provàvelmente, encontraremos dificuldades, se tentarmos localizar a energia potencial, associando-a a um dos dois corpos. A energia potencial deve ser considerada como uma propriedade dos dois corpos juntos, como um único sistema. O trabalho necessário para levar B, enquanto se mantém A fixo, é idêntico ao necessário para levar A, enquanto se mantém B fixo, supondo-se apenas que os levamos à mesma separação final, nos dois casos.

° ° °

Os diversos parágrafos (página 123), começando com: "Para entender mais completamente ...", fornecem uma visão prévia do próximo capítulo sôbre calor e teoria cinética e apresenta, inicialmente, uma imagem atômica da perda de energia mecânica. A exposição é rápida, evidenciando que êste *não* é o tratamento completo. Tal tratamento será feito no

Capítulo 26, Seção 3. As exposições dêste capítulo devem ser tratadas simplesmente como indicativas dos detalhes que serão desenvolvidos mais tarde.

Seção 3 — Energia Potencial Gravitacional Próxima à Superfície da Terra

Seção 4 — Energia Potencial Gravitacional em Geral

Seção 5 — Energia de Escape, Velocidade de Escape, e Energia de Ligação dos Satélites

FINALIDADE. Aplicar o conceito de energia ao campo de fôrça mais familiar ao homem — a fôrça gravitacional.

CONTEÚDO a. Quando uma massa, m, move-se no campo gravitacional da Terra, o movimento simultâneo da Terra pode ser ignorado, se m fôr pequena comparada com a massa da Terra.

b. Próximo à superfície da Terra, para pequenas variações em altura, comparadas com o raio da Terra, a energia potencial de posição é mgd, onde d é o deslocamento vertical da massa m, de algum nivel arbitrário de energia potencial zero.

c. Quando as variações no deslocamento são grandes, relativamente ao raio da Terra, a energia potencial da massa m, localizada a uma distância, r, do centro da Terra, é $U(r) = U(\infty) - \frac{GMm}{r}$, onde $U(\infty)$ é um valor arbitrário (usualmente considerado como sendo zero), designado para a energia potencial a uma distância infinita.

d. O conceito de energia potencial num campo gravitacional é aplicado ao movimento de um satélite, possibiltando-nos a comparação da energia cinética necessária para escape com a necessária para a permanência em órbita, e introduzindo a idéia de energia de ligação. A energia total, $E = 1/2\ mv^2 + U$, permanece constante.

ÊNFASE. Estas seções devem ser tratadas profundamente, não só por causa do interêsse inerente ao problema em si, mas também porque a familiaridade com a energia potencial, num campo de fôrça que varia com o inverso do quadrado da distância, será novamente necessária na Parte IV, no estudo do campo coulombiano e do átomo.

DESENVOLVIMENTO. O ponto de partida para o desenvolvimento é a relação cinemática $v^2 \propto 2gd$, para objetos em queda livre na superfície da Terra. Isto foi deduzido no Capítulo 5. Os alunos talvez se lembrem que g não é exatamente constante. É sòmente constante, enquanto a fôrça de gravidade fôr constante dentro de uma faixa de deslocamento, e isto é verdadeiro sòmente se a distância d fôr desprezível, comparada ao raio da Terra. Multiplicando ambos os membros da relação acima por m/2, obtemos a energia cinética de um objeto em queda livre, em função da altura de queda. Isto motiva a designação de uma energia potencial para a massa no campo gravitacional da Terra. Deve-se proceder de tal maneira, que uma igual variação d na altura resulte numa variação em energia potencial igual a mgd. A equação $U(h) = U(h_0) + mg(h - h_0)$ satisfaz a esta exigência. Pode-se considerar a constante arbitrária $U(h_0)$ como um meio de simplificar a expressão da energia potencial, em qualquer tipo de problema particular. Freqüentemente, escolhe-se $U(h_0) = 0$, onde h_0 é a origem da coordenada-altura, no problema em questão. A escolha de $U(h_0)$ não afeta a física do problema, pois sempre trabalhamos com *variações* de energia potencial.

O passo seguinte é reexaminar o tema da Seção 24-4 (trabalho e energia cinética), em função da energia potencial e energia cinética. O acréscimo na energia cinética, durante a queda de um objeto, é igual ao decréscimo na energia potencial. O resumo das observações experimentais, que até aqui se enquadrava na liguagem da lei de Newton, pode apoiar-se, agora, na conservação da energia mecânica. A lei aplica-se ao sistema total, Terra + massa m.

Não se deve perder de vista o fato de que a energia potencial é aplicada ao *sistema* de objetos em interação. Logo de início, prova-se que, na maior parte das situações envolvendo o movimento de uma massa no campo da Terra, a energia cinética da Terra pode ser desprezada. Por esta razão pode-se pensar que a massa tenha energia potencial, mas, realmente, a energia potencial pertence ao *sistema* e não a uma das partes do sistema, separadamente. Deve-se con-

siderar a energia potencial num campo gravitacional, como pertencente à distensão de uma mola gravitacional imaginária. Uma extremidade desta "mola" está prêsa à Terra. Se se perder de vista o fato de que a energia potencial pertence aos dois corpos do sistema, poder-se-á chegar a conclusões errôneas, tal como se concluírmos que um homem levanta um objeto do solo para uma mesa, sem realizar trabalho sôbre o objeto. Há duas fôrças agindo sôbre o objeto: a fôrça do homem e a fôrça da gravidade. Elas são iguais; não há aceleração, e o trabalho resultante efetuado sôbre o objeto é zero (isto é, não há variação resultante na energia cinética do objeto). *Foi* efetuado trabalho, passando a energia do homem ao sistema Terra-objeto. A energia transferida é melhor considerada como sendo o resultado da combinação do empurrão dos pés sôbre o piso e o puxão da mão sôbre o objeto. Êstes, juntos, esticam a "mola da gravidade" e, assim, nela armazenam energia .

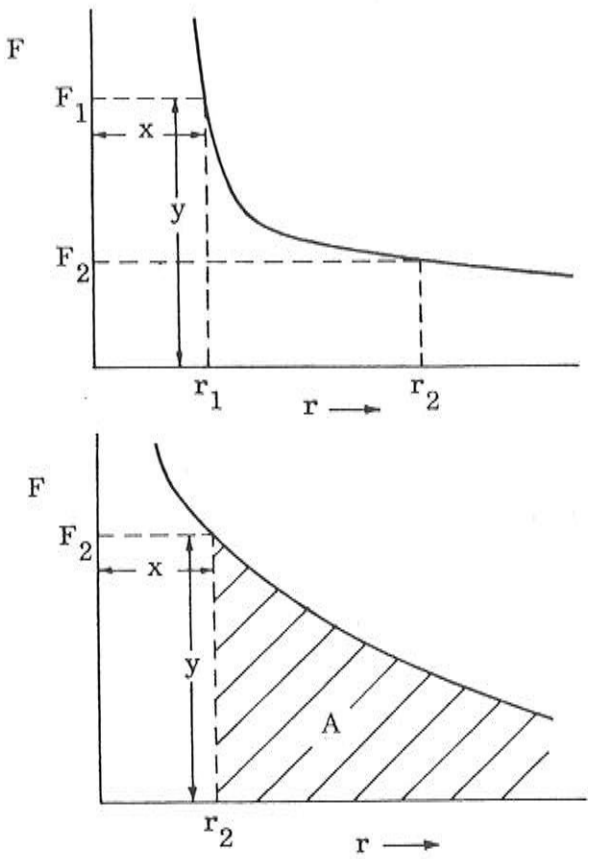
* * *

Quando o deslocamento de um objeto é grande, comparado com a distância radial ao centro da Terra, é necessário levar em consideração a variação de fôrça no intervalo do deslocamento. Sabemos que a fôrça gravitacional é da forma $F = \frac{GMm}{r^2}$. Sabemos que, para pequenos deslocamentos (fôrça constante), a energia potencial gravitacional de um objeto pode ser considerada como $U(h) = U(h_o) + mg(h - h_o)$. Qual é a expressão exata para a energia potencial, que serve para qualquer distância radial r (maior do que o raio da Terra)? Êste problema pode ser resolvido precisamente, pelo emprêgo do cálculo integral. O texto verifica a validade da função escolhida para a energia potencial, mostrando que a fôrça, como uma função inversa do quadrado da distância, pode ser deduzida da função da energia potencial.

Há uma outra maneira conveniente de deduzir a função da energia potencial. Considere um gráfico da fôrça em função da distância radial. F_1 é a fôrça de atração a uma distância r_1, e F_2 é a fôrça de atração a uma distância r_2. Considere a ordenada correspondente a F_1 newtons, como y metros, e a distância na abscissa correspondente a r_1 metros, como x metros.

Logo, a área, xy metros^2, corresponde a $F_1 r_1$ joules.

Agora, construa um segundo gráfico numa escala tal, que a fôrça F_2 seja representada por y metros na ordenada, e a distância r_2 seja representada por x metros na abscissa. Tais gráficos são mostrados abaixo.



No segundo gráfico, o trabalho necessário para mover a massa, de $r = r_2$ a $r = \infty$, é representado pela área hachureada, A;

$$T_2 = \frac{A}{xy} F_2 r_2 \text{ joules.}$$

No primeiro gráfico, o trabalho necessário para transportar a mesma massa, de $r = r_1$ para $r = \infty$, é representado pela área à direita de r_1. Como resultado de nosso processo, esta área é também A m^2 e, portanto, $T_1 = \frac{A}{xy} F_1 r_1$. A diferença na energia potencial do sistema, com a massa em $r = \infty$ e com ela em $r = r_1$, é igual ao trabalho realizado para transportá-la de $r = r_1$ para $r = \infty$. Logo,

$$U_{(\infty)} - U_{(r_1)} = T_1 = \frac{A}{xy} F_1 r_1.$$

Semelhantemente,

$$U_{(\infty)} - U_{(r_2)} = T_2 = \frac{A}{xy} F_2 r_2, \text{ e}$$

$$\frac{U_{(\infty)} - U_{(r_1)}}{U_{(\infty)} - U_{(r_2)}} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{F_1 r_1}{F_2 r_2} =$$

$$= \frac{\frac{GmM}{r_1^2} r_1}{\frac{GmM}{r_2^2} r_2} = \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2}},$$

o que prova que $U_\infty - U_r$ é proporcional a $1/r$.

Para determinar a constante de proporcionalidade, o método usado no texto pode ser empregado. Uma expressão ligeiramente diferente pode ser usada para apresentar a correspondência entre esta expressão exata para a energia potencial e uma aproximada que usamos na superfície da Terra, quando ignoramos a variação da fôrça gravitacional com a distância ao centro da Terra.

O acréscimo na energia potencial, quando um objeto de massa m se move da superfície da Terra ($r = r_o$) para uma altura, h, acima da superfície da Terra ($r_1 = r_o + h$), é:

$$U(r_1) - U(r_o) =$$

$$= \left[U(\infty) - \frac{C}{r_1} \right] - \left[U(\infty) - \frac{C}{r_o} \right] =$$

$$= \frac{C}{r_o} - \frac{C}{r_o + h} = \frac{Ch}{r_o (r_o + h)}.$$

Da Seção 25-3, temos: $U(r_1) - U(r_o) = mgh = \frac{GMm}{r_o^2} h$.

Vemos que os dois resultados concordam, contanto que:

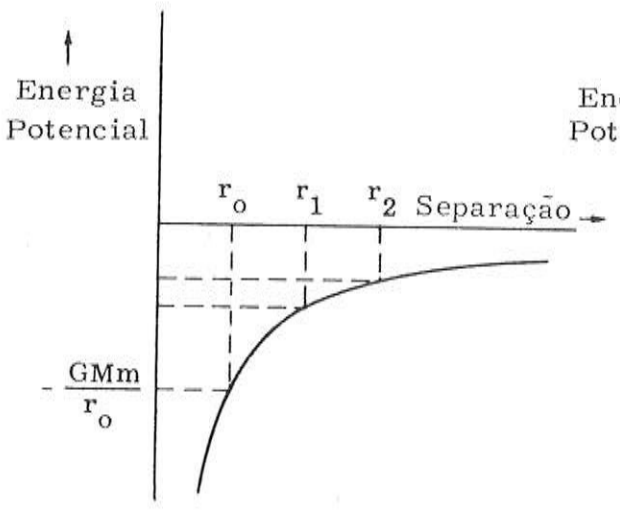
(1) h é muito pequena, quando comparada com o raio da Terra, r_o; logo, $r_o^2 + r_o h \approx r_o^2$.

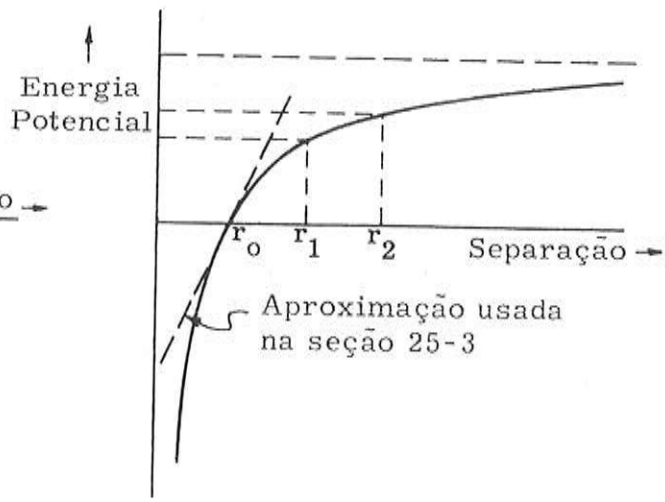
(2) C tem o valor de GMm.

A primeira condição ocorre, porque na Seção 25-3 ignoramos a variação da fôrça $\frac{GMm}{r^2}$ com r, e usamos a aproximação $\frac{GMm}{r^2} \to \frac{GMm}{r_o^2} = mg$.

Não se ressaltou, suficientemente, que a variação da energia potencial, por uma soma ou subtração de uma constante, não faz diferença alguma nos resultados físicos. Por exemplo, na Seção 25-4, considerou-se $U(\infty) = 0$, enquanto na Seção 25-3, considerou-se $U(r_o) = 0$. Posteriormente, $U(\infty) = + \frac{GMm}{r_o}$.

Vale a pena construir os dois gráficos, lado a lado, a fim de mostrar que o deslocamento da curva nos dois não faz diferença.





O acréscimo na energia potencial de r_1 para r_2 é o mesmo nos dois casos. Observamos casualmente que, na aproximação feita na Seção 25-3, substituímos a curva $\left[0 = \frac{GMm}{r_o} - \frac{GMm}{r} \right]$ pela tangente $\left[U = \frac{GMm}{r_o^2} (r - r_o) \right]$.

Para uma extensão desta discussão sôbre a relação entre energia potencial e campos de fôrça, veja o Apêndice 8, onde o caso da mola comprimida é discutido.

COMENTÁRIOS. Ao empregar o conceito de energia, ignoramos muitos detalhes do movimento, uma vez que não nos preocupamos com as fôrças de interação e as acelerações nas diversas partes do sistema, umas em relação às outras. Contudo, ignorando êsses detalhes, conseguimos maior simplicidade na compreensão do que nos é fundamental. O emprêgo das leis da conservação é, freqüentemente, chamado método de integração para resolver os problemas de mecânica. Êste processo relaciona as condições finais às condições iniciais, independentemente da interação envolvida. Assim, por exemplo, sem conhecimento preciso da lei que rege a fôrça nuclear, ainda podemos fazer muitas deduções exatas sôbre os efeitos de uma dada interação.

° ° °

Quando a componente horizontal da velocidade é constante, como no movimento de projéteis, é uma grande tentação pensar na energia associada a uma componente, como sendo distinta da energia associada a outra componente. Por exemplo, a energia total é:

$$E = E_c + U_h = \frac{1}{2} mv^2 + mgy =$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) + mgy$$

No movimento de projéteis, v_x é constante; logo, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} mv_y^2 + mgy = E - \frac{1}{2} mv_x^2 = E',$$

onde E′ é uma nova constante. A altura máxima alcançada pelo projétil pode ser determinada, observando-se que, no tôpo da trajetória, $v_y = 0$; portanto, $y_{max} = E'/mg = (E - 1/2\ mv_x^2)/mg$.

É correto falar da contribuição da componente horizontal da velocidade à energia cinética, mas é incorreto pensar nessa parte da energia como "componente horizontal da energia". Energia é um escalar e não está associada a nenhuma direção. Ela é conservada no total, mas as "partes", associadas às componentes horizontal e vertical do movimento, *não* são conservadas separadamente. Para compreender isto, considere o exemplo de uma bola rolando a partir do repouso, para baixo, num plano inclinado. Apesar da energia potencial útil ser inteiramente causada separação vertical entre a bola e a terra, $1/2\ mv_x^2$ não é uma constante.

° ° °

A fim de avaliar o alcance da informação obtida da conservação da energia, podemos formular a pergunta: Depende a velocidade de escape da direção em que o foguete é lançado? Aplicando o princípio da conservação da energia, concluímos imediatamente que não depende, no caso de uma interação gravitacional. Se tentássemos responder a esta pergunta, aplicando diretamente a lei de Newton, a solução do problema seria muito mais difícil. Acharíamos que três tipos de órbitas, eventualmente, são possíveis: elíptica (incluindo a circular como um caso particular), parabólica e hiperbólica. (O movimento retilíneo é um caso particular do movimento parabólico ou hiperbólico). Órbitas elípticas correspondem a foguetes que não escapam (satélites), órbitas parabólicas a foguetes que escapam com energia mais do que suficiente. O argumento da energia segue um caminho razoàvelmente mais curto. Naturalmente, não obteremos tanta informação, se empregarmos apenas a conservação da energia; conhecemos a velocidade do satélite a uma grande separação, mas não sabemos nada sôbre a órbita real. [Na discussão acima, como também no texto, as órbitas referentes a velocidades de escape são relativas ao centro da Terra, e não relativas à superfície da Terra. Podemos aproveitar o movimento para leste para o lançamento do foguete ($\approx$ 0,5 km/s no Equador), a fim de economizar combustível].

A energia de escape, calculada no texto, fornece a energia cinética que o foguete precisa ter (fora da atmosfera) para escapar. As necessidades de combustível são, naturalmente, muito

maiores; num foguete típico, a maior parte do trabalho efetuado pelo motor do foguete é transformada em energia cinética da exaustão dos gases. Se esta questão fôr levantada, o Problema 27 poderá ser empregado como ilustração.

* * *

O conceito de energia de ligação é usado com freqüência no estudo dos átomos (Seção 34-6). O exemplo apresentado aqui, no qual calculamos a energia que deve ser adicionada a um satélite em órbita circular em tôrno do Sol, tem uma estreita semelhança com o átomo de hidrogênio, onde o elétron se movimenta numa órbita circular em tôrno do próton.

* * *

O Apêndice 9 dêste Guia apresenta os cálculos da velocidade de escape e das energias de ligação, mencionadas na Seção 4 do texto.

Seção 6 — Conservação da Energia Mecânica

FINALIDADE. Ressaltar que os conceitos de energia potencial e energia cinética podem abranger sistemas mecânicos mais complexos, incluindo aquêles em que não temos conhecimento detalhado da natureza das fôrças de interação. Além disso, acreditamos que a energia mecânica é sempre conservada para sistemas em que outras energias não tomam parte.

CONTEÚDO a. A conservação da energia é discutida em têrmos de um brinquedo simples que, no entanto, é um sistema mais complexo do que os que foram prèviamente considerados.

b. A plausibilidade da conservação geral da energia mecânica é discutida.

ÊNFASE. Esta seção constitui um resumo e uma ampliação das idéias já apresentadas. Um tratamento superficial será suficiente. No próximo capítulo, ampliar-se-á o conceito de energia com a consideração do calor.

DESENVOLVIMENTO. O primeiro parágrafo desta seção define a fôrça de interação entre duas massas como sendo newtoniana, contanto que: (1) as massas possam ser consideradas como pontos; (2) a fôrça sôbre uma massa seja igual e oposta à fôrça sôbre a outra; e (3) a direção da fôrça esteja ao longo da linha que une as duas massas pontuais.

Formula-se a questão seguinte: Podem as idéias de energias cinética e potencial ser usadas em sistemas em que as massas não podem ser consideradas como estando concentradas num ponto, ou em sistemas em que as fôrças de interação não são newtonianas? Um exemplo de sistema complexo (um carrossel de brinquedo) é, então, apresentado. Um argumento plausível mostra que a conservação da energia mecânica (exceto para efeitos de atrito) ainda parece ser um conceito válido.

Pode frisar aos alunos que a massa que desce exerce uma fôrça newtoniana sôbre o barbante, e que esta fôrça pode ser considerada como transmitida inteiramente ao redor da polia, à superfície do eixo, através da polia. Porém, a massa do carrossel não parece estar concentrada no eixo de rotação, porque as propriedades da massa inercial de rotação dependem, acentuadamente, do lugar onde a massa está localizada em relação ao eixo. Os alunos, provàvelmente, já tiveram alguma experiência com êste efeito (um patinador, girando ràpidamente, aumenta sua velocidade quando desce os braços, aproximando-os do eixo de rotação; uma pesada roda de giroscópio, etc), mas êles, possìvelmente, nunca tiveram a oportunidade de comparar os efeitos inerciais da rotação de duas rodas de mesma massa, porém, com diferentes distribuições de massas.

Para comparar duas rodas que possuem a mesma massa, faça o seguinte cálculo simples. Considere uma roda de bicicleta e imagine tôda a sua massa distribuída no aro. Substitua o carrossel por esta roda e suponha, agora, que ela gire N vêzes por segundo, num certo instante. A massa M da roda é distribuída uniformemente em tôrno do aro, numa distância de R metros do eixo de rotação. A velocidade de um ponto do aro é, portanto, $2\pi R \times \times N$ m/s, porque, em um segundo, um ponto terá percorrido N voltas em tôrno da circunferência que é $2\pi R$ metros numa volta, ou $2\pi R N$ metros em cada segundo. Agora, considere que a massa do aro seja composta de 1 000 pedaços (ou qualquer número que desejar). Logo, a massa de cada pedaço é M/1 000, e cada pedaço é tão pequeno, que é pràticamente massa pon-

tual. Assim , a energia cinética de cada pedaço é:

$$\frac{1}{2}\,(\text{massa})\,(\text{velocidade})^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M}{1000}\,(2\pi RN)^2.$$

Como a energia cinética é uma quantidade escalar, a energia cinética total da roda é a soma da energia de cada pedaço. Estas energias são tôdas iguais, e há 1 000 pedaços; dêste modo, a energia cinética total da roda é:

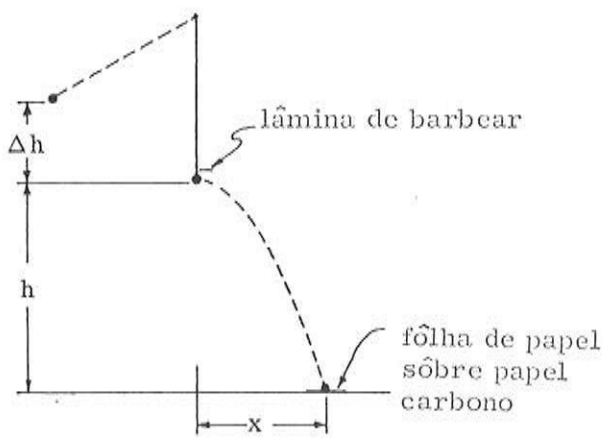
$$\frac{1}{2}\,M\,(2\pi R\,N)^2 \text{ ou } \frac{1}{2}\,M\,R^2\,(2\pi N)^2.$$

Esta expressão mostra que duas rodas de mesma massa M, cada uma realizando N revoluções por segundo, podem ter energia cinéticas bem diferentes, dependendo do fato da massa estar próxima ou afastada do eixo de rotação.

Quando a massa desce uma dada distância, a fôrça de interação gravitacional transfere trabalho ao sistema (a energia potencial do sistema, portanto, diminui) e a energia cinética aumenta de um dado valor. Êste valor é o mesmo, sempre que a massa em queda cair uma mesma distância vertical a partir do repouso. Uma dada energia cinética de rotação da roda pode ser obtida de duas maneiras diferentes. Se R da roda fôr grande, então,, N poderá ser pequeno; se R fôr pequeno, N deverá ser grande. Mas N é a razão com que a roda gira e, assim, é uma medida direta (por meio do eixo de raio r) da velocidade da massa em queda; a velocidade é $2\pi R\,N$ m/s. Isto significa que, após a massa ter caído uma certa altura, estará se movimentando mais ou menos ràpidamente, dependendo de R ser pequeno ou grande. Assim, a roda com uma certa massa acelerará mais vagarosamente, a medida que R aumenta. Uma roda com R grande tem mais dificuldade para começar a girar, do que uma de mesma massa e com R pequeno.

DEMONSTRAÇÃO. Uma experiência interessante, que você pode fazer como demonstração em classe, mostra, primorosamente, a conversão de energia potencial em energia cinética, e envolve algumas técnicas um tanto sutis e simples. Esta demonstração é uma variante da técnica da Experiência III-13, A Energia de um Pêndulo Simples. Se os alunos fizerem esta experiência, tal demonstração não deverá ser apresentada ou feita após a experiência de laboratório, como base para uma recapitulação das idéias do capítulo.

Uma quantidade de energia potencial mensurável é armazenada na massa do pêndulo, quando é deslocado de uma certa distância, acima de sua posição de equilíbrio. Abandona-se a massa do pêndulo. Na parte inferior de sua oscilação, o incremento original de energia potencial converte-se completamente em energia cinética, $1/2\ mv^2$. O movimento é inteiramente horizontal. Se pudéssemos medir esta velocidade horizontal, poderíamos, calcular a energia cinética e verificar o equilíbrio da energia. A fim de medir esta velocidade, a massa do pêndulo deve ser suspensa por um fio leve, e uma gilete pode ser cuidadosa e rìgidamente montada para cortar o fio no momento exato em que atinge a vertical. Assim, a velocidade pode ser calculada, medindo a distância horizontal percorrida pela massa, antes de atingir o chão. Esta distância deve ser dividida pelo tempo de vôo que é determinado, por cálculo, a partir do conhecimento da altura onde se encontra a massa do pêndulo, acima do chão, quando em posição de equilíbrio.



$$U = mg\Delta h$$

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv^2$$

$$v = \frac{x}{t}$$

$$h = \frac{1}{2}\,gt^2,$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

É recomendável experimentar isto antes de fazê-lo em classe. A principal fonte de êrro está na energia que é dissipada ao cortar o fio. Verifique bem se a lâmina está *rìgidamente* montada, e empregue uma massa tão pesada quanto possível. Faça várias medições, usando valôres diferentes de $\triangle h$.

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

A tabela seguinte classifica os problemas de acôrdo com o nível avaliado de dificuldade de cada um dêles e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente adequados para discussão em classe. Os problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*).

Quando fôr feito o Problema 24, deverá ser dado também o Problema 23.

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. (a) Sim. A fôrça de interação depende sòmente da distância de separação.
   (b) 18 joules.
   (c) 0,15 m.
   (d) 1/2.
2. (a) Veja gráfico.
   (b) 0,5 joules; 5,5 joules.
   (c) Veja discussão.
3. (a) 0,5 joules.
   (b) 0,5 joules.
   (c) 0,3 joules.
4. Veja discussão.
5. (a) 18 joules.
   (b) Calor.
   (c) O gráfico (a) se ajusta melhor. Veja discussão.
6. (a) 100 nt/m.
   (b) $U = 50\ x^2$ joules.
7. (a) Veja gráfico.
   (b) Não exatamente linear.
8. (a) 1:2.
   (b) 4 vêzes mais alto.
9. Veja discussão.
10. Veja discussão.
11. (a) 1,0 m/s.
    (b) 0,8 m/s.
12. (a) 1,00 kg m/s.
    (b) 0,500 kg m/s.
    2,00 kg m/s.
    4,00 kg m/s.
    (c) 1,00 joule.
13. (a) 1,5 joules.
    (b) 0,4 joules.
    (c) 1,1 joules.
    (d) 1,1 joules.
    (e) 0,4 joules.
14. 18 joules; 9 joules.
15. (a) Altura vertical = 0,20 m, distância no aclive = 0,29 m; move-se como

Seção	Fácil	Médio	Difícil	Discussão de classe
1	2, 12*	1, 3*, 5, 6, 7, 8*, 10	4, 11	4, 9, 10
2		13	14	13
3	15, 19, 20	17	16*, 18, 19	15, 16, 19, 20
4	23	22, 25, 27	21, 24	23
5	26			26

se estivesse recuando, após uma colisão.

(b) Oscilatório; alturas iguais, à direita e à esquerda; 1,2 joules.

(c) –0,5 joules.

16. (a) 0,15 acima do ponto de equilíbrio (0,3 m acima do ponto de partida).
(b) ± 1,1 m/s.
(c) Não há variação.

17. (a) 79,2 joules.
(b) 79,2 joules.
(c) 22,3 m/s.

18. (a) Quase 1.
(b) E_e' (m_2) é desprezível, comparado com E'_e (m_1).
(c) Sim.

19. Veja discussão.

20. Veja discussão.

21. Veja discussão.

22. (a) $4{,}4 \times 10^{9}$ joules.
(b) $3{,}9 \times 10^{28}$ joules.

23. Aumenta.

24. (a) $0{,}575 \times 10^{-18}$ joules.
(b) $1{,}13 \times 10^{6}$ m/s.

25. $2{,}3 \times 10^{-18}$ joules.

26. Veja discussão.

27. 0,0037 para uma velocidade de exaustão de 2 km/s.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

Um objeto de massa 4,0 kg escorrega com velocidade de 3,0 m/s sôbre uma tábua horizontal sem atrito, e choca-se com um amortecedor de mola de tipo muito especial que exerce a fôrça constante de 120 newtons sôbre o objeto, enquanto a mola é comprimida e a mesma fôrça, enquanto a mola se distende até retornar à posição inicial.

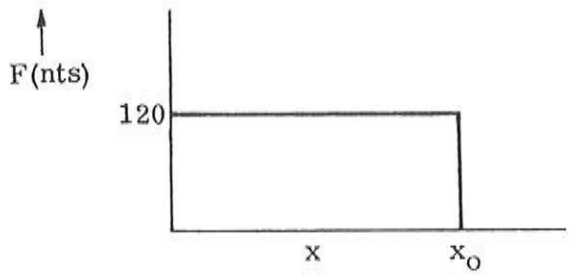
(a) É elástica esta colisão? Por que?

(b) Qual é a energia cinética, no início da interação?

(c) De quanto foi comprimida a mola?

(d) Qual é a razão da energia cinética para a energia potencial, quando a mola está comprimida de 10 cm?

Podemos fazer um gráfico simples da fôrça exercida pelo amortecedor, em função da distância de compressão:



a) *A colisão é elástica,* porque a fôrça depende sòmente da distância. Esta função é a forma mais simples da relação fôrça-distância, mas não é comumente encontrada. Qualquer que seja o trabalho realizado na mola, *por* um objeto que se aproxima, $F\triangle x$, é restituído pela mola, quando o objeto recua. Assim, nenhuma energia cinética é perdida, pois, na interação global, nenhuma energia é transferida à mola.

b) A energia cinética, no início da interação, é:

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} \times 4{,}0 \text{ kg} \times \left(\frac{3{,}0 \text{ m}}{\text{s}}\right)^2 =$$

$= 18$ joules.

c) A compressão da "mola" continuará, até que não haja mais energia de movimento — isto é, não haja mais energia cinética. A energia cinética é reduzida a zero, quando a velocidade da massa é zero. A energia cinética original da massa, então, foi transferida à mola, sob a forma de energia potencial. O trabalho realizado em comprimir a mola é a fôrça constante, F, multiplicada pela distância de compressão $\triangle x$. Êste trabalho efetuado sôbre a mola é armazenado como energia potencial; assim, no instante em que a mola pára, a energia cinética inicial de (b) é igual à energia potencial armazenada (120 nt) × (x metros).

$$120x \times \text{nt-m} = 18 \text{ joules}$$

$$x = \frac{18 \text{ m}}{120} = 0{,}15 \text{ m}.$$

d) Quando a mola está comprimida 10 cm, a energia potencial aumenta de zero a 120 × 0,10 joules = 12 joules. Tal aumento se deve à energia cinética do movimento (a massa está freiando), e a massa perdeu 12 joules de energia cinética. Tem, ainda, 18 — 12 = 6 joules de energia cinética. A razão entre a energia cinética e a potencial é de 6 para 12, isto é, a energia cinética é a metade da energia potencial, neste instante da interação.

PROBLEMA 2

Um objeto de massa 3,0 kg move-se com velocidade de 2,0 m/s e colide com um amortecedor de mola que exerce a fôrça $F = 100$ x, sendo F a fôrça em newtons e x a compressão em metros.

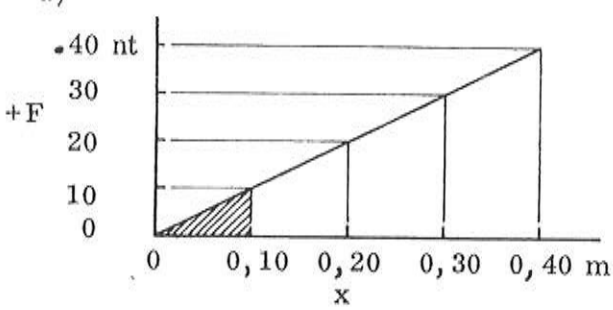
(a) Faça um gráfico de F em função de x, desde $x = 0$ até $x = 0{,}40$ m.

(b) Qual a energia potencial armazenada na mola, quando $x = 0{,}10$ m? Qual a energia cinética da massa nesse ponto?

(c) O que acontecerá se a mola fôr comprimida 0,10 m com a mão e, a seguir, colocarmos em contato com ela a massa de 3,0 kg e retirarmos a mão?

Êste problema é semelhante ao Problema 1. O princípio de conservação da energia é aplicado, a fim de obter as energias cinética e potencial, numa fase intermediária da interação.

a)



b) O trabalho efetuado por um agente externo na compressão da mola, numa distância de 0,10 m, é a área hachureada sob a curva fôrça-compressão, apresentada na parte (a). O trabalho realizado pela massa, ao mover-se de x = 0 para x = 0,10 m, é, portanto:

$$T = \frac{1}{2} \times 10 \text{ newtons} \times 0{,}10 \text{ m} = 0{,}5 \text{ joules.}$$

A energia potencial armazenada na mola é idêntica à quantidade de trabalho realizado sôbre a mola, 0,5 joules. A energia cinética inicial da massa em movimento era:

$$E_c = \frac{1}{2} \times 3{,}0 \text{ kg} \times (2{,}0 \text{ m/s}^2) = 6{,}0 \text{ joules.}$$

O acréscimo na energia potencial ocorre às expensas da perda da energia cinética da massa. Portanto, a energia cinética deve decrescer de 0,5 joules, que corresponde ao acréscimo da energia potencial. Por isso, para x = 0,10 m, a energia cinética da massa é 6,0 — 0,5 = 5,5 joules.

c) O trabalho efetuado, ao comprimir a mola 0,10 m, é idêntico ao realizado por uma massa em movimento ou pela mão:

$$T = \frac{1}{2} \times 10 \text{ newtons} \times 0{,}10 \text{ m} = 0{,}5 \text{ joules.}$$

Neste ponto, a energia potencial da mola aumentou de 0 para 0,5 joules. Esta energia está disponível para acelerar a massa, quando a mão é retirada. Ainda que a aceleração resultante seja causada por uma fôrça não constante, a solução do problema em relação ao movimento é fácil com a aplicação da conservação da energia. Quando a mola tiver retornado à sua posição normal, a interação termina e a transferência de energia potencial para energia cinética se completa. Por isso, aqui, a energia cinética é igual a $1/2\ mv^2 = 0{,}5$ joules.

PROBLEMA 3

A curva fôrça-compressão de certa mola está traçada na Fig. 25-16.

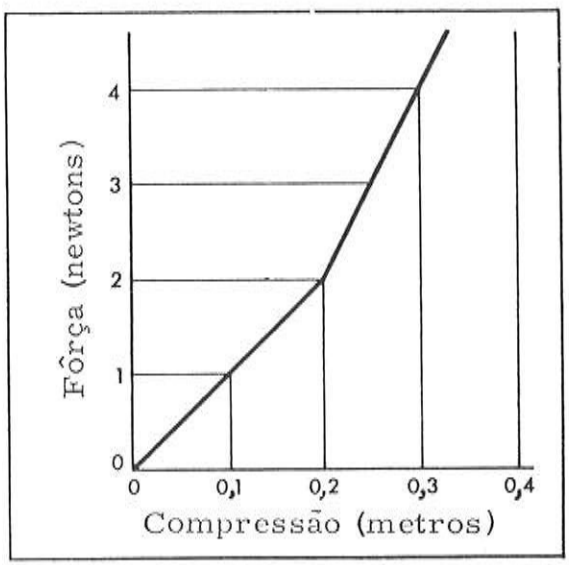
(a) Que trabalho é necessário para comprimir a mola de 0,3 m?

(b) Qual a energia potencial da mola, quando comprimida dessa distância?

(c) Coloque um objeto de massa 2 kg em repouso encostado na mola, quando ela estiver comprimida de 0,3 m, e solte-a. Qual a energia cinética da massa, ao passar pelo ponto onde a compressão da mola é de 0,2 m?

Êste problema é conceitualmente idêntico ao Problema 2, mas envolve uma curva de fôrça não linear.

a) O trabalho efetuado na compressão da mola é a área sob a curva fôrça-distância. Neste caso, entre 0 e 0,3 m, a área total sob a curva será a soma da área de um triângulo e a área de um trapezóide, se esta figura fôr cortada em duas partes, verticalmente, no ponto 0,2 m.



Área do triângulo $= \frac{1}{2}$ (2 newtons) (0,2 m) $=$ $= 0{,}2$ newton metros ou joules.

Área do trapezóide $= \frac{1}{2}$ (2 nt + 4 nt) (0,1 m) $=$ $= 0{,}3$ nt-m ou joules.

Soma $= 0{,}5$ joules $=$ trabalho de compressão.

b) A energia potencial da mola $=$ trabalho efetuado pela fôrça aplicada $= 0{,}5$ joules (do resultado anterior).

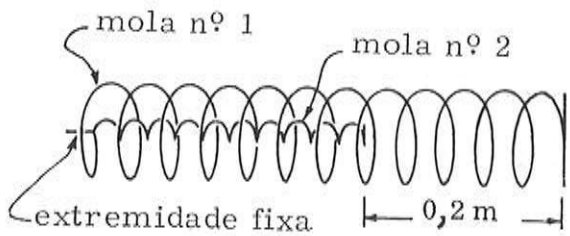
c) O acréscimo na energia cinética é igual ao decréscimo da energia potencial, e esta é a área sob a curva fôrça-distância de $x = 0{,}3$ para $x = 0{,}2$ m. Esta área é justamente a área do trapezóide, encontrada na parte (a) como sendo 0,3 joules. Portanto:

$\frac{1}{2} mv^2 = 0{,}3$ joules $=$ ganho em energia cinética.

PROBLEMA 4

Suponha que lhe sejam dadas duas molas de tamanhos diferentes. Como você as colocaria, para que a curva fôrça-compressão fôsse esmelhante a da Fig. 25-16?

Êste problema é um desafio para o aluno com dons para inventar dispositivos mecânicos. A fim de conseguir uma modificação na inclinação a 0,2 metros, na curva fôrça-compressão, deve haver uma modificação na constante de fôrça da mola, no ponto de compressão a 0,2 metros. Há diversas formas de se conseguir isto. Uma delas é montar duas molas, de tal modo, que a extremidade móvel de uma esteja 0,2 metros atrás da extremidade móvel da outra. Se as molas possuem diâmetros diferentes, uma pode ser colocada dentro da outra, conforme a figura abaixo.



Quando um objeto comprime a mola pela extremidade direita, entra primeiramente em contato com a mola 1. Êste objeto fica sujeito à fôrça $F_1 = k_1 x$, até que comprima a mola 1 de 0,2 metros. Pelo gráfico, podemos ver que, quando $F_1 = 2$ newtons, $x = 0{,}2$ metros; portanto, $k_1 = 10$ nt/m. No ponto $x = 0{,}2$ m, o objeto entra em contato com a mola 2. Daí por diante, fica sob a ação da fôrça $F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 (x - 0{,}2) = (k_1 + k_2)(x - 0{,}2) + 0{,}2 k_1 = 0{,}2 k_1 + (k_1 + k_2) \Delta x$, onde Δx representa a compressão além do ponto onde $x = 0{,}2$ metros. Do gráfico, a inclinação da reta para $x > 0{,}2$ é $\Delta F / \Delta x = \frac{4-2}{0{,}3-0{,}2} = 20$ newtons/metro $= k_1 + k_2$. Logo, k_2 também tem o valor de 10 newtons/metro.

PROBLEMA 5

Um objeto de 1,0 kg move-se com velocidade de 10 m/s e atinge uma mola, compri-

mindo-a de 0,20 m. Quando, a seguir, a mola empurra o objeto, êste sai com a velocidade de 8,0 m/s.

(a) Qual a perda de energia cinética da massa?

(b) Que acontece a essa energia perdida?

(c) Na sua opinião, qual das curvas fôrça-compressão da Fig. 25-17 representa melhor o comportamento desta mola?

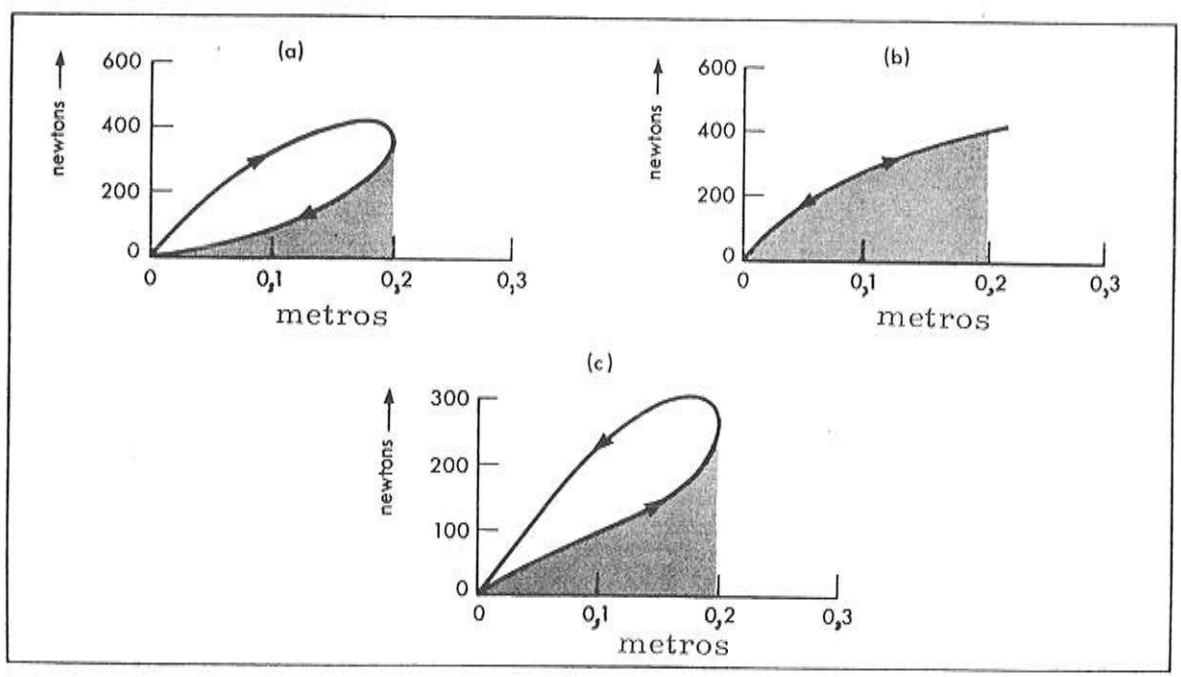
a) $(E_c)_i = \frac{1}{2}\ mv_i^2 = \frac{1}{2}\ 1\ (10)^2 =$
$= 50$ newton-metros.

$(E_c)_f = \frac{1}{2}\ mv_f^2 = \frac{1}{2}\ 1\ (8{,}0)^2 =$
$= 32$ newton-metros.

$\triangle E_c = 50 - 32 = 18$ newton-metros ou joules.

b) À medida que a massa é levada ao repouso, ela vai comprimindo a mola, efetuando trabalho igual à sua perda de energia cinética (50 joules). No retôrno a mola transfere, de volta à massa, sòmente 32 joules. Ainda que não possamos dizer com segurança o que aconteceu à energia "perdida", uma possibilidade é de que a energia mecânica tenha se transformado em calor, durante a deformação da mola. Outra possibilidade é de que o calor tenha sido gerado pelo atrito da massa deslizando ao longo da superfície.

c) Qualitativamente, o gráfico (a) está de acôrdo com os dados; a área sob a curva superior (compressão variando de 0 a 0,2 m) é maior do que a área sob a curva inferior (compressão variando de 0,2 a 0 m). A primeira área é igual ao trabalho transferido à mola durante a compressão, e a segunda área é igual ao trabalho restituído pela mola, durante a sua expansão ao retornar a seu comprimento normal. A área limitada pela curva superior deve ser igual ao trabalho (50 joules) necessário para freiar totalmente a massa, inicialmente movendo-se a 10 m/s; e a área limitada pela curva inferior deve ser igual ao trabalho (32 joules) necessário para acelerar a massa a 8,0 m/s, a partir do repouso. No gráfico (a), a primeira área é aproximadamente 50 joules, e a segunda área é aproximadamente 30 joules. A curva (b) representa um caso em que o trabalho forne-



cido é igual à energia restituída. A curva (c) representa um caso em que mais energia é retirada do que fornecida. Nenhuma destas situações corresponde à realidade dêste problema.

PROBLEMA 6

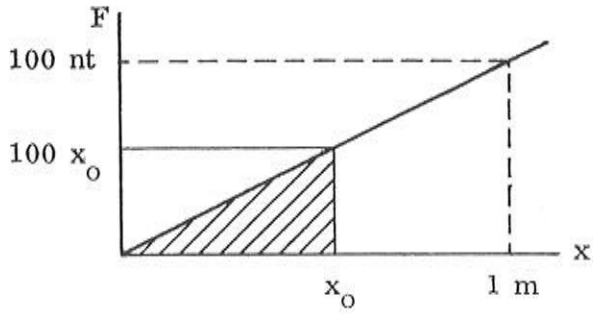
Uma mola elástica linear é comprimida de 0,2 m por uma fôrça de 20 newtons.

(a) Qual é a constante de fôrça k (ou razão fôrça-compressão) da mola?

(b) Qual é a equação da energia potencial armazenada pela mola como função de sua compressão?

a) A mola é elástica e linear. Portanto, $F = kx$ relaciona a intensidade da fôrça à compressão. Assim, $k = F/x$; em particular, $k = \frac{20\text{ nt}}{0{,}2\text{ m}} = 100$ nt/m.

b) Se construímos um gráfico de F em função de x, vemos, de $F = 100\ x$, que a área do triângulo de base x_o é $1/2 \times x_o \times 100\ x_o = 50\ x_o^2$ joules. Êste é o trabalho que se deve realizar, a fim de comprimir a mola e, portanto, é também a energia potencial. Por isso, $U = 50\ x^2$, onde x é a compressão medida em metros e U em joules.



PROBLEMA 7

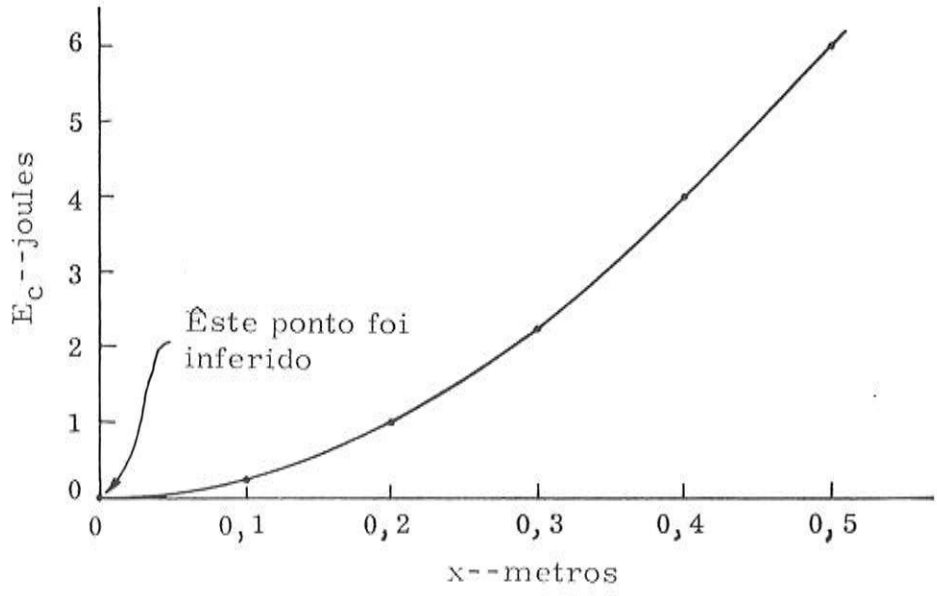
A tabela seguinte dá a energia cinética E_c de um objeto de massa 2,0 kg, quando êle se destacada de uma mola comprimida a diversas distâncias x.

x (metros)	E_c (joules)
0,1	0,25
0,2	1,00
0,3	2,25
0,4	4,00
0,5	6,00

(a) Faça um gráfico da energia potencial da mola em função da compressão x.

(b) Exerce a mola uma fôrça restauradora linear?

a)



Está representada no gráfico a energia cinética final, E_c, da massa em função da distância de compressão, x, antes da massa destacar-se da mola. Se considerarmos que não ocorreram perdas durante a expansão da mola, então, a energia potencial inicial da mola é exatamente igual a E_c, a energia cinética final da massa. Neste caso, o gráfico acima é também o gráfico da energia potencial. (Se houvesse perdas devido ao atrito, o problema ficaria indeterminado).

b) Conforme foi vista no Problema 6, a energia potencial da mola varia com o quadrado da compressão, x. Se $F = kx$, energia potencial $= E_c = \frac{1}{2} kx^2$, e $\frac{2E_c}{x^2} = k$.

Calculemos, em seguida, $\frac{2E_c}{x^2}$. Esperamos que, se a mola exerce uma fôrça restauradora linear, esta quantidade permaneça constante.

x	x^2	E_c	$2E_c/x^2$
0,1	0,01	0,25	50
0,2	0,04	1,00	50
0,3	0,09	2,25	50
0,4	0,16	4,00	50
0,5	0,25	6,00	48

Vemos que a mola exerce uma fôrça restauradora linear na maior parte do intervalo considerado, mas o último ponto apresenta um ligeiro desvio. Isto pode indicar que, a uma compressão de 0,5 m, a mola sofreu uma deformação permanente.

PROBLEMA 8

Suponha que a corda de um arco atue como uma mola linear.

(a) Compare a velocidade inicial adquirida pela flecha, quando a corda é puxada 10 cm para trás, com a velocidade adquirida quando a corda é puxada de 20 cm.

(b) Quantas vêzes mais alto o arqueiro pode lançar a flecha, no segundo caso?

a) Enquanto o arqueiro puxa a corda para trás, exerce uma fôrça de intensidade $F = kx$. Isto fornece a curva linear fôrça-deslocamento, e a área sob essa curva é: $A = 1/2\ kx^2$. Isto corresponde ao trabalho que deve ser realizado, a fim de produzir o deslocamento x. Portanto, representa a energia potencial, armazenada no sistema com distorção, e, assim, representa também a energia cinética $1/2\ mv^2$ que pode ser transferida a uma flecha, quando se solta a corda.

$$T = U = E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kx^2.$$

Logo, v é proporcional ao deslocamento inicial. Se x aumentar de 10 cm para 20 cm, a velocidade resultante da flecha duplicará.

b) Se a flecha fôr atirada verticalmente, para cima, sua energia cinética inicial, $1/2\ mv^2$, diminuirá, enquanto o trabalho fôr realizado contra a fôrça gravitacional. A medida dêste trabalho é fôrça $\times$ distância $= mgh$; portanto:

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgh_{max}.$$

Assim, a altura que a flecha pode alcançar é proporcional a x^2. Quando o arqueiro dobrar seu puxão inicial para trás, êle aumentará quatro vêzes a altura a ser atingida pela flecha.

PROBLEMA 9

A Fig. 25-18 mostra um patim de rodas sôbre o qual se colocou um objeto de massa *M*, montado sôbre uma base por meio de quatro lâminas de serra. A massa *M* é igual à da base mais a do patim. Se você segura o patim e puxa a massa *M* para a esquerda, abandonando então o sistema, a massa se move para a direita e o patim para esquerda. Prepare-se para descrever o movimento ulterior, indicando as formas da energia nas várias fases.

Para a resolução dêste problema, suponhamos todos os movimentos sem atrito, e que todo o sistema esteja em repouso, no instante em que soltamos a massa. Como nenhuma fôrça externa atua sôbre o sistema massa-patim, de acôrdo com a conservação da quantidade de movimento, o centro de massa deve permanecer em repouso. O movimento do sistema consistirá em oscilações para a frente e para trás de suas massas superior e inferior, uma delas sempre se movendo em sentido oposto ao da outra. A ener-

gia potencial inicial, armazenada nas lâminas encurvadas, é transformada em energia cinética de movimento das partes. Quando as lâminas estão na vertical, a energia potencial é zero, e tôda a energia está nas velocidades iguais das duas massas, $E_c = 2 \times 1/2\ mv^2$. Quando as lâminas estiverem com a máxima deformação, o movimento das massas será zero, e a energia total do sistema estará, nesse momento, em forma de energia potencial.

Se descrevermos o movimento mais precisamente, podemos levar em consideração o movimento vertical da massa superior, enquanto as lâminas descrevem um arco. Êste movimento para cima e para baixo "estica" e "relaxa" a "mola", no campo gravitacional. Entretanto, na posição não encurvada das lâminas de serra onde é máxima a energia cinética, a energia potencial gravitacional também é máxima. Assim, a energia útil do sistema nunca é inteiramente cinética. Há sempre alguma quantidade de energia potencial, armazenada sob a forma de energia potencial da lâmina, ou energia potencial gravitacional.

Se considerarmos o atrito, a energia transformar-se-á gradualmente em calor, e o movimento cessará. Levando-se em conta o atrito de rolamento sôbre a superfície, uma fôrça externa atuará sôbre o sistema massa-patim, e o seu centro de massa também descreverá um movimento oscilatório amortecido para a frente e para trás, ao invés de permanecer estacionário, como foi descrito.

PROBLEMA 10

O que acontecerá se a massa de 3,0 kg do Problema 2 prender-se à mola, e, assim; permanecer?

Se a massa permanecer prêsa à mola, oscilará para a frente e para trás, com um movimento harmônico simples.

Podemos obter a amplitude da oscilação, aplicando a conservação da energia. Exatamente quando a massa atinge a mola (prende-se), sua energia é ùnicamente a energia cinética $1/2\ mv^2 = 1/2\ (3,0)\ (2,0)^2\ \frac{kg\ m^2}{s^2} = 6,0$ joules. Na máxima compressão (ou distensão) da mola, a energia é inteiramente potencial, $U = 1/2\ kx^2 = 6,0$ joules. Como $k = 100\ \frac{newton}{metro}$, obtemos:

$$x^2 = \frac{2U}{k} = \frac{2 \times 6,0\ newton\text{-}metros}{100\ \frac{newton}{metro}} = 0,12\ m^2.$$

$$x = \pm \sqrt{0,12\ m^2} = \pm\ 0,35\ metros.$$

A massa oscila de um lado para outro, de 0,35 metros para a direita a 0,35 metros para a esquerda, da posição de equilíbrio. Podemos, também, obter o período do movimento oscilatório, empregando o resultado da Seção 2.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{3,0\ kg}{100\ nt\text{-}m}} =$$

$= 1,1$ segundos.

PROBLEMA 11

Um objeto de massa 0,50 kg, que escorrega livremente sôbre uma mesa, é ligado a uma mola linear cuja constante de fôrça é $k = 50$ newtons/m. A massa é puxada e abandonada, vibrando com uma amplitude de 0,10 m.

(a) Qual é a velocidade máxima?

(b) Qual a velocidade a 0,06 m da posição de equilíbrio?

a) Neste caso em que a massa oscila na extremidade de uma mola, devemos considerar tanto a energia potencial como a energia cinética. Como a energia total, E, é constante, podemos escrever:

$$E = E_c + U.$$

A energia potencial de uma mola, comprimida de um valor x, é $1/2\ kx^2$, onde k é a razão da fôrça pelo alongamento. A energia cinética é $1/2\ mv^2$. Logo, $E = 1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2$.

No ponto onde a massa pára e inverte o seu movimento, a energia cinética é zero, porque a velocidade é zero e a energia potencial é máxima, porque a massa atingiu seu deslocamento máximo, x_o, da posição de equilíbrio. Portanto, quando $x = +x_o$ ou quando $x = -x_o$, a energia cinética, E_c, é zero, e a energia total é dada por:

$$E = 1/2\ kx_o^2.$$

Anàlogamente, quando $x = 0$, a energia potencial é zero, e v está no seu valor máximo, v_o. Neste ponto, a energia total é dada por:

$$E = 1/2\ mv_o^2.$$

Como E é uma constante,

$$1/2\ mv_o^2 = 1/2\ kx_o^2, \text{ e}$$

$$v_o = x_o \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Substituindo, $x_o = 0{,}10$ m, $k = 50$ nt/m, e $m = 0{,}50$ kg,

$$v_o = 0{,}10 \sqrt{\frac{50}{0{,}50}} = 0{,}10 \times \sqrt{100} = 1{,}0 \text{ m/s}.$$

b) Em geral, $E = 1/2\ mv^2 + 1/2\ kx^2 = 1/2\ kx_o^2$.

Portanto, $v^2 = \dfrac{kx_o^2 - kx^2}{m}$ e

$$v = \sqrt{\frac{k\,(x_o^2 - x^2)}{m}}.$$

Substituindo $x = 0{,}06$ m, e os outros valôres dados,

$$v = \sqrt{\frac{k\,(x_o^2 - x^2)}{m}} = \sqrt{\frac{k\,(x_o - x)\,(x_o + x)}{m}} =$$

$$= \sqrt{\frac{50\,(0{,}10 - 0{,}06)\,(0{,}10 + 0{,}06)}{0{,}50}} =$$

$$= \sqrt{100 \times 0{,}04 \times 0{,}16} = 10 \times 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}8 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 12

Um amortecedor de mola, cuja fôrça restauradora é $F = 200x$, sendo F em newtons e x em metros, é comprimido de 0,100 m. Um objeto de 0,500 kg é colocado próximo ao extremo da mola, e o sistema abandonado.

(a) Qual a quantidade de movimento da massa, no momento em que ela deixa de estar em contacto com a mola?

(b) Repetimos a experiência com massas de 0,125 kg, 2,00 kg e 8,00 kg. Qual a quantidade de movimento de cada uma, ao afastar-se da mola?

(c) Qual a energia de cada massa, ao abandonar a mola?

a) No ponto de compressão máxima, tôda a energia é potencial, $U = 1/2\ kx_o^2$. Quando o sistema é abandonado, a massa é acelerada até que a mola atinja a posição de equilíbrio. Neste ponto, tôda a energia é cinética e a massa se separa da mola. Então, $E = (E_c)_o = 1/2\ mv_o^2$. Como a energia total é constante, $1/2\ mv_o^2 = 1/2\ kx_o^2$, e

$$v_o = x_o \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

A quantidade de movimento da massa de 0,500 kg é, portanto:

$$m v_o = x_o \sqrt{km}$$

$$= 0{,}100 \times \sqrt{200 \text{ nt/m} \times 0{,}500 \text{ kg}}$$

$$= 1{,}00 \text{ kg-m/s}.$$

b) Para uma massa de 0,125 kg,

$$m v_o = x_o \sqrt{km} = 0{,}100 \times \sqrt{200 \times 0{,}125} = 0{,}500 \text{ kg m/s}.$$

Para uma massa de 2,00 kg,

$$m v_o = x_o \sqrt{km} = 0{,}100 \times \sqrt{200 \times 2{,}00} = 2{,}00 \text{ kg m/s}.$$

Para uma massa de 8,00 kg,

$$m v_o = x_o \sqrt{km} = 0{,}100 \times \sqrt{200 \times 8{,}00} = 4{,}00 \text{ kg m/s}.$$

c) Uma vez que a energia potencial original é a mesma, indiferentemente da massa posta em movimento pela mola, a energia cinética é a mesma para cada massa:

$$(E_c)_o = 1/2\, kx_o^2 = 1/2 \times 200 \times 0{,}100^2 = 1{,}00 \text{ joule}.$$

Portanto, quando uma quantidade fixa de energia é transferida a objetos de massas diferentes, as quantidades de movimento resultantes não são as mesmas, mas variam proporcionalmente com a raiz quadrada das massas.

PROBLEMA 13

A Fig. 25-19 é o gráfico dos deslocamentos como função do tempo, para duas massas que interagem: $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 1$ kg.

(a) Qual a energia cinética inicial de m_1?
(b) Qual a energia cinética final de m_1?
(c) Qual a energia cinética final de m_2?
(d) Qual a energia cinética total mínima?
(e) Qual a energia potencial máxima?

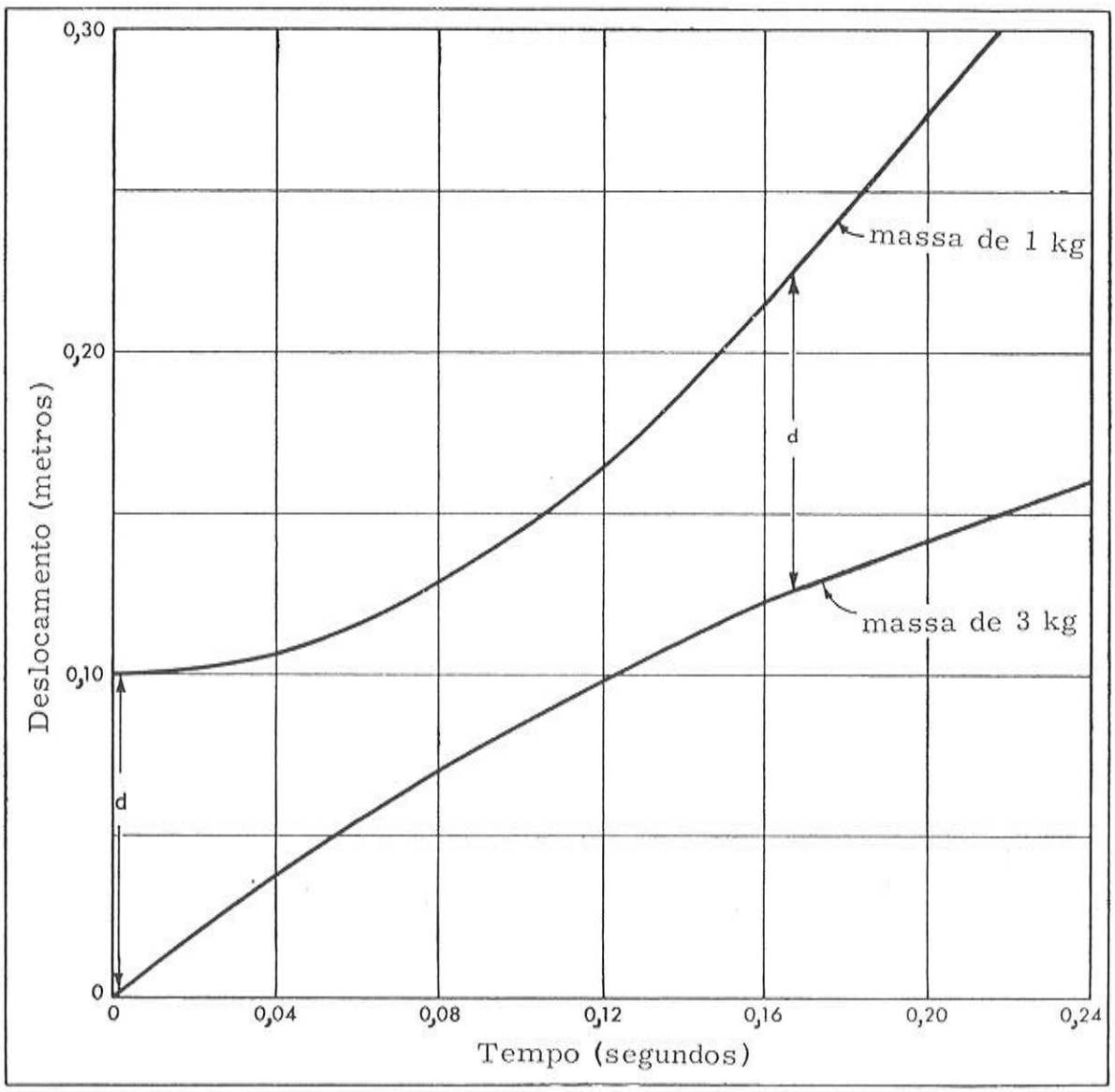
A fim de calcular as várias energias cinéticas, podemos medir as velocidades (inclinações) da curva deslocamento-tempo apropriada, nos instantes convenientes. Para fazer isto, trace tangentes às curvas deslocamento-tempo e calcule a razão $\triangle s/\triangle t$ da tangente.

$$\text{a)}\quad v_1 = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{(0{,}2 - 0{,}0)\,\text{m}}{(0{,}2 - 0{,}0)\,\text{s}} = 1{,}0\ \text{m/s},$$

para $t = 0$ segundo.

A E_c inicial de m_1 é:

$1/2\, m_1 v_1^2 = 1/2\,(3\,\text{kg})\,(1{,}0\,\text{m/s})^2 = 1{,}5$ joules.



b) $v_1 = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{0{,}14 - 0{,}04}{0{,}2 - 0{,}0} \frac{m}{s} = 0{,}5 \frac{m}{s}$

para $t > 0{,}2$ segundos.

A E_c final de m_1 é:

$1/2\, m_1 v_1^2 = 1/2\ (3\ kg)\ (0{,}5\ m/s)^2 = 0{,}4$ joules.

c) $v_2 = \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{0{,}28 - 0{,}04}{0{,}20 - 0{,}04} \frac{m}{s} = 1{,}5 \frac{m}{s}$

para $t > 0{,}2$ segundos.

A E_c final de m_2 é:

$1/2\ m_2 v_2^2 = 1/2\ (1\ kg)\ (1{,}5\ m/s)^2 = 1{,}1$ joules.

Observe que a energia é conservada na interação. Antes do início da interação:

$$(E_c)_1 + (E_c)_2 = 1{,}5 + 0{,}0 = 1{,}5 \text{ joules.}$$

Após terminada a interação:

$$(E_c)_1 + (E_c)_2 = 0{,}4 + 1{,}1 = 1{,}5 \text{ joules.}$$

d) A energia cinética é mínima, e a energia potencial é máxima, quando a separação é mínima. Movendo uma tira de papel ao longo das duas curvas, verifica-se que a distância $s_2 - s_1$ é mínima, quando $t = 0{,}09$ segundos. Nesse instante, a velocidade relativa é zero, isto é, as massas têm igual velocidade. Para uma comprovação, as duas inclinações podem ser medidas:

$v_1 = \frac{\triangle s_1}{\triangle t} = \frac{0{,}22 - 0{,}07}{0{,}20 - 0{,}00} \frac{m}{s} = 0{,}75$ m/s para $t = 0{,}09$ s.

$v_2 = \frac{\triangle s_2}{\triangle t} = \frac{0{,}16 - 0{,}01}{0{,}20 - 0{,}00} \frac{m}{s} = 0{,}75$ m/s para $t = 0{,}09$ s.

Neste momento, a energia cinética é:

$1/2\, m_1 v_1^2 + 1/2\, m_2 v_2^2 = 1/2\ (m_1 + m_2) v^2 = 1/2\ (3 + 1)\ (0{,}75)^2 = 1{,}1$ joules.

e) A energia total é igual à energia cinética inicial (ou final), se consideramos a energia potencial como sendo zero, a uma separaçã maior do que o intervalo d da interação. A ener gia total é, portanto, 1,5 joules. Para t = 0,0 segundos, a energia cinética era 1,1 joules. Logo a energia potencial, neste instante, deve te sido:

$U = E - E_c = 1{,}5$ joules $- 1{,}1$ joules $= 0{,}4$ joules.

Nota: Duas curvas similares as da Figur 25-19 podem ser obtidas, empregando-se o carrinhos com molas aparadoras cuja montagen é descrita na Experiência III-14.

PROBLEMA 14

Duas massas $m_1 = 1{,}0$ kg e $m_2 = 2{,}0$ kg são empurradas uma para perto da outra contra uma fôrça de interação elástica, até que sua energia potencial seja 27 joules maior do que quando as massas se encontram fora do intervalo de interação. Se elas fôrem abandonadas, qual será a energia cinética final de cada uma?

A conservação de energia determina que a energia cinética final deve ser igual à energia potencial inicial:

$$(E_c)_{inicial} + (U)_{inicial} = (E_c)_{final} + (U)_{final}$$

$$0 + 27 \text{ joules} = (E_c)_{final} + 0.$$

Portanto, $1/2\ m_1 v_1^2 + 1/2\ m_2 v_2^2 = 27$ joules.

Para determinar como a energia cinética se distribuirá entre as duas massas, precisamos aplicar o princípio da conservação da quantidade de movimento. Como nenhuma outra fôrça age sôbre m_1 e m_2, além das fôrças de interação mútua, a quantidade de movimento total não varia. Uma vez que ambas as massas estão inicialmente em repouso, a quantidade de movimento, no início, é zero e permanece zero, posteriormente.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 = - m_2 v_2.$$

(O sinal *menos* significa que se deslocam em sentidos opostos). Conhecendo a igualdade na

intensidade das quantidades de movimento, estamos aptos a determinar a razão das energias cinéticas:

$$\frac{(E_c)_1}{(E_c)_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $m_1 m_2$, temos:

$$\frac{m_2 (m_1 v_1)^2}{m_1 (m_2 v_2)^2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Substituindo os valôres de m_1 e m_2, obtemos:

$$\frac{(E_c)_1}{(E_c)_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{2,0}{1,0} = 2,0$$

$E_c = (E_c)_1 + (E_c)_2 = 2 (E_c)_2 + (E_c)_2 = 3 (E_c)_2$.

Portanto, $(E_c)_2 = \frac{27 \text{ joules}}{3} = 9$ joules, e

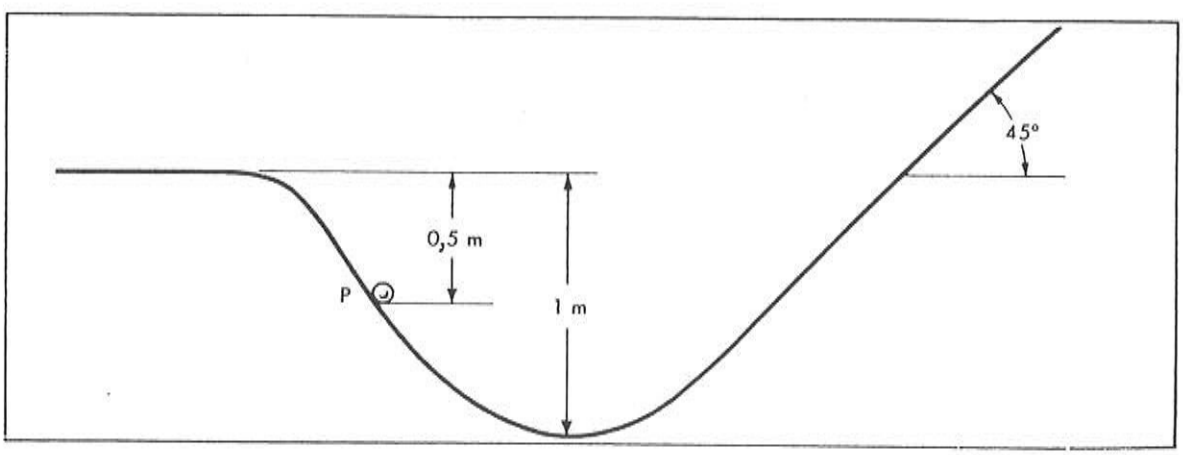
$(E_c)_1 = 27$ joules $- 9$ joules $= 18$ joules.

PROBLEMA 15

(a) Uma bola de massa 0,25 kg é atirada da esquerda para a direita, sôbre a superfície sem atrito indicada na Fig. 25-20, com velocidade de 2,0 m/s. A que altura ela subirá no aclive à direita, antes de deter-se momentâneamente? Que espécie de movimento ela realiza?

(b) Se a bola fôr abandonada do repouso no ponto P, que espécie de movimento ela realizará? A que altura subirá no aclive? Qual a energia de ligação (a energia extra necessária para que a bola escape do poço no centro da figura)?

(c) Qual a energia de ligação na parte (a)?



a) A E_c inicial é $1/2\ mv^2 = 1/2\ (0,25 \text{ kg})\ (2,0 \text{ m/s})^2 = 0,50$ joules. A bola adquire energia cinética (e perde potencial), enquanto desce pelo declive, mas, depois, perde energia cinética, enquanto sobe do outro lado, até o instante em que atinge o seu nível de elevação original, onde terá novamente 0,50 joules de E_c. A bola continua a subir até uma altura vertical h, tal que $mgh = 0,50$ joules. Logo,

$$h = \frac{E_c}{mg} = \frac{0,50 \text{ joules}}{(0,25 \text{ kg})\ (9,8 \frac{\text{nt}}{\text{kg}})} = 0,20 \text{ metros}.$$

A altura no aclive $= \frac{h}{\text{sen } 45^\circ} = 0,29$ m.

Pode-se imaginar a bola *recuando* de uma interação; ela entra pela esquerda, desce, sobe o morro e, então, inverte o movimento voltando pelo mesmo trajeto e sai pelo lado esquerdo, com a mesma velocidade (módulo) que tinha inicialmente.

b) O movimento será *oscilatório*. A bola atingirá, no aclive à direita, a mesma altura em que estava inicialmente à esquerda. Para escapar do poço, necessitaria uma energia adicional de quantidade mgh, onde h é a altura adicional que a bola deve subir, 0,5 metros. A energia de ligação é, portanto, $0{,}25 \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 1{,}2$ joules.

c) A energia de ligação na parte (a) é *negativa*, porque a partícula possui uma energia cinética disponível, quando está fora do poço. Deve-se retirar 0,50 joules de energia, a fim de deixar a bola fora do poço (sem energia cinética na superfície horizontal). Portanto, a energia de ligação em (a) é –0,5 joules.

PROBLEMA 16

Uma mola linear cuja razão fôrça-distensão é $k = 40$ newtons/m pende verticalmente, sustentando uma massa de 0,80 kg em repouso. A massa é, então, puxada para baixo de uma distância igual a 0,15 m.

(a) A que altura ela subirá?

(b) Qual será sua velocidade máxima?

(c) Que alterações sofreriam as respostas (a) e (b), se a experiência fôsse realizada na Lua?

Êste problema é imediato, se se reconhece que a fôrça constante gravitacional (mg para baixo), sôbre a massa suspensa, não produz nenhum efeito além de deslocar a posição de equilíbrio. Isto é fácil de se observar, se considerarmos primeiramente as fôrças que atuam sôbre a massa na posição de equilíbrio. A fôrça resultante é zero; a fôrça gravitacional para baixo é equilibrada por uma fôrça de igual intensidade para cima, devido à mola. Qual é a fôrça resultante sôbre a massa, em outras posições? A fôrça gravitacional não varia, mas a fôrça da mola varia. Se a massa estiver acima da posição de equilíbrio, a distensão da mola e, conseqüentemente, a fôrça da mola serão menores do que quando na posição de equilíbrio, e assim, a fôrça resultante estará voltada para a posição de equilíbrio. Similarmente, se a massa estiver abaixo da posição de equilíbrio, tanto a distensão da mola como a fôrça para cima efetuada pela mola serão maiores, e a fôrça resultante estará dirigida para cima, novamente para a posição de equilíbrio. A fôrça resultante é exatamente, kx (onde x é o deslocamento a partir da posição de equilíbrio) no sentido oposto ao deslocamento. No equilíbrio, a distensão da mola, s_o, é tal que $ks_o = mg$. Para o deslocamento x abaixo da posição de equilíbrio a distensão da mola é $s_o + x$, a fôrça da mola é $k(s_o + x) = ks_o + kx = mg + kx$, e a fôrça resultante é kx (para cima).

Como a fôrça resultante da mola para qualquer x é kx, a energia potencial será $1/2\ kx^2$, (a energia potencial sendo considerada zero, na posição de equilíbrio, $x = 0$).

Êste problema é semelhante à Experiência III-12. As Notas de Laboratório para esta experiência contêm mais comentários.

Após estas considerações iniciais, as perguntas podem ser respondidas imediatamente.

a) Como a fôrça é linear, temos um movimento harmônico simples, com os pontos extremos do movimento localizados a uma distância igual abaixo e acima da posição de equilíbrio. Portanto, a massa subirá 0,15 metros acima da posição de equilíbrio (0,30 m acima da posição onde foi abandonada).

b) Quando a massa passar pela posição de equilíbrio ($x = 0$), sua energia potencial será mínima ($1/2\ k \times 0^2 = 0$), e sua energia cinética será igual à energia total:

$$\frac{1}{2}\ m\ v^2 = E = \frac{1}{2}\ k\ x_o^2.$$

$$v^2 = \frac{k}{m}\ x_o^2, \text{ e}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\ (x_o) = \pm \sqrt{\frac{40\ \text{nt-m}}{0{,}80\ \text{kg}}} \times$$

$$\times\ (-\ 15\ \text{metros}) = \pm\ 1{,}1\ \text{m/s}.$$

O sinal ± simplesmente indica que a velocidade da massa é, alternadamente, para cima e para baixo.

c) Uma vez que ambas as respostas são independentes do campo gravitacional, tais respostas são idênticas, tanto na Terra como na

Lua ou em qualquer outro lugar. O único efeito da variação de g é o de alterar a distensão da mola, no equilíbrio, $s_o = \frac{mg}{k}$.

PROBLEMA 17

Uma pedra de 0,200 kg é jogada para cima de um ponto situado 20 metros acima da superfície da terra, a um ângulo de 60° com a horizontal, e à velocidade de 20,0 m/s.

(a) Qual é sua energia total?

(b) Qual será sua energia total, quando estiver a 15,0 m acima da superfície da terra?

(c) Qual será sua velocidade a essa altura?

Para calcular a energia total da pedra, devemos primeiramente escolher um zero conveniente para a energia potencial. Convenientemente, escolhemos a superfície da terra.

a) A energia cinética inicial é $1/2\ mv^2 = 1/2\ (0{,}200)\ (20{,}0)^2 = 40{,}0$ joules. A energia potencial inicial é $mgh = 0{,}200 \times 9{,}8 \times 20{,}0 = 39{,}2$ joules.

A energia total é a soma das energias cinética e potencial, em qualquer instante:

$39{,}2 + 40{,}0 = 79{,}2$ joules de energia total.

b) Uma vez que a energia *total* se conserva neste sistema (despreza-se a resistência do ar), a energia total é de 79,2 joules em todos os pontos do trajeto.

c) A 15,0 m acima da superfície da terra, a energia potencial $mgh = 0{,}200 \times 9{,}8 \times 15{,}0 = 29{,}4$ joules. Portanto, aplicando a conservação da energia, a energia cinética, $1/2\ mv^2$, é dada por:

$1/2\ mv^2 + 29{,}4 = 79{,}2$ ou $1/2\ mv^2 = 49{,}8$ joules.

$$v^2 = \frac{2 \times 49{,}8}{m} = \frac{2}{0{,}20} \times 49{,}8$$

$$v = 22{,}3 \text{ m/s.}$$

PROBLEMA 18

A massa m_1 movendo-se com velocidade v_1, atinge a massa m_2 frontalmente; m_2 está inicialmente em repouso e a colisão é elástica. Se $m_2 = 10^{24} m_1$, avalie as seguintes razões:

(a) da energia cinética inicial de m_1 para a energia cinética final de m_1;

(b) da energia cinética final de m_2 para a energia cinética inicial de m_1. Um objeto chocando-se elàsticamente com um amortecedor de mola, prêso firmemente ao solo, pràticamente não perde energia cinética, devido à interação.

(c) Suas respostas (a) e (b) concordam com esta afirmativa? Prepare-se para discutir isto.

Nota: Para as partes (a) e (b) use as equações

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ e } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

para as velocidades de m_1 e m_2.

Pode-se obter a solução, sem aplicar as fórmulas apresentadas no enunciado:

a) De acôrdo com a sugestão da última frase da parte (b), a situação dêste problema é análoga a de uma bola rebotando na Terra. O recuo da Terra é desprezível. Assim, numa colisão elástica, m_1 terá as energias cinéticas final e inicial iguais.

b) A energia cinética final de m_2 será desprezível.

c) Sim.

A fim de calcular as respostas, os dados podem ser substituídos nas equações dadas.

$$\text{a)} \quad \frac{m_1 - 10^{24} m_1}{m_1 + 10^{24} m_1} v_1 = \frac{1 - 10^{24}}{1 + 10^{24}} v_1 =$$

$$= - \frac{10^{24}\,(1 - 10^{-24})}{10^{24}\,(1 + 10^{-24})} v_1.$$

$$\frac{(E_c)_1}{(E_c')_1} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{v_1^2}{v_1'^2} = \frac{(1 + a)^2}{(1 - a)^2},$$

onde $a = 10^{-24}$.

Entretanto, $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$. Como a é muito menor do que 1, os três têrmos à

direita da igualdade contribuem com várias aproximações ao têrmo da esquerda. Isto é, em primeira aproximação:

$$(1 + a)^2 = 1.$$

Uma aproximação mais precisa é:

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a = 1 + 2 \times 10^{-24},$$

enquanto a resposta exata é:

$$(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2 = 1 + (2 \times 10^{-24}) + 10^{-48}.$$

Os três têrmos $(1,\ 2 \times 10^{-24},\ 10^{-48})$ são progressivamente menores, sendo a razão entre os têrmos sucessivos apenas cêrca de uma parte em 10^{24}.

Da mesma forma, $(1 - a)^2 \approx 1 - 2a = 1 - 2 \times 10^{-24}$.

Fazemos agora a aproximação $\frac{1}{1-2a}$ por $1 + 2a$.

A validade desta aproximação pode ser observada, simplesmente realizando uma divisão como a que segue:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 - 2a \\ \underline{2a} & \\ \underline{-\ 2a + 4a^2} & 1 + 2a + 4a^2 + \ldots \\ 4a^2 & \\ \underline{-\ 4a^2 + 8\ a^3} & \\ 8\ a^3 & \\ \ldots + & \end{array}$$

A seqüência de têrmos envolve potências cada vez mais elevadas de a. Dentro de nossa aproximação, podemos desprezar a^2 e escrever:

$$\frac{1}{1 - 2a} = 1 + 2a.$$

Logo,

$$\frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2} = \frac{(1 + a)^2}{(1 - a)^2} \approx \frac{1 + 2a}{1 - 2a} \approx$$

$$(1 + 2a)^2 \approx 1 + 4a, \frac{(E_c)_1}{(E'_c)_1} \approx 1 + 4 \times 10^{-24},$$

que está muito próximo da unidade.

(b) Podemos calcular a razão entre a energia cinética final de m_2 e a energia cinética inicial de m_1, aplicando o princípio da conservação de energia. Na parte (a), obtivemos:

$$(E_c)_1 = (E'_c)_1\ (1 + 4 \times 10^{-24}).$$

Mas, pela conservação de energia:

$$(E'_c)_1 + (E'_c)_2 = (E_c)_1,$$

$$\text{ou } (E'_c)_2 = (E_c)_1 - (E'_c)_1 = (E_c)_1 - \frac{(E_c)_1}{1 + 4 \times 10^{-24}},$$

$$\text{ou } (E'_c)_2 = (E_c)_1\ [1 - (1 - 4 \times 10^{-24})].$$

Portanto, $\frac{(E'_c)_2}{(E_c)_1} = 4 \times 10^{-24}$.

Uma alternativa é: $v'_2 = \frac{2\ m_1}{m_1 + m_2}\ v_1$.

Logo: $\frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2\ m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 =$

$$= \frac{4\ m_1}{m_2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^2} = \frac{4 \times 10^{-24}}{(1 + 10^{-24})^2} \approx 4 \times 10^{-24}.$$

c) Sim, está de acôrdo com as respostas (a) e (b), uma vez que a massa da Terra é 6×10^{24} kg, muito maior do que uma massa típica usada em laboratório.

PROBLEMA 19

A Fig. 25-21 ilustra um brinquedo muito comum, constituído por uma roda com eixo, prêsa magnèticamente a um suporte. Quando o suporte é mantido em posição vertical com a parte aberta para cima, o rotor desce por um lado, contorna a curva na parte mais baixa e sobe pelo outro lado.

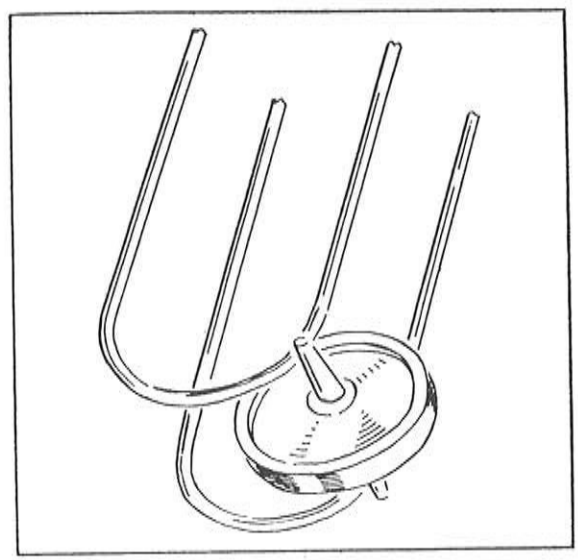
(a) Se você tiver tal brinquedo, determine que quantidade de energia mecânica

(energia potencial gravitacional, mais energia cinética) é perdida em um período do movimento.

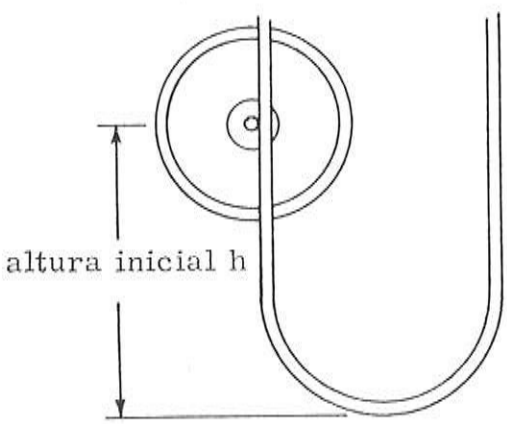
(b) Que fração da energia cinética máxima durante o movimento, representa a energia perdida?

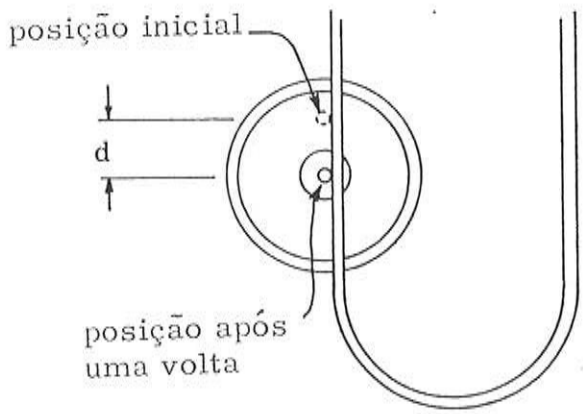
(c) Em que tipo de energia se transforma, provàvelmente, a energia perdida?

Nota: Um "período" do movimento é o tempo gasto pelo rotor em percorrer completamente o suporte e retornar à sua posição inicial.



A fim de calcular a fração da energia cinética máxima, representada pela energia perdida, consideraremos a figura. Partindo do repouso, do ponto mais alto, o rotor adquiriria sua energia cinética máxima na base, se não houvesse perdas, a energia cinética na base seria igual à energia potencial inicial, mgh. A energia cinética máxima com perdas será um pouco menor. Como uma aproximação grosseira, usaremos simplesmente mgh.





Se, ao completar uma volta, o ponto mais alto do rotor estiver a uma distância d abaixo de seu ponto de partida, o rotor perdeu a energia mgd. Portanto, a razão da energia perdida para a energia inicialmente disponível é:

$$\frac{mgd}{mgh} = \frac{d}{h}$$

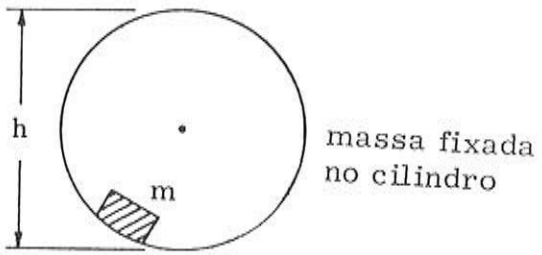
Neste exemplo, a energia mecânica perdida aparece sob a forma de aumento de temperatura. A perda resulta do atrito e de correntes elétricas geradas pelo ímã em rotação.

PROBLEMA 20

Pode você projetar um brinquedo simples de vai-e-vem? Por fora, êle deve ser apenas um cilindro; quando você lançar o brinquedo sôbre uma mesa, êle deverá parar ràpidamente de rolar, inverter seu movimento e voltar na sua direção.

A fim de voltar, o brinquedo deve ter um dispositivo que permita acumular energia potencial, enquanto o cilindro rola, afastando-se do experimentador.

Se uma massa estiver prêsa ao interior do cilindro, (veja figura), a energia potencial terá um valor máximo, quando a massa estiver no ponto mais alto e um mínimo, estando a massa no ponto mais baixo. O brinquedo é muito semelhante a um pêndulo que pode oscilar por todo um ângulo de 360°.



Se o cilindro fôr rolado de modo que, quando a massa estiver na parte mais baixa a energia cinética seja menor do que mgh, êle rolará, até que a energia cinética tenha se transformado inteiramente em energia potencial gravitacional da massa ascendente. Em seguida, rolará de volta. Seu movimento será oscilatório. Se a energia cinética inicial fôr maior do que mgh, o cilindro nunca parará e seu movimento será um tanto caprichoso.

O brinquedo descrito acima não pode rolar além de meia circunferência e, ainda, voltar. Para construir um dispositivo que volte depois de muitas revoluções, é preciso que a energia potencial varie mais vagarosamente com o ângulo de rotação. Mostra-se, na figura a seguir, uma maneira de realizar isto.

A barra é suspensa por um elástico que se torce, quando o cilindro gira em relação à barra. Enquanto o cilindro rola, a barra permanece pendurada, fazendo com que o elástico se torça. Conseqüentemente, a energia cinética original é inteiramente convertida em energia potencial do elástico torcido e distendido, e o brinquedo pára. Em seguida, rola de volta, enquanto o elástico se destorce e a barra ainda se mantém imóvel, sem girar.

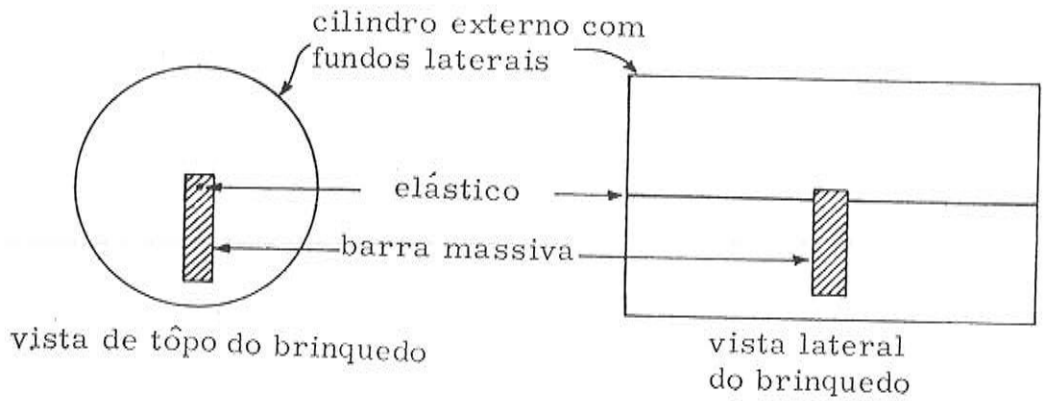
PROBLEMA 21

Quando um objeto de massa m se move de r a r' no campo gravitacional da Terra, a energia potencial varia de $\triangle U = -GMm\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$, sendo M a massa da Terra. Mostre que, se o objeto se afasta da Terra de uma distância $\triangle r = r' - r$, muito pequena comparada com sua distância ao centro da Terra, a expressão acima se reduz a $\triangle U = mg\ \triangle r$.

$$\triangle U = -GmM\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \frac{+GmM\,(r' - r)}{r'r}$$

Substituindo $r' = r + \triangle r$, obtemos:

$$\triangle U = \frac{GmM\triangle r}{r(r + \triangle r)} = \frac{GmM\triangle r}{r^2\left(1 + \frac{\triangle r}{r}\right)}.$$



Como $\frac{GM}{r^2} = g$, temos:

$$\triangle U = \frac{mg\triangle r}{1 + \frac{\triangle r}{r}}.$$

Se $\frac{\triangle r}{r}$ é muito pequeno comparado a 1, podemos considerar que:

$$\triangle U = mg\ \triangle r.$$

PROBLEMA 22

Determine, com dois algarismos significativos, a energia de ligação:

(a) de um homem de 70 kg com a Terra;

(b) da Lua com a Terra.

a) A relação básica necessária é encontrada na Seção 4. A energia de ligação E_L, é:

$$E_L = \frac{GmM}{r} - \frac{1}{2} mv^2.$$

O primeiro têrmo representa a *energia potencial* que devemos fornecer, a fim de mover m, de r ao infinito. Contudo, se m possui uma velocidade, v, quando se encontra à distância inicial r, podemos utilizar a energia cinética como ponto de partida. Se a massa tiver velocidade inicial, e se nos contentarmos em apenas levar a massa a uma grande distância, sem velocidade final, não será necessária tôda a energia $\frac{GmM}{r}$, para separar a massa de seu sistema. Podemos aproveitar $1/2\,mv^2$.

Um homem em repouso, na superfície da Terra, possui certa velocidade útil (e energia cinética) devido à rotação da Terra. (Um satélite deve ser lançado de oeste para leste, a fim de utilizar esta energia cinética). Se o homem estiver perto do Equador,

$$v = \frac{2\pi \times 6{,}38 \times 10^6 \text{ metros}}{8{,}64 \times 10^4 \text{ s}} = 4{,}64 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

Usando esta velocidade, v, a energia cinética pode ser calculada:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{70 \times (4{,}64 \times 10^2)^2}{2} = 7{,}5 \times 10^6$$ joules.

O acréscimo necessário na energia potencial é:

$$\frac{GmM}{r} = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}) \times 70 \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}38 \times 10^6} =$$

$$= 4{,}4 \times 10^9 \text{ joules}.$$

Pelos resultados acima, evidencia-se que, neste caso, a energia cinética é desprezível, comparada com a variação necessária na energia potencial.

$$E_L = \frac{GmM}{r} - \frac{1}{2} mv^2 = 4{,}4 \times 10^9 \text{ joules}$$

$$- 7{,}5 \times 10^6 \text{ joules} \approx 4{,}4 \times 10^9 \text{ joules}.$$

b) A fim de determinar a energia de ligação da Lua, devemos calcular tanto $\frac{GmM}{r}$ (onde m é agora a massa da Lua, e r é o raio da órbita da Lua em tôrno da Terra), como também a energia cinética da Lua, $1/2\ mv^2$. (Tornar-se-á evidente que a energia cinética é uma fração significativa).

A Lua descreve uma trajetória de comprimento $2\pi r$, num tempo T, seu período. Portanto,

$$v = \frac{2\pi r}{T} \text{ e } E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} =$$

$$= \frac{2\pi^2 mr^2}{T^2}.$$

Da página 37 do texto, temos: $m = 7{,}34 \times 10^{22}$kg, $r = 3{,}8 \times 10^8$ metros, e $T = 2{,}36 \times 10^6$ segundos. Podemos, em seguida, determinar a energia cinética:

$$E_c = \frac{2\pi^2 mr^2}{T^2} = 2\pi^2 \times 7{,}34 \times 10^{22} \text{ kg} \times$$

$$\times \left(\frac{3{,}8 \times 10^8 \text{ m}}{2{,}36 \times 10^6 \text{ m}} \right)^2 = 3{,}8 \times 10^{28} \text{ joules}.$$

A energia potencial, $\frac{GmM}{r}$, é determinada, usando-se:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{nt\text{-}m^2}{kg^2}$, $M = 5{,}98 \times 10^{24}$kg, e $r = 3{,}8 \times 10^{8}$ metros.

$$U = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}34 \times 10^{22} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{3{,}8 \times 10^{8}} =$$

$= 7{,}7 \times 10^{28}$ joules.

A energia de ligação é, portanto:

$E_L = \frac{GmM}{r} - \frac{1}{2} mv^2 = (7{,}7 - 3{,}8) \times$

$\times 10^{28}$ joules $= 3{,}9 \times 10^{28}$ joules.

(Em particular $\left(\frac{GmM}{r}\right) = mv^2$; ∴ a energia cinética fornece exatamente a metade da variação necessária na energia potencial — devemos fornecer a outra metade).

PROBLEMA 23

O campo de fôrça entre um par de prótons é repulsivo. A energia potencial aumenta ou diminui, quando os prótons são aproximados?

Como a fôrça entre os prótons é repulsiva, êles oferecem resistência à junção ou separam-se quando abandonados a partir do repouso. Quando estão se separando com aceleração, transformam a energia potencial em energia cinética. Há, portanto, mais energia potencial quando estão comprimidos.

Outra maneira de encarar a situação é observar que transferimos energia aos prótons, quando os empurramos, aproximando-os um do outro. Conseqüentemente, sua energia potencial aumenta, quando os aproximamos. A situação é análoga a de uma mola comprimida.

PROBLEMA 24

A fôrça de repulsão, entre dois elétrons, é dada por

$$F = \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{x^2} \text{ em newtons,}$$

sendo x a distância entre êles, em metros. Se cada elétron tem massa de $9{,}00 \times 10^{-31}$ kg e se êles são mantidos a $1{,}00 \times 10^{-10}$ m um do outro e, depois, liberados, qual será:

(a) A energia cinética de cada um, quando a distância entre êles fôr $2{,}00 \times \times 10^{-10}$ m?

(b) A velocidade de cada elétron?

Êste problema provàvelmente será mais fácil de resolver, se fôr precedido pelo Problema 23. A fôrça F, entre os dois elétrons, é dada por:

$$F = \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{x^2};$$

assim, esta é uma lei do inverso do quadrado e depende da separação, da mesma forma que a fôrça gravitacional. O fato de que esta é uma fôrça de repulsão significa, entretanto, que em qualquer deslocamento relativo, a variação na energia potencial é *negativa*, relativamente à energia potencial da fôrça de atração.

Se a fôrça fôsse de atração, por analogia com as expressões da atração gravitacional, a energia potencial das partículas, a uma separação x, seria:

$$U = -\frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{x},$$

onde consideramos a energia potencial zero, quando as partículas estão separadas a uma grande distância. Como a fôrça é de repulsão, necessitamos o negativo dêste resultado, a fim de obter a energia potencial real para essa separação x:

$$U \text{ a uma separação } x = +\frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{x}.$$

Quando x aumenta, a energia potencial diminui, de acôrdo com a discussão do Problema 23.

a) Como os elétrons são abandonados a partir do repouso, movem-se em sentidos opostos; suas velocidades sendo iguais e opostas, a quantidade de movimento conserva-se. Portanto, suas energias cinéticas são iguais. Considerando m a massa e v o módulo da velocidade de cada

partícula, $2 \times (1/2\ mv^2) + U =$ constante (a energia total) $= \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{1{,}00 \times 10^{-10}}$. (Uma vez que, quando $x = 1{,}00 \times 10^{-10}$ m, $v = 0$).

O acréscimo na energia cinética $2\,(1/2\ mv^2)$ = ao decréscimo na energia potencial. A uma separação de $2{,}00 \times 10^{-10}$ m, a energia potencial é determinada por:

$$U = \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{2{,}00 \times 10^{-10}}.$$

Logo, $2 \times \left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{1{,}00 \times 10^{-10}} - \frac{2{,}30 \times 10^{-28}}{2{,}00 \times 10^{-10}}$,

ou $\frac{1}{2} m v^2 = 0{,}575 \times 10^{-18}$ joule.

b) Como $m = 9{,}00 \times 10^{-31} = 0{,}900 \times 10^{-30}$ kg,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \times 0{,}575 \times 10^{-18}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}575 \times 10^{-18}}{0{,}900 \times 10^{-30}}} = 1{,}13 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 25

Qual é a energia de ligação de um próton e um elétron num átomo de hidrogênio, se a distância entre êles é de $0{,}50 \times 10^{-10}$ m e a fôrça de atração entre êles é dada por $F = \frac{2{,}3 \times 10^{-28}}{r^2}$ newtons, sendo r em metros?

Lembre que um elétron não fica parado quando há uma fôrça sôbre êle; admita que êle se move numa circunferência em tôrno do próton.

Na Seção 25-4, a energia potencial correspondente a uma fôrça de atração $\frac{GMm}{r^2}$ foi demonstrada como sendo $U = -\frac{GMm}{r}$, considerando-se zero a energia potencial, a uma separação infinita. A fôrça de atração entre um elétron e um próton é $\frac{k}{r^2}$. A energia potencial correspondente é, portanto, $U = \frac{-k}{r}$. A energia total é, então:

$$E = \frac{-k}{r} + \frac{1}{2} m v^2,$$

onde m é a massa do elétron e v sua velocidade.

Como a massa do próton é muito maior do que a de um elétron, podemos (com uma boa aproximação) desprezar seu movimento, assim como desprezamos o movimento do Sol devido à fôrça dos planêtas. Para um movimento circular uniforme, a aceleração em direção ao centro (isto é, a aceleração do elétron em direção ao próton) é $\frac{v^2}{r}$. Igualando ma à fôrça, temos:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{k}{r^2}, \text{ ou } m v^2 = \frac{k}{r}.$$

A energia total é:

$$E = \frac{-k}{r} + \frac{1}{2} \times \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r}.$$

Se o elétron fôsse puxado de modo a livrar-se do próton, a energia total do sistema seria 0 (energia cinética zero e separação infinita, onde $U = 0$ também). Portanto, para libertar o elétron, necessitaríamos adicionar uma quantidade de energia:

$$E_L = \frac{k}{2r} = \frac{2{,}3 \times 10^{-28}}{2 \times 0{,}50 \times 10^{-10}} = 2{,}3 \times 10^{-18} \text{ joules}.$$

PROBLEMA 26

Um bueiro levemente inclinado sai de um muro de proteção, na margem de uma estrada. Uma bola, lançada através da manilha, volta com maior velocidade do que tinha ao ser lançada. Se isto acontecesse, você se surpreenderia? De que suspeitaria você?

Se uma pessoa se surpreende ou não, depende, sem dúvida, dela perceber que a bola, ao retornar, teve aumentada a sua energia total (a energia potencial é a mesma de quando foi lançada, pois a bola volta ao mesmo lugar; porém, pelo enunciado, a energia cinética é maior). Esperamos que os alunos se mostrem surprêsos! A explicação mais provável seria de que alguém pegou a bola do outro lado do cano e jogou-a de volta.

PROBLEMA 27

Aproximadamente com que fração da massa inicial escapará da Terra um foguete que use combustível químico?

Na Seção 25-5, a velocidade de escape foi calculada como sendo 11,2 km/s. A quantidade de combustível necessária depende, principalmente, da velocidade de exaustão. Se considerarmos uma velocidade de exaustão, $v_e = 2$ km/s, a velocidade necessária do foguete poderá ser expressa como $\frac{11,2}{2}\ v_e = 5,6v_e$. A Figura 23-15b (página 81) foi obtida, aplicando-se a conservação da quantidade de movimento. Por êste gráfico, calculamos que a razão da massa final pela massa original é, aproximadamente, 0,0037 para $\frac{v}{v_e} = 5,6$. (Note que $0,0037 = e^{-5,6}$). Podemos verificar a importância do emprêgo de melhor combustível, pela observação do efeito de um aumento de 10% na velocidade de exaustão. Para $v_e = 2,2$ km/s, $v/v_e = 11,2/2,2 = 5,1$; e a razão das massas aumenta para 0,0061, quase duas vêzes mais carga útil do que com uma velocidade de exaustão ligeiramente menor. Dobrando-se a velocidade de exaustão, resultaria uma razão de, aproximadamente, 0,06, ou seja, um melhor aproveitamento de um fator 16!

CAPÍTULO 26

CALOR, MOVIMENTO MOLECULAR E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Êste capítulo tem duas finalidades. Primeiramente, êle constitui um importante elo na seqüência da conservação de energia. Em qualquer experiência envolvendo interações mecânicas, a transferência de energia é quase sempre acompanhada pela conversão de alguma energia mecânica em calor. Ao desenvolver o conceito de calor como uma forma de energia, o texto realiza um segundo objetivo igualmente importante. O Capítulo 26 é uma transição natural dos problemas de mecânica para as idéias de estrutura atômica da Parte IV. Esta ponte é fornecida pelo tratamento do calor, sob o ponto de vista da teoria cinética.

As Seções 1 e 2 discutem o movimento das moléculas de um gás perfeito. São desenvolvidas, de um lado, relações entre a quantidade de movimento e a energia cinética de moléculas individuais e, do outro, relações entre pressão e temperatura do gás como um todo. Estas seções apresentam a pressão de um gás sob o ponto de vista da teoria cinética e evidenciam a proporcionalidade entre a temperatura absoluta e a energia cinética média do movimento do centro de massa das moléculas. O conceito de energia térmica é desenvolvido, e faz-se uma distinção entre energia térmica total e energia cinética do movimento do centro de massa.

As Seções de 3 a 7 ligam todos os pontos esparsos. Discute-se os mecanismos da conversão da energia cinética como um todo, para a energia cinética molecular desordenada. São descritas experiências que estabelecem o equivalente mecânico de calor. O capítulo termina com um resumo da visão e do alcance da conservação de energia.

PLANEJAMENTO DO CAPÍTULO 26

A tabela seguinte sugere possíveis planejamentos para êste capítulo, de acôrdo com o planejamento apresentado no resumo para a Parte III.

	Planejamento de 15 semanas para a Parte III			Planejamento de 9 semanas para a Parte III		
Tópico	Período de aula	Período de lab.	Exp.	Período de aula	Período de lab.	Exp.
Secs. [1], [2]	4	0	-	2	0	-
Secs. [3], 4, 5, 6, 7	4	1	III-14	2	0	-

Laboratório. A Experiência III-14, *Uma Colisão Frontal,* utiliza carrinhos com rodas de patim, munidos de molas aparadoras, e ainda o marcador de tempo, para analisar as variações da energia, em uma colisão. Verifica-se que empregando-se aparadores menos elásticos, a perda de energia cinética aumenta. Esta experiência pode ser efetuada em qualquer ponto, durante a discussão do Capítulo 26.

Casa, Classe e Laboratório. Alguns problemas dêste capítulo tratam qualitativamente as trans-

formações da energia em sistemas, tais como motores a gasolina ou metralhadoras. A discussão de alguns dêstes problemas será uma maneira efetiva de explicar bem o conceito de calor, como energia cinética do movimento molecular. Se não dispuser de muito tempo para o desenvolvimento dêste capítulo, você deverá atribuir à discussão dêsses problemas a principal função. Problemas adequados para êste fim são os de números 1, 10, 21 e 22. Os Problemas 7 e 8 envolvem o comportamento de um gás ideal, e os Problemas 16 e 19 referem-se ao equivalente mecânico de calor. Se você tiver tempo suficiente recomendamos tais problemas.

A tabela seguinte classifica os problemas de acôrdo com seus níveis de dificuldade e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente apropriados para discussão em classe e projetos para casa. Os problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*). As respostas dos problemas são dadas no CCL.

Seções	Fácil	Médio	Difícil	Discussão em classe	Projetos para casa
1		1*	2	2	
2	4*	3, 5**, 6*	7, 8	4	
3	9	10*		10	
4	11, 16				12, 13, 14, 15
5, 6	17, 18	19, 20			
7	16	10, 21*, 25	22*, 23, 24	10, 21, 22	15, 26, 27

* * Os alunos acharão o Problema 5 mais fácil, se fôr precedido pelo Problema 4.

Filmes. "Mechanical and Thermal Energy", por Jerold R. Zacharias, do Massachusetts Institute of Technology. Êste filme examina a conservação de energia sob o ponto de vista microscópico, relacionando a energia cinética molecular desordenada à macroscópica observação de variáveis. Empregando modelos, êste filme mostra a interligação da energia do movimento como um todo, com a energia térmica do movimento desordenado, como o movimento desordenado pode, em média, apresentar um efeito contínuo e como ocorre a condução térmica. Pode-se programar êste filme com as Seções de 3 a 7. Tempo de projeção: 22 minutos.

"Conservation of Energy" mostra o tipo de "contabilidade de energia", que pode ser feita numa usina elétrica, delineando as variações grosseiras da energia potencial química do carvão para a energia térmica e mecânica e, finalmente, a produção elétrica. Tal filme pode ser programado para as últimas partes do capítulo. Tempo de projeção: 27 minutos.

Seção 1 — Pressão de um Gás

Seção 2 — Temperatura e Energia Cinética Molecular; Energia Térmica

FINALIDADE. 1) Favorecer o desenvolvimento do modêlo atômico da matéria, por intermédio do estudo da teoria cinética.

2) Introduzir o conceito de que a energia consiste no movimento desordenado dos átomos e identificar isto como energia térmica (calor).

CONTEÚDO a. A fôrça exercida por um gás, sôbre as paredes do recipiente, pode ser compreendida como o efeito médio de um grande número de pequenos impactos das moléculas do gás.

b. A fôrça exercida por unidade de área, a pressão, está relacionada com a energia cinética média das moléculas por:

$P = \frac{2}{3} E_c \frac{N}{V}$, onde P é a pressão, N é o número de moléculas no volume V, do gás, e E_c é a energia cinética média do movimento do centro de massa de uma única molécula.

c. E_c é diretamente proporcional à temperatura absoluta do gás: $E_c = \frac{3}{2} kT$; $k = 1{,}37 \times 10^{-23}$ joules/molécula °K.

d. A temperatura de um mol de qualquer amostra de gás monoatômico (He, A, Ne, etc) eleva-se 1°K, quando se fornece ao gás 12,4 joules de energia. Gases constituídos de moléculas mais complicadas (H_2, O_2 N_2, etc) podem consumir mais energia, para produzir a mesma variação na temperatura, pois parte da energia é absorvida em rotação e vibração.

e. Esta relação íntima entre energia cinética molecular desordenada e temperatura (e, portanto, calor) fornece um maior elo, na seqüência dos argumentos da conservação de energia.

ÊNFASE. Embora estas seções contenham muitas idéias novas, algumas um tanto sutis, o tempo reservado para êste material pode ser adaptado ao planejamento geral, a fim de satisfazer às exigências do restante do curso. Os alunos devem ter, no mínimo, certa noção da possibilidade de conversão da energia cinética "organizada" em energia cinética de movimento molecular desordenado.

COMENTÁRIOS. Boa parte dos alunos pode perceber que a dedução apresentada no texto é bem simplificada. Talvez notem que se considerou, implìcitamente, que tôdas as partículas ou moléculas se deslocam com a mesma velocidade.

Mesmo que, inicialmente, tôdas as moléculas tenham a mesma velocidade, eventualmente, colidem umas com as outras. Ainda que essas colisões fôssem elásticas, produziriam variações na velocidade, que, casualmente, conduziriam a um amplo "espectro" de velocidades. Quando duas de tais partículas colidem elàsticamente, enquanto seu centro de massa permanece em repouso em relação ao sistema laboratório, nenhuma variação resulta na velocidade, em relação a êste sistema. Quando o centro de massa de tais partículas está em movimento (por exemplo, colisões em ângulos retos), ocorrem variações nas velocidades das partículas. Uma molécula, movendo-se com uma velocidade de 3v, deve ter nove vêzes a energia cinética de uma outra que se move com uma velocidade v, mas possui sòmente três vêzes a quantidade de movimento da molécula de menor velocidade. Assim, a relação entre pressão e energia cinética deve, de certa forma, depender da distribuição real das velocidades das moléculas. É possível uma prova rigorosa (que considera a real distribuição das velocidades) e que fornece o mesmo resultado alcançado pela dedução simples desta seção. A distribuição real das velocidades pode ser demonstrada como sendo, simplesmente, a mais provável do ponto de vista estatístico. Denomina-se distribuição de Maxwell.

° ° °

Nestas seções, encontramo-nos no ponto culminante da teoria cinética dos gases, uma das grandes conquistas da Física. Mostramos (ou, pelo menos, apresentamos argumentos razoáveis, ao invés de provas exatas, porém mais complicadas) que as propriedades térmicas da matéria, tomadas como todo, podem ser descritas exatamente, em têrmos da dinâmica do movimento das moléculas individuais que formam uma substância. Contudo, certos alunos talvez pensem que, afinal, *definimos* a equivalência entre temperatura e energia cinética pela nossa teoria — assim, por que deve ser surpreendente que se tornem equivalentes? A resposta é de que não há nenhuma quantidade em dinâmica que corresponda, explìcitamente, à temperatura. Os parâmetros de mecânica são: massa, fôrça, velocidade, aceleração, quantidade de movimento, energia, etc. A notável conquista da teoria cinética identifica as complicadas propriedades macroscópicas, tais como a temperatura, com uma propriedade dinâmica microscópica tão simples, como a energia cinética do movimento dos centros de massa das moléculas.

° ° °

Efetivamente, tôda a teoria cinética seria puramente formal, se não fôsse possível confirmar o modêlo por meio de observação direta. Há várias predições fàcilmente verificáveis, que foram provadas como sendo verdadeiras. Algu-

mas delas foram discutidas anteriormente, na Parte I, Capítulo 9, mas podem muito bem ser recapituladas neste contexto. Por exemplo, da relação simples $kT = \frac{2}{3}\frac{(mv)^2}{2}$, concluímos:

1) Que a velocidade média do movimento das moléculas de massa m, à temperatura absoluta T, é: $\bar{v} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}$. Particularmente, para o hidrogênio (H_2, $m \approx 3 \times 10^{-27}$ kg), à temperatura ambiente ($T \approx 300°K$), $v \approx 2 \times 10^3$ m/s. Esta velocidade pode ser fàcilmente medida, deixando as moléculas escaparem uma a uma, no interior de um sistema onde se produziu o vácuo.

2) Para um conjunto de moléculas de massas diferentes, tôdas à mesma temperatura, as velocidades médias relativas serão inversamente proporcionais às raízes quadradas das massas — um fato que é verificável, medindo-se as razões relativas de difusão por meio de uma membrana porosa (êste é o princípio de separação dos isótopos de urânio, pelo processo da difusão gasosa, empregado na grande usina de Oak Ridge).

A expressão "gás ideal" ocorre, freqüentemente, em discussões sôbre a teoria cinética. Um gás "ideal" é aquêle em que as moléculas podem ser consideradas como pontos geométricos que interagem sòmente através de fôrças de pequeno alcance, colidindo umas com as outras, como se fôssem esferas perfeitamente elásticas. Êste é nosso modêlo básico para a teoria cinética, que descreve bem os gases de moléculas simples, à baixa pressão.

* * *

A teoria cinética é de ampla aplicabilidade. Não só podemos explicar as propriedades térmicas de gases simples, como também, podemos entender por que substâncias "não simples", como gases poliatômicos, líquidos e sólidos, apresentam diferente comportamento térmico. Podemos justificar, quantitativamente, as diferenças para os gases poliatômicos. Entretanto, para sistemas de pressão cada vez mais elevada, somos limitados pela falta de conhecimento das fôrças reais de interação entre moléculas.

Naturalmente, se as moléculas realmente não interagissem, através de fôrças de longo alcance, nunca encontraríamos matéria nos estados condensados líquidos e sólidos. Portanto, é evidente que o modêlo do gás "ideal" é apenas uma aproximação. Uma das mais admiráveis evidências da presença de fôrças de longo alcance entre moléculas é a queda na temperatura de um gás, ao qual se permite *livremente* uma expansão súbita, transferindo-o através de um cano para um recipiente maior. Êste fenômeno é geralmente denominado efeito Joule-Thompson, e é o princípio básico do funcionamento da maioria dos refrigeradores. Numa expansão *livre*, nenhum trabalho é realizado pelo gás, e não haveria transferência de energia, a não ser que houvesse alguma energia potencial associada à separação média das moléculas. Logo, se não houvesse interações de longo alcance entre as moléculas, sua energia cinética média não seria afetada pela distância entre elas, e não haveria variações de temperatura associadas a uma expansão livre. (Veja o Apêndice 10, no fim dêste volume, para uma discussão da energia inerente a sistemas moleculares poliatômicos. Veja também CCL, Problema 24).

PROBLEMAS COMPLEMENTARES 1. Um recipiente contém a mistura de um mol de oxigênio (pêso molecular 32) e um mol de argônio (pêso molecular 40). Qual é a razão entre as velocidades médias das moléculas de oxigênio e de argônio?

$\frac{1}{2} m_o v_o^2 = \frac{1}{2} m_a v_a^2$ portanto, $v_o/v_a = (m_a/m_o)^{1/2} = (40/32)^{1/2} = 1{,}12$.

2. Se o recipiente do Problema 1 contém o gás a uma temperatura de 273°K e à pressão de 1 atmosfera:

(a) Qual é o volume do recipiente?

(b) Qual é a energia cinética média total do movimento do centro de massa das moléculas de oxigênio?

(c) Qual é a energia cinética média total do movimento do centro de massa das moléculas de argônio?

a. Um mol de qualquer gás, se contido num volume de $2{,}24 \times 10^{-2} m^3$, a uma temperatura de 273°K, exercerá uma pressão de 1 atmosfera. Uma vez que êste problema especifica 1 mol para cada um dos gases, a pressão em um volume de $2{,}24 \times 10^{-2} m^3$, a 273°K,

deve ser de 2 atmosferas. Para reduzi-la a 1 atmosfera, o volume deverá ser dobrado para $4{,}48 \times 10^{-2} m^3$.

b. $E_c = 12{,}4 \times 273 = 3{,}39 \times 10^3$ joules.

c. $E_c = 3{,}39 \times 10^3$ joules. A energia cinética do centro de massa é a mesma para tôdas as moléculas, à igual temperatura. As moléculas de oxigênio deveriam possuir, além disso, energia de rotação, vibração, etc.

3. Um recipiente contém um determinado volume de hélio a 0°C, a uma pressão de 2 atmosferas. O recipiente é mergulhado na água em ebulição (temperatura 100° C). Se o volume do recipiente não varia, qual é a energia cinética média do gás por unidade de volume? (Tome 1 atmosfera = $10^5 nt/m^2$).

$P_1/P_2 = T_1/T_2$, ou $2/P_2 = 273/373$.

$$P_2 = \frac{746}{273} = 2{,}7 \text{ atmosferas;}$$

$$E_c = 373 \times 12{,}4 = 4{,}62 \times 10^3 \text{ joules/mol.}$$

A densidade do gás não varia durante o aquecimento, pois o volume do recipiente e a quantidade de gás permanecem constantes. Inicialmente, a pressão a 273°K era de 2 atmosferas. Portanto, havia 2 moles/$2{,}24 \times 10^{-2} m^3$. Então, a energia cinética por unidade de volume seria:

$$E_c \times \frac{\text{moles}}{\text{volume}} = 4{,}62 \times 10^3 \times \frac{2}{2{,}24 \times 10^{-2}} =$$

$$= 4{,}12 \times 10^5 \text{ joules/m}^3.$$

4. 4×10^{24} moléculas de gás estão num recipiente a uma temperatura de 50°K. Essas moléculas exercem uma pressão de 0,3 atmosferas. Qual é o volume do recipiente?

$$PV = NkT$$

$$V = \frac{NkT}{P} =$$

$$= \frac{4 \times 10^{24} \text{ moléculas} \times 1{,}37 \times 10^{-23} \dfrac{\text{newton-metro}}{\text{molécula-}^\circ\text{K}} \times 50^\circ\text{K} \times 10^{-5} \dfrac{\text{atm-m}^2}{\text{newton}}}{0{,}3 \text{ atm}} = 0{,}09 \text{ m}^3.$$

Seção 3 — Energia Mecânica do Movimento do Objeto como um Todo, e Energia Interna

Seção 4 — Equivalência entre as Energias Mecânica e Térmica

Seção 5 — Fluxo de Calor

Seção 6 — Relação Quantitativa entre Dissipação de Energia e Elevação de Temperatura

Seção 7 — Conservação da Energia

FINALIDADE. Estas seções desenvolvem o princípio da equivalência entre energia mecânica e energia térmica.

ÊNFASE. Êstes tópicos são todos importantes e interessantes, mas os principais pontos, envolvendo a conservação de energia, já foram dados anteriormente. Portanto, o tempo requerido para esta matéria depende, principalmente, do progresso global dentro do seu plano de curso.

LABORATÓRIO. A Experiência III-14 tem por finalidade dar aos alunos uma idéia de situações em que alguma energia cinética mecânica é convertida em calor.

FILMES. "Mechanical and Thermal Energy" e "Conservation of Energy" podem ser projetados com proveito, durante o estudo destas seções.

DESENVOLVIMENTO. Para fornecer aos alunos uma boa noção do valor do equivalente mecânico de calor, você poderá pedir-lhes que resolvam alguns problemas simples de equilíbrio de energia. Por exemplo: "Que altura pode um homem de 50 kg subir, com a energia de uma fatia de pão?" Suponha que haja, aproxi-

madamente, 100 quilocalorias ou $4{,}2 \times 10^5$ joules numa fatia de pão. Então, o homem pode aumentar sua energia potencial de uma quantidade $mgh = 4{,}2 \times 10^5$ joules, comendo "uma fatia de pão". Resolvendo, $h = \frac{50 \times 9{,}8}{4{,}2 \times 10^5} \approx$ $\approx$ 850 m, uma bela subida! (As pessoas gordas podem ver por que é melhor não comer esta fatia de pão, do que depois ter que gastá-la na subida!) Veja Problema 15 no CCL.

Os alunos (pelo menos, os que não fazem exercício violentos) desejarão saber para onde vai tôda a energia do alimento diário, cêrca de 2 000 quilocalorias. Felizmente (para os preguiçosos), a maior parte dessa energia é consumida a fim de nos mantermos vivos e aquecidos, conservando nosso coração e nossos pulmões em funcionamento, bem como o nosso cérebro. Para uma pessoa média, esta quantidade básica é de, aproximadamente, 100 watts (10^2 joules/s, ou cêrca de $8{,}6 \times 10^6$ joules por dia). Como esta energia é quase a fornecida por 2 000 quilocalorias por dia, podemos manter nosso pêso, sem subir dez montanhas por dia.

COMENTÁRIOS. Como mostra o filme "Conservation of Energy", as grandes indústrias mantêm um registro completo de energia. Numa usina elétrica, que emprega água como refrigerador, conhece-se as temperaturas de entrada e saída da água, as temperaturas dos gases da chaminé, o aquecimento dos geradores e o valor da energia de seus combustíveis. Naturalmente, êles também mantêm um registro preciso da energia elétrica fornecida aos consumidores. Se os alunos não assistiram ao filme, talvez se interessem em visitar uma usina local, a fim de ver como tais "contabilidades de energia" podem ser efetuadas.

° ° °

Para os físicos profissionais, em sua maioria, não há outro conceito, em Física, com uma magnificência igual à da lei da conservação de energia. Tôdas as interações no universo estão inter-relacionadas através dessa lei de estrutura quantitativa. Porém, mesmo esta lei, como tôdas as leis físicas, baseia-se em observações experimentais. É possível que, em todo o universo, do qual observamos com exatidão apenas uma pequena fração, a energia não se conserve. Embora tal possibilidade não possa ser excluída, deve-se compreender que uma observação válida de não conservação de energia seria mais do que uma pequena perturbação na Física. Nossas idéias fundamentais sôbre espaço e tempo estão intimamente ligadas à nossa crença na conservação de energia, e uma modificação nesta "lei" provocaria uma enorme revolução na Física. (Veja os Apêndices 11,12 e 13, no fim dêste volume).

PROBLEMAS COMPLEMENTARES 1. Se a energia de uma fatia de pão (100 quilocalorias) fôr convertida em calor e empregada para elevar a temperatura de 2 litros de água, de uma temperatura inicial de 10° C, qual será a temperatura final da água?

1 quilocaloria elevará a temperatura de 1 litro de água, de 1°C. Então, 100 quilocalorias aumentarão a temperatura de 2 litros de água para 50°C. Logo, a temperatura final será 60°C.

2. Um estudante do curso secundário consome 2 000 quilocalorias de alimento em um dia. Se êle não necessitasse de energia a fim de manter seu corpo em funcionamento e convertesse integralmente esta quantidade em trabalho útil, a que altura poderia levantar uma massa de 100 kg com esta quantidade de energia?

$$\begin{aligned} 2\,000 \text{ quilocalorias} &= 2 \times 10^6 \text{ cal} = \\ &= 8{,}4 \times 10^6 \text{ joules} \\ &= 8{,}4 \times 10^6 \text{kg m}^2/s^2 \\ &= 100 \times 9{,}8 \times h. \\ h &= 8{,}6 \times 10^3 \text{ metros.} \end{aligned}$$

3. Quanta energia é liberada, quando 100 gramas de água se esfriam de 90°C a 25°C? Expresse sua resposta em joules.

$90°C - 25°C = 65°C$

$100g \times 65°C \times 1 \text{ caloria/g°C} = 6{,}5 \times 10^3 \text{ cal}$

$= 6{,}5 \times 10^3 \text{cal} \times 4{,}2 \text{ joules/caloria}$

$= 2{,}73 \times 10^4$ joules.

4. $2{,}1 \times 10^3$ joules de trabalho são realizados no aquecimento de 500 gramas de água. Se a temperatura inicial da água fôr 10°C, qual será a sua temperatura final?

$2{,}1 \times 10^3$ joules $= \frac{2{,}1}{4{,}2} \times 10^3$ calorias $=$ $= 5 \times 10^2$ calorias, que levarão de 1°C a temperatura de 500 g de água. $T_f = 11°$ C.

5. Uma massa de 20 kg, movendo-se a uma velocidade de 10 m/s, choca-se com uma outra de 5 kg, que estava inicialmente em repouso. As duas massas juntam-se, formando um único corpo, após a colisão.

(a) Qual é a velocidade final do conjunto?
(b) Qual era a energia cinética inicial do sistema?
(c) Qual é a energia final *total* do sistema?
(d) Quantas calorias foram produzidas na colisão?

a. $p_i = 20$ kg $\times$ 10 m/s $= 200$ kg m/s.
$p_f = 200$ kg m/s $= 25$ kg $\times$ v_f,
$v_f = 8$ m/s.

b. $(E_c)_i = \frac{1}{2} \times 20 \times (10)^2 = 10^3$ joules.

c. $(E)_f = 10^3$ joules, pela conservação de energia.

d. $(E_c)_f = \frac{1}{2}\ 25 \times (8)^2 = 800$ joules,
Calor $= (E)_f - (E_c)_f = 200$ joules $=$
$= \frac{200}{4{,}2} = 48$ calorias.

6. O aquecedor de água deixa de funcionar e um homem deseja aquecer água para o seu banho, de 25° C a 35° C. A banheira contém 30 kg de água. Quanto tempo necessitará o homem, para aquecer a banheira, se usar um remo de canoa que se movimentará através da água à razão de um metro por segundo, exercendo uma fôrça média de 30 newtons? Suponha que todo o trabalho efetuado resulte no aquecimento da água.

Trabalho $=$ 30nt $\times$ 1 m/s $\times$ T (segundos) $=$
$=$ 30 T joules.

Calor $=$ (35°C $-$ 25°C) 30 $\times$ 10^3 $=$
$= 3 \times 10^5$ calorias $= 12{,}6 \times 10^5$ joules.

$12{,}6 \times 10^5$ joules $=$ 30 T joules.
$T = 4{,}2 \times 10^4$ segundos (aproximadamente, 12 horas).

PARA CASA, CLASSE E LABORATÓRIO — RESPOSTAS DOS PROBLEMAS

Alguns problemas dêste capítulo tratam qualitativamente transformações de energia em sistemas, tais como motores a gasolina e metralhadoras. A discussão de alguns dêstes problemas proporcionarão um meio efetivo de fazer com que os alunos compreendam o conceito de calor como energia cinética do movimento molecular. Os problemas adequados para êsse fim são os de números 1, 4, 10, 21 e 22. Os Problemas 7 e 8, envolvendo o comportamento de um gás ideal, e os Problemas 16 e 19, relativos ao equivalente mecânico de calor, são interessantes e deverão ser dados se você dispuser de tempo suficiente. Os alunos acharão o Problema 5 mais fácil, se fôr precedido pelo Problema 4.

A tabela a seguir classifica os problemas de acôrdo com o seu nível avaliado de dificuldade e as seções a que se referem. Estão indicados os que são especialmente adequados para discussão em classe e projetos para casa. Os problemas particularmente recomendados estão marcados com um asterisco (*).

RESPOSTAS ABREVIADAS

1. (a) 20 newtons.
   (b) $1{,}8 \times 10^5$ joules.
   (c) 10 joules/metro.
2. (a) Menor (a metade).
   (b) Indefinida.
3. (a) $6{,}15 \times 10^{-21}$ joules.
   (b) 20,6 joules.
4. Veja discussão.
5. (a) 25 joules.
   (b) 275° K.
6. Aumenta de 2%.
7. (a) $V_2 = 3{,}06 \times 10^{-2} m^3$.
   (b) $3{,}12 \times 10^3$ joules.
   (c) $4{,}4 \times 10^4$ joules.
   (d) 1/14.
8. (a) $4{,}8 \times 10^2$ m/s.
   (b) $1{,}9 \times 10^3$ m/s.
   (c) Quase a mesma.
   (d) $4{,}8 \times 10^2$ m/s.
   (e) A mesma.

Seções	Fácil	Médio	Difícil	Discussão em classe	Projetos para casa
1		1*	2	2	
2	4*	3*, 5, 6*	7, 8	4	
3	9	10*		10	
4	11 16				12, 13, 14, 15
5 6	17. 18	19, 20			
7	16	10 21*, 25	22* 23, 24	10, 21 22	15, 26, 27

9. (a) Veja discussão.
   (b) (i) 450 joules.
   (ii) 2,25 joules.
   (iii) 447,75 joules.
   (c) 99,5 %.
10. Veja discussão.
11. 0,38°C.
12. Um projeto para casa.
13. Um projeto para casa.
14. Um projeto para casa.
15. Um projeto para casa.
16. (a) 600 newtons.
   (b) Veja discussão.
   (c) Veja discussão.
17. (a) 820 m/s.
   (b) Nenhuma.
   (c) Veja discussão.
18. 2,95 g.
19. (a) 2×10^6 joules.
   (b) 8×10^6 joules.
   (c) 4×10^6 calorias.
   (d) Veja discussão.
20. (a) 35°C.
   (b) 35°C.
   (c) Menor que 35°C.
   (d) Veja discussão.
21. (a) Energia potencial química.
   (b) Veja discussão.
   (c) Veja discussão.
22. Veja discussão.
23. Veja discussão.
24. Veja discussão.
25. (a) —70 m/s.
   (b) 9×10^5 joules;
   $2{,}7 \times 10^7$ joules;
   $0{,}37 \times 10^7$ joules.
   (c) Veja discussão.
26. Um projeto para casa.
27. Um projeto para casa.

COMENTÁRIOS E SOLUÇÕES

PROBLEMA 1

Uma metralhadora atira um feixe de balas de 10 gramas cada uma, à razão de 400 por minuto. As balas, movendo-se à velocidade de 300 m/s, atingem um muro de rocha maciça e nêle se enterram. Calcule:

(a) A fôrça sôbre o muro.

(b) A energia cinética total das balas que chegam ao muro durante um minuto.

(c) A energia cinética total das balas situadas ao longo de 1 m do feixe, quando se aproximam do muro. Duplique o valor obtido neste ítem e compare-o com o do ítem (a).

a) Cada bala perde uma quantidade de movimento $mv = 10^{-2}\,\text{kg} \times 300\ \text{m/s} = 3\ \text{kg m/s}$. A razão de variação da quantidade de movimento da rajada de balas, em um segundo (400 balas/min = 6,67 balas/segundo), é:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 6{,}67/\text{s} \times 3\ \text{kg m/s} = 20\ \text{kg m/s}^2.$$

A fôrça média é obtida diretamente desta razão de variação da quantidade de movimento:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 20 \text{ kg m/s}^2 = 20 \text{ newtons.}$$

b) A energia cinética de cada bala é:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times (300)^2 \text{ joules} = 450 \text{ joules.}$$

Em um minuto, 400 balas atingem o muro. Sua energia cinética total é:

$$400 \times 450 \text{ joules} = 1{,}8 \times 10^5 \text{ joules.}$$

c) As balas são disparadas com uma velocidade de 300 m/s ou 18 000 metros/minuto. Porém, 400 balas são atiradas no intervalo de um minuto; logo, o número médio de balas em um metro de intervalo é:

$$\frac{400 \text{ balas/min}}{18\,000 \text{ metros/min}} = \frac{1}{45} \text{ balas/metro.}$$

Como cada bala possui uma energia cinética de 450 joules, a energia cinética ao longo de um metro é:

$$450 \text{ joules/bala} \times \frac{1}{45} \text{ balas/metro} = 10 \text{ joules/metro.}$$

O dôbro disto é 20 joules/metro = 20 newtons (pois 1 newton-metro = 1 joule).

* * *

Nota: Esta última observação ilustra a relação dada na página 141 do texto.

$$P = mv^2 \frac{N}{V}.$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por A, teremos:

$$PA = F = mv^2 \frac{NA}{V} = m v^2 \frac{NA}{LA} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} m v^2\right)\frac{N}{L},$$

onde L é o comprimento do percurso no qual se encontram N partículas.

PROBLEMA 2

Suponha que, na parede de um recipiente que contém gás, há uma pequena região capaz de prender as moléculas que aí chegam.

(a) A pressão aí é maior ou menor do que no restante da parede?

(b) Se a região pegajosa fôr retirada, deixando-se aí um orifício, qual a pressão nesse orifício?

Prepare-se para discutir em classe sua resposta.

As duas situações hipotéticas apresentadas neste problema estimulam a pensar nos gases, em têrmos de movimento de moléculas.

a) Se a região pegajosa da parede fôsse igual ao restante da parede, a fôrça que esta exerceria sôbre as moléculas que se aproximassem seria suficiente para *inverter* a componente da quantidade de movimento, perpendicular à parede. Ao contrário, se a superfície fôr *pegajosa,* após o choque, as moléculas permanecerão na superfície, a variação da quantidade de movimento das moléculas será reduzida à *metade,* e a fôrça (conseqüentemente, a pressão) na parte pegajosa ficará também reduzida à *metade.*

b) A expressão "pressão no orifício" tem muito pouco significado. Quando falamos da pressão sôbre uma região da parede, referimo-nos à fôrça sôbre essa região dividida pela área da mesma. Òbviamente, não há fôrça atuante onde não há uma parede para empurrar; portanto, não há pressão no sentido em que comumente a entendemos.

(*Nota:* A pressão contra as paredes de um recipiente depende da massa e da velocidade média das moléculas do gás, sendo estas quantidades as mesmas em qualquer parte, no interior do recipiente. É conveniente ampliar nossa definição de pressão, a fim de incluir o conceito de *pressão* do gás, uma propriedade existente em qualquer ponto do seu volume. Imaginemos agora um dispositivo medidor de pressão, constituído de uma pequena caixa onde se produziu o vácuo, com uma das paredes móvel, ligada a uma balança de mola. Esta caixa é colocada em qualquer ponto no interior do gás, podendo-se medir a fôrça sôbre a parede. Êste instrumento deve medir a pressão do gás no orifício).

PROBLEMA 3

Em certo gás, 2/5 da energia das moléculas são ligados ao movimento dos átomos girando uns em tôrno dos outros e 3/5 ao movimento dos centros de massa.

(a) Em média, qual é a energia cinética do movimento do centro de massa de uma dessas moléculas, quando a temperatura é de 300°K?

(b) Se a temperatura aumenta de 1°C, que quantidade de energia deve ser fornecida a 1 mol ($0{,}6025 \times 10^{24}$ moléculas) do gás?

a) A temperatura mede sòmente a energia cinética média do *centro de massa* das moléculas. Numèricamente,

$$E_c = \frac{3}{2}(1{,}37 \times 10^{-23})\,T = 6{,}15 \times 10^{-21} \text{ joules.}$$

b) A informação é de que esta é apenas 3/5 da energia cinética real. Os outros 2/5 subsistem sob a forma de energia cinética rotacional. Quando elevamos a temperatura do gás de 1°K, a energia cinética do centro de massa e a energia de movimento em tôrno do centro de massa aumentam simultâneamente. Para o centro de massa, $E_c = 3/2\ kT$, e para uma elevação do 1° na temperatura, $\triangle E_c = \frac{3}{2}\ k$. A energia cinética total de uma molécula será, portanto, aumentada de:

$$\frac{5}{3} \times \frac{3}{2}\,k = \frac{5}{2}\,k.$$

A fim de provocar uma elevação de 1°K de temperatura em $0{,}6025 \times 10^{24}$ moléculas do mol do gás, o acréscimo necessário de energia será:

$$0{,}6025 \times 10^{24} \times \frac{5}{2}\,k \text{ joules} = 20{,}6 \text{ joules.}$$

PROBLEMA 4

Um gás num cilindro empurra para fora um pistão, aumentando seu volume de $\triangle V$. O pistão tem área A e o gás exerce sôbre êle a pressão P. A fôrça exercida pelo gás move o pistão de uma distância $\triangle x$, transferindo a energia $F\triangle x$ a uma máquina externa. Mostre que o trabalho $F\triangle x$ é igual a $P\triangle V$.

Nota: Esta expressão é muito útil, quando trabalhamos com gás ou líquido que movem um pistão: o trabalho é igual à pressão vêzes a variação de volume.

A *fôrça* F sôbre o pistão é PA, onde A é a área do pistão. Quando o pistão se move para fora, de uma distância $\triangle x$, o trabalho realizado é $F\triangle x$ (fôrça vêzes o deslocamento na direção da fôrça). Assim, $F\triangle x = PA\triangle x$, e, a partir da geometria do pistão, $A\triangle x$ é o volume varrido pela extremidade do pistão; é o acréscimo no volume do gás. Portanto,

$$T = F\triangle x = P\triangle V.$$

(Nota: *De onde veio a energia?* Isto depende do que aconteceu ao gás, enquanto o pistão se movia. Se o cilindro foi completamente isolado de outras fontes de calor (isto é, energia) então, a energia deve ter-se originado do próprio gás, ou seja, da energia cinética das moléculas individuais. *Qual foi o mecanismo exato da transferência de energia?* Quando as moléculas colidem com as paredes do cilindro ou com o pistão quando em repouso, suas componentes da quantidade de movimento, perpendiculares às paredes, são invertidas, as outras componentes permanecem inalteradas e, portanto, sua energia cinética não se modifica. Quando as moléculas colidem com o pistão, *movendo-se para fora*, a componente perpendicular da quantidade de movimento *relativa ao pistão* é invertida, mas sua energia cinética média de movimento é reduzida no interior do cilindro. (Isto é análogo a jogar uma bola de borracha na parte traseira de um caminhão. Se o caminhão não estiver em movimento, a bola, lançada com uma velocidade de 5 m/s, voltará com a mesma velocidade. Contudo, se o caminhão estiver se movendo a 1 m/s, a bola com velocidade de 5 m/s aproxima-se do caminhão com apenas 4 m/s. Esta velocidade é, então, invertida. A bola se afasta do caminhão a 4 m/s, tendo, portanto, uma velocidade final de sòmente 3 m/s, relativamente ao solo. Observada em relação ao solo, a energia cinética da bola diminuiu consideràvelmente, devido à colisão.)

PROBLEMA 5

Um mol de um gás ideal monoatômico (na prática, hélio ou argônio) é colocado num cilindro à temperatura de 273°K. O gás está à pressão atmosférica normal, isto é, $1{,}02 \times 10^5$ newtons/m². A esta pressão e temperatura o gás ocupa $2{,}24 \times 10^{-2}$m³. Empurra-se, então, um êmbolo, de maneira a reduzir o volume em $2{,}45 \times 10^{-4}$m³.

(a) Que trabalho mecânico deve ser realizado para empurrar o êmbolo? (Despreze a variação de pressão).

(b) Qual é a temperatura final do gás, estando o recipiente completamente isolado? (Lembre-se de que 12,4 joules de energia elevam a temperatura do gás de 1°C).

a) A quantidade de trabalho realizado ao empurrar o pistão de uma pequena distância, é $P\triangle V$, onde $\triangle V$ é o decréscimo no volume. (O argumento é o mesmo do Problema 4, exceto que o trabalho deve ser realizado *por* algum agente externo).

$P\triangle V = 1{,}02 \times 10^5 \times 2{,}45 \times 10^{-4}$ (nt/m²) (m³) = = 25,0 joules.

b) Se o recipiente estiver completamente isolado, todo o trabalho realizado sôbre o gás, comprimindo-o (25,0 joules), deve ser transformado em energia cinética das moléculas do gás. As moléculas são, de fato, átomos simples sem energia cinética de rotação; assim, a energia necessária para elevar de 1°K a temperatura de um mol do gás é 12,4 joules. Nossos 25 joules elevarão a temperatura do gás, de $\frac{25{,}0^\circ}{12{,}4}$ K, isto é, um valor maior do que 2°K. A temperatura final será $273^\circ + 2^\circ = 275^\circ$K.

PROBLEMA 6

No Problema 5, de que fração do valor inicial altera-se a pressão?

No Problema 5, determinamos que a temperatura deve variar de 2°K. A equação de estado, para um gás ideal, é PV = NkT. Como N é o mesmo nos estados inicial e final, podemos escrever:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}, \text{ ou } \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} \times \frac{T_2}{T_1}.$$

Com os dados do Problema 5, temos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2{,}24 \times 10^{-2}}{2{,}24 \times 10^{-2} - 2{,}45 \times 10^{-4}} \times \frac{273 + 2}{273}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1 - \frac{2{,}45}{2{,}24} \times 10^{-2}}\left(1 + \frac{2}{273}\right) \approx 1{,}02.$$

Logo, a pressão aumenta, aproximadamente, 2% de seu valor inicial.

PROBLEMA 7

Suponha que tomemos 18 g de água (1 mol) no ponto de ebulição e a transformamos em vapor dentro de um cilindro fechado por um pistão sem atrito e tão leve, que o gás fica sempre à pressão atmosférica.

(a) Que volume ocupará o vapor de água, admitindo que êle se comporta como um gás perfeito? (O vapor de água não é um gás perfeito, mas o êrro devido a essa suposição será inferior a 10%.)

(b) Qual o trabalho realizado ao empurrar o pistão para fora, contra a pressão atmosférica, enquanto tôda a água se vaporiza?

(c) Sabendo que cada grama de água necessita de 540 calorias para afastar suas moléculas umas das outras, quando se transforma em vapor, que quantidade de calor é necessária para transformar a água em vapor e empurrar o pistão para fora?

(d) Que fração da quantidade total de calor converte-se em trabalho, ao empurrar o pistão para fora?

a) Consideremos que o vapor de água se comporta como um gás ideal, isto é, que satisfaz a equação de estado PV = NkT. 18 gramas de

água são iguais a 1 mol, e, sob condições estabelecidas, devem ocupar $2{,}24 \times 10^{-2}\text{m}^3$.

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_1V_2}{T_2}$$

$$V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1} = 2{,}24 \times 10^{-2} \times \frac{373}{273}$$

$$V_2 = 3{,}06 \times 10^{-2}\text{m}^3.$$

b) O trabalho efetuado, ao empurrar o pistão para fora de um pequeno volume $\triangle V$, foi demonstrado ser $P\triangle V$, no Problema 4. Aqui, P é constante durante tôda a expansão; assim, o trabalho total realizado é sòmente P × (variação total de volume). Como o volume inicial é, aproximadamente, 18 cm^3 (há 18 gramas de água e sua densidade é de $1\,\text{g/cm}^3$) ou $1{,}8 \times 10^{-5}\text{m}^3$, não precisamos considerar o volume inicial. Assim, o trabalho total realizado é:

$P\triangle V = 1{,}02 \times 10^5 \times 3{,}06 \times 10^{-2} = 3{,}12 \times 10^3$ joules.

c) Cada grama de água requer 540 calorias ou $540 \times 4{,}2 = 2{,}27 \times 10^3$ joules, para vaporizar-se. A energia total necessária, a fim de vaporizar 18 gramas de água, é:

$18 \times 2{,}27 \times 10^3$ joules $= 4{,}1 \times 10^4$ joules.

A energia total necessária, incluindo o trabalho efetuado pela expansão do vapor, é:

$(4{,}1 \times 10^4) + (3{,}1 \times 10^3) = 4{,}4 \times 10^4$ joules.

d) A fração do calor total fornecido, transformada em trabalho, é:

$$\frac{3{,}1 \times 10^3}{4{,}4 \times 10^4} = \frac{1}{14}.$$

O restante da energia é necessário para separar as moléculas de água, isto é, para superar a forte atração entre as moléculas de água no estado líquido.

PROBLEMA 8

(a) Calcule aproximadamente a velocidade das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente, a partir dos seguintes dados: 32 gramas de oxigênio à temperatura ambiente (20°C), e à pressão de 1 atmosfera ($1{,}02 \times 10^5$ newtons/$/\text{m}^2$) ocupam $2{,}4 \times 10^{-2}\text{m}^3$.

(b) O mesmo volume de hidrogênio, à mesma temperatura e pressão, pesa apenas 2 g. Avalie a velocidade média das moléculas de hidrogênio à temperatura ambiente.

(c) A partir de sua resposta ao ítem (a), avalie a velocidade média das moléculas de nitrogênio à temperatura ambiente, *com uma margem de êrro de 10%.*

(d) Qual a velocidade média das moléculas de ar à temperatura ambiente (com a mesma margem de êrro)?

(e) Qual a velocidade das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente e à pressão de 2 atmosferas?

a) Na Seção 1, foi deduzida a seguinte equação relacionando P, N, V e a energia cinética molecular:

$$P = \frac{N}{V}\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\,m\,v^2\right).$$

Neste problema, temos 32 gramas ou um mol de oxigênio; portanto, N é o número de Avogadro. Da equação acima, podemos escrever:

$$v = \left(\frac{3PV}{Nm}\right)^{1/2}.$$

Sabemos que P = 1 atmosfera = $1{,}02 \times 10^5$ nt/m^2, e $V = 2{,}4 \times 10^{-2}\text{m}^3$. As outras quantidades na expressão podem ser obtidas, quando consideramos que Nm, o número de moléculas num mol de um gás, multiplicado pela massa de cada molécula, é, exatamente, a massa de um mol do gás. Isto resulta em 32 gramas = $= 3{,}2 \times 10^{-2}$ kg. A velocidade média é, então, fornecida por:

$$v = \left(\frac{3 \times 1{,}02 \times 10^5 \times 2{,}4 \times 10^{-2}}{3{,}2 \times 10^{-2}}\right)^{1/2} \text{m/s}$$

$$= (2{,}3 \times 10^5)^{1/2}\ \text{m/s}$$

$$= 4{,}8 \times 10^2\ \text{m/s}.$$

b) Para um mol de hidrogênio sob as mesmas condições, podemos proceder da mesma forma. Contudo, é um pouco mais simples utilizar um argumento ligeiramente diferente. À mesma *temperatura*, a energia cinética média de translação do hidrogênio é idêntica à do oxigênio:

$$\frac{1}{2}\, m_H\, v_H^2 = \frac{1}{2}\, m_O\, v_O^2.$$

Logo, $v_H/v_O = \sqrt{m_O/m_H} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4.$

$v_H = 4\, v_O = 1{,}9 \times 10^3$ m/s.

c) A massa de um mol de nitrogênio é 28 g. Usando o argumento da parte (b), $\frac{V_N}{V_O} = (32/28)^{1/2} = 1{,}07$. Logo, *dentro dos 10%*, êles são iguais.

d) O ar é composto, principalmente, de oxigênio e nitrogênio (na razão de 20%: 80%). Como as velocidades de suas moléculas são as mesmas, dentro dos 10%, a velocidade média para as moléculas do ar é, nesta aproximação, a mesma que a obtida na parte (a), isto é:

$$v_{med} = 4{,}8 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

e) Na parte (a), determinamos a velocidade das moléculas de oxigênio, na temperatura ambiente e à pressão de uma atmosfera. A energia cinética das moléculas de ar depende sòmente de T; assim, *a velocidade média será a mesma*, apesar da pressão haver sido duplicada, uma vez que T é o mesmo (como neste caso). Na expressão empregada na parte (a), P é duplicado, enquanto (devido à equação de estado) V é reduzido à metade, e PV permanece constante.

PROBLEMA 9

Suspenso a uma árvore por uma corda longa, está um fardo de areia, contra o qual se atira um projétil, que nêle se aloja.

(a) Descreva as transformações de energia.

(b) Suponha que um projétil de 10 g se move a 300 m/s quando atinge um fardo de areia cuja massa é 1990 g. Calcule a quantidade de energia cinética:

(i) Que o projétil tinha inicialmente.

(ii) Que o projétil e o fardo têm, após a colisão.

(iii) Que desaparece.

(c) Que fração da energia cinética inicial do projétil transforma-se em calor?

a) As complicações que ocorrem com a energia na arma, etc, são discutidas no Problema 10. As principais partes da sequência da transferência de energia são:

(i) A energia cinética da bala transforma-se em:

(iia) Calor da bala e da areia que a circunda, após a bala ficar em repouso, e

(iib) em energia cinética do fardo mais a bala. O fardo oscila e realiza um processo cíclico, com a energia cinética transformando-se em energia potencial gravitacional, e vice-versa.

Lentamente, êste movimento cessará devido ao atrito com o ar, e a energia transformar-se-á em:

(iii) Energia calorífica do fardo, de seu conteúdo e do ar que o circunda.

b) (i) Inicialmente, a energia cinética da bala é:

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}010 \times (300)^2 = 450 \text{ joules}.$$

(ii) Durante a colisão da bala com o fardo, *a quantidade de movimento* não varia. (O que acontece também com a *energia*, se incluirmos a energia calorífica, mas a energia mecânica do movimento como um todo não se conserva). Se, após a colisão, bala e fardo movem-se com uma velocidade v',

$$m\, v = (m + M)\, v'.$$

$$v' = \frac{m\, v}{m + M} = \frac{0{,}010 \times 300}{1{,}990 + 0{,}010}$$

$= 1{,}50$ m/s.

A energia cinética do fardo mais a bala é:

$$\frac{1}{2}\,(m + M)\, v'^2 = \frac{1}{2} \times 2{,}000 \times 1{,}50^2 =$$

$= 2{,}25$ joules.

(iii) Antes da colisão, a bala tinha uma energia cinética de translação de 450 joules. Após a colisão, sòmente 2,25 joules permaneceram sob a forma de energia cinética do movimento como um todo. 447,75 joules aparentemente desapareceram. Esta energia se transformou, principalmente, em calor da bala e da areia que imediatamente a circunda. Uma pequena parte transforma-se em energia potencial da separação das partículas de areia, agitadas pela passagem da bala. Uma quantidade desprezível transforma-se em som, que é ràpidamente dissipado como calor.

c) Se considerarmos que tôda a energia "perdida" se transforma em calor, obteremos a fração da energia inicial que se transforma em calor: $\frac{447{,}75}{450} = 99{,}5\%$.

PROBLEMA 10

Uma metralhadora dispara balas de chumbo contra um muro; ao chocar-se contra o muro, elas param sùbitamente e caem ao chão. Descreva as transformações de energia, desde o estágio em que tôda a energia está na pólvora, até aquêle em que as balas estão no solo, ao pé do muro, depois de várias horas.

Os estágios da seqüência de transformação da energia são:

(i) Energia química da pólvora.

(ii) Energia cinética do movimento térmico dos gases gerados no processo químico.

(iii) Energia cinética do movimento como um todo, da bala, mais a energia do movimento de recuo da metralhadora.

(iv) Calor e som no ar, devido à passagem da bala, e som quando a bala se choca contra a parede.

(v) Calor e energia potencial da deformação da bala e da região atingida na parede.

(vi) Aquecimento do ar nas proximidades, durante o esfriamento da bala e da parede.

Desprezamos a energia potencial como um todo, considerando que a bala percorreu uma pequena distância suficientemente horizontal. E ainda consideramos que a bala cai sòmente alguns decímetros, após chocar-se contra a parede, desprezando-se, assim, essa energia.

A transformação de (i) para (ii) envolve o rearranjo dos elementos na pólvora, a fim de formar moléculas mais estreitamente ligadas. A energia potencial de todo o sistema é reduzida, e a energia liberada aparece como movimento térmico dessas moléculas.

De (ii) para (iii), os gases aquecidos expandem-se, a fim de realizar o trabalho $\int PdV$ sôbre a bala, comunicando-lhe energia cinética. Todavia, nem tôda a energia térmica dos gases é transmitida. Quando a bala sai pelo cano da metralhadora, os gases também saem ràpidamente e se misturam com o ar que os circunda, aquecendo-o, enquando se esfriam.

As transformações da energia no estágio (iv) reduzem a energia cinética da bala, durante o percurso. Movendo-se no ar, a bala gera uma onda de choque, um pulso de pressão muito intensa. Tal onda, deslocando-se no ar, deixa-o com uma temperatura ligeiramente mais alta.

A transformação de (iv) para (v) é a mais repentina. A bala pode ser levada ao repouso em apenas um centímetro, ao passo que foi acelerada numa distância de quase um metro. A bala fica, assim, bastante deformada, e há produção de calor, devido ao movimento relativo e violento dos átomos do chumbo.

Tôda esta energia teve origem no processo químico da explosão. Pode pedir à classe para refletir de onde proveio, realmente, esta energia. Levante uma discussão de extensão arbitrária, sôbre os problemas da extração dos elementos da pólvora dos lugares onde são são encontrados. Como êles chegaram lá? Tudo pode ser delineado da energia do Sol; todavia, isto está muito além da pretensão dêste livro. Os Problemas 12,17 e 18 fornecem maior prática quantitativa sôbre transformações de energia e equivalente mecânico de calor.

PROBLEMA 11

Em uma de suas experiências mais famosas, Joule agitava a água com uma roda munida de pás, por meio de dois objetos que caíam. Cada objeto tinha massa de 14 kg e caía verticalmente de cêrca de 2 m de altura. Havia cêrca de 7 kg de água a ser aquecida. Após cada descida dos objetos, êle os elevava e os deixava cair de nôvo. Que aumento de temperatura seria de esperar, após vinte quedas?

Nota: Êste problema representa uma inversão da seqüência da notável experiência de Joule. *Você* sabe que 4,2 joules sempre aumentarão de 1°C a temperatura de 1 grama de água. Joule estava tentando descobrir isso.

Em cada queda, a perda de energia potencial das duas massas é 2 mgh $= 2 \times 14 \times 9{,}8 \times 2 = 550$ joules. O processo é repetido vinte vêzes; a perda total de energia potencial é $20 \times 550 = 1{,}1 \times 10^4$ joules. Suponha que tudo isto seja transformado em energia térmica da água. A quantidade de energia, necessária para elevar de 1° a temperatura de 7 kg de água, é $7 \times 10^3 \times 4{,}2 = 2{,}9 \times 10^4$ joules. Por isso, $1{,}1 \times 10^4$ joules, fornecidos pelas massas em queda, elevarão a temperatura de

$$\frac{1{,}1 \times 10^4}{2{,}9 \times 10^4} \times 1^\circ = 0{,}38^\circ\text{C}.$$

(De onde proveio a energia? Veio do infortunado auxiliar de laboratório que teve de ficar levantando as massas, depois de cada queda).

PROBLEMA 12

Um projeto:

(a) Faça ou obtenha uma pequena mola de fio de aço. Estique-a e solte-a muitas vêzes. Encoste-a a seu rôsto para sentir se ela se tornou mais quente.

(b) Faça uma mola semelhante de fio de cobre macio e repita a experiência.

Nota: Se você esticar demais a mola, comprima-a de nôvo, juntamente bem as expiras.

Nenhum aquecimento apreciável será percebido na mola de aço, mas a "mola" de cobre tornar-se-á sensìvelmente aquecida, após dez ou vinte rápidas flexões. Para evitar a deformação da mola de cobre, você poderá enrolá-la em tôrno de um bastão liso de vidro e, depois, comprimir e descomprimir a mola, mantendo-a no bastão. Através da verificação de que o bastão de vidro não se aquece muito, você poderá concluir que o aquecimento da mola não é causado pelo atrito com o vidro. Uma demonstração ainda mais simples do efeito é segurar um pedaço de fio de cobre e tentar quebrá-lo em dois, dobrando-o repetidamente. Tenha cuidado, quando testar a temperatura no ponto em que o cobre se quebra, pois êste pode estar suficientemente quente, a ponto de queimá-lo.

Êste efeito pode ser explicado, em têrmos do trabalho realizado sôbre as molas. A mola de *aço é* (baseando-se no que dissemos até aqui) perfeitamente elástica. A fôrça que deve ser exercida sôbre a mola depende apenas da deformação. Todo o trabalho realizado sôbre a mola, ao distendê-la, é devolvido a você, quando ela se contrai. Não há trabalho resultante efetuado, nenhuma energia é perdida, e nenhum calor foi desenvolvido. Contudo, quando se trata da mola de *cobre*, você a distente e ela permanece com esta nova forma. Deve-se exercer uma fôrça para comprimi-la novamente. Assim, há uma quantidade resultante de trabalho em um ciclo, e isto deve aparecer em forma de calor. O cobre fica mais quente.

PROBLEMA 13

Um projeto: dê várias marteladas violentas e rápidas num pequeno bloco de chumbo, apoiado em um bloco firme de ferro ou pedra. Sinta a temperatura do chumbo antes e depois. Faça estimativas grosseias da energia cinética perdida pelo martelo e da energia térmica ganha pelo chumbo. (Admita que 1 kg de chumbo necessita cêrca de 130 joules para aumentar de 1°C sua temperatura.)

Mais ou menos dez batidas violentas com o martelo produzirão uma elevação apreciável na temperatura (da ordem de 10°). A explicação é análoga, em princípio, a dada no Problema 12. A energia cinética do martelo (que provém dos músculos do aluno) é absorvida pelo chumbo, que é deformado. Esta energia aparece sob a forma de calor.

Fazendo-se uma estimativa, por alto, da energia cinética perdida pelo martelo, será mais fácil calcular a fôrça exercida sôbre o martelo (se o abandonássemos, a fôrça seria o seu pêso), como também o trabalho efetuado e, finalmente, sua energia cinética após as marteladas, ao invés de calcular a velocidade do martelo diretamente e computar $1/2\ mv^2$. O fornecimento de energia, quando obtida desta maneira, deve concordar, dentro de um fator dois, com a

energia inerente à medida da elevação de temperatura.

PROBLEMA 14

Um projeto:

(a) Com uma batedeira elétrica, agite uma quantidade conhecida de água durante 5 minutos. (Se você colocar a água numa caneca de alumínio, deverá considerar também o aquecimento da caneca. 1000 gramas de alumínio absorvem o mesmo calor que 200 g de água. Um modo engenhoso de evitar um recipiente que absorva calor é colocar a água num saco de plástico, como os usados nos congeladores — mas isso pode complicar as coisas se a parte móvel da batedeira tocar no plástico).

(b) Repita a experiência, ligando a batedeira durante 10 minutos; e depois, usando metade ou o dôbro da quantidade de água. Em cada caso, avalie o calor liberado pela batedeira, por minuto.

Experiências sôbre o equivalente mecânico de calor são muito difíceis de serem efetuadas com exatidão. A esperada elevação na temperatura, devido ao trabalho realizado sôbre a água, é muito pequena e pode fàcilmente ser confundida com outras trocas de calor. Nesta particular montagem experimental, e com água à temperatura ambiente (para evitar o aquecimento ou o resfriamento comum, devido ao contato com o ar) é difícil evitar uma *queda* na temperatura. Isto provàvelmente deve ser causado pelo aumento na evaporação, como conseqüência da agitação da água. Se o vasilhame estiver bem fechado, êste efeito será mínimo.

PROBLEMA 15

Um projeto: avalie a energia liberada durante 5 minutos por uma pequena lâmpada elétrica de potência conhecida.

(a) Faça isso experimentalmente, acendendo a lâmpada mergulhada em tinta de escrever; (por que tinta?). (Você pode usar uma lâmpada de automóvel, ligada a uma bateria de 6 volts. Não use uma lâmpada de alta voltagem, devido ao perigo de choque!)

(b) Calcule a mesma energia usando seus conhecimentos: note que 1 quilowatt hora, que está custando cêrca de sete centavos equivale a $3{,}6 \times 10^6$ joules.

a) A lâmpada é imersa em tinta para que a maior parte da radiação seja absorvida, em vez de ser transmitida (o que aconteceria com a água).

b) Com a montagem do enunciado, a elevação obtida na temperatura concorda com a medida fornecida dentro de um fator dois. Para uma lâmpada de 15 watts, a energia total fornecida em 5 minutos é 0,015 quilowatts $\times$ $\times$ 5/60 horas $= 1{,}25 \times 10^{-3}$ quilowatt-horas. Cada quilowatt-hora é $3{,}6 \times 10^6$ joules; assim, a energia consumida seria $1{,}25 \times 10^{-3} \times 3{,}6 \times$ $\times 10^6 = 4\,500$ joules. Se usarmos aproximandamente 100 cm³ de tinta, a elevação na temperatura será cêrca de

$$\frac{4\,500}{100 \times 4{,}2} \approx 11^{\circ}\text{C}.$$

PROBLEMA 16

Um nadador de alta velocidade despende 120 000 joules numa competição de meio minuto. Três quartos dessa energia são liberados como calor perdido; o restante é dissipado por suas mãos e pernas, em trabalho mecânico.

(a) Em 30 segundos, êle nada 50 metros. Avalie a fôrça média que se opõe a seu movimento.

(b) Descreva as transformações da energia durante a natação.

(c) Onde e sob que forma se encontrará a energia liberada, quando tiver terminado a competição?

a) Se a fôrça média, que se opõe ao movimento do nadador na água, é F newtons, nadando 50 metros contra esta fôrça, êle realiza um trabalho igual a $Fx = 50F$ joules. Emprega 120 000 joules dos quais sòmente um quarto, isto é, 30 000 joules se transformam em trabalho mecânico útil. Logo, a fôrça média em oposição ao seu movimento é:

$F = 30\,000$ joules/50 m $= 600$ newtons.

b) A energia química do alimento é transrmada em energia mecânica, por seus músllos. Naturalmente, as energias cinética e otencial do nadador permanecem constantes, ois sua velocidade é, aproximadamente, consnte e êle nada na superfície da água; porém, sua energia calorífica aumenta. Assim, todo trabalho que efetua se transforma em calor. ma parte da energia, inicialmente, transforma-e em energia cinética do movimento turbunto da água por onde êle passa e, como êste ovimento vai gradualmente amortecendo, a ua fica com uma temperatura um pouco mais evada.

c) Isto já foi respondido em (b): a energia erada termina em calor; a água na piscina tá ligeiramente mais quente. Numa piscina dimensões comuns (25 m × 15 m × 3 m), ntendo aproximadamente 10^6 kg de água, a evação de temperatura causada pela adição de 20 000 joules seria de

$$\Delta t = \frac{120\,000}{4{,}2 \times 10^3 \times 10^6} = 3 \times 10^{-5}\ ^\circ\text{K}.$$

ROBLEMA 17

(a) Com que velocidade deve ser lançado um bloco de gêlo de 2 kg, a 0°C, contra um muro de pedra, de modo que tôda a massa se funda com o choque? (1 kg de gêlo necessita de $3{,}36 \times 10^5$ joules para fundir-se).

(b) Se a massa do bloco de gêlo for outra, como se modifica a resposta ao ítem anterior?

(c) O que torna irreal êste problema?

a) A energia necessária para fundir m kg gêlo é $3{,}36 \times 10^5$m joules. Esta energia é prida pela energia cinética do gêlo; assim,

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = 3{,}36 \times 10^5\, m \text{ joules}.$$

ortanto, $v = \sqrt{2 \times 3{,}36 \times 10^5} = 820$ m/s.

b) Esta solução é independente da massa, na vez que ela entra tanto na energia cinética mo no calor de fusão, exatamente na mesma roporção.

c) Quando aviões a jato atingem velocidades tais como as obtidas acima, a superfície do avião fica incandescente, devido ao calor gerado pelo atrito com o ar. Se o nosso bloco de gêlo fizer um percurso muito longo, fundir-se-á, antes mesmo de atingir a parede. Em outras palavras, a energia perdida devido à resistência do ar deve ter um efeito importante, nesta velocidade.

PROBLEMA 18

Um mol de hélio a 24°C é colocado em contato com água a 26°C, ficando isolado do resto do mundo. A temperatura final de ambos é de 25°C. Que quantidade de água havia?

Um mol de um gás monoatômico, tal como o hélio, requer 12,4 joules de energia para elevar de um grau a sua temperatura. Por isso, o hélio deve ter absorvido 12,4 joules de energia da água. A água esfriou-se um grau. Desde que se deve retirar 4,2 joules, a fim de abaixar de um grau a temperatura de 1 grama de água, a quantidade de água que fornece 12,4 joules, quando esfriada de um grau, é:

$$\frac{12{,}4}{4{,}2} = 2{,}95 \text{ g}.$$

A massa de água era, aproximadamente, 3/4 da massa do hélio. (Um mol de hélio equivale a 4 g).

PROBLEMA 19

Um alpinista pode subir verticalmente cêrca de 500 metros por hora.

(a) Que quantidade de energia potencial gravitacional ganha o alpinista numa subida de 5 horas?

(b) O corpo humano é uma máquina químico-mecânica pouco eficiente. Na melhor das hipóteses, seus músculos liberam, como energia mecânica útil, apenas 25% da energia química usada. Os restantes 75%, ou mais, são dissipados como calor perdido. Admitindo esta eficiência, que quantidade de energia química usa o alpinista em 5 horas?

(c) Admita que, independentemente da subida na montanha, êle necessita $2{,}2 \times 10^6$ calorias em 24 horas. Que quantidade de energia precisa êle obter de sua alimentação diária, se deve fazer a subida tôda manhã?

(d) Se o alpinista desce a montanha tôdas as tardes, êle perde a energia potencial ganha na subida. Por que isso não o ajuda a reduzir sua alimentação?

a) Em cinco horas, o alpinista sobe $5 \times \times 500$ m $= 2{,}5 \times 10^3$m. Se a sua massa fôr, digamos, 80 kg, seu acréscimo na energia potencial gravitacional será:

$mgh = 80 \times 9{,}8 \times 2{,}5 \times 10^3$ joules $= 2 \times 10^6$ joules.

b) A energia acima é sòmente um quarto da consumida pelo alpinista. A energia química usada é:

$$4 \times 2 \times 10^6 = 8 \times 10^6 \text{ joules.}$$

c) Em calorias, esta energia química é:

$$\frac{8 \times 10^6}{4{,}2} = 2 \times 10^6 \text{ pequenas calorias.}$$

Esta é, aproximadamente, a mesma quantidade de calor necessária para o seu dia normal; logo, em seus dias de alpinismo, êle necessita cêrca de 4×10^6 calorias.

d) A única maneira pela qual a máquina humana aceita energia é na forma química. Não é possível aumentar sua quantidade de energia, efetuando trabalho sôbre ela (como num brinquedo acionado à mola, ao qual se dá corda). O corpo humano não é exatamente êste tipo de máquina. Quando você se levanta pela manhã e sente que necessita de energia para executar os afazeres diários, não pode ligar-se a uma tomada elétrica (como o faria, se armazenasse energia tal qual uma bateria elétrica). Não pode ligar-se a nenhum dispositivo mecânico com peças móveis, a fim de obter energia do trabalho realizado sôbre você pela máquina. Em vez disso, você toma o café da manhã. Os alimentos contêm energia química que o seu corpo, por processos complicados, transforma em trabalho.

A diferença e a semelhança, entre a máquina humana e outros tipos de máquinas, podem ser evidenciadas: mesmo quando "em ociosidade", o corpo necessita de um contrôle rígido de temperatura, o sangue deve ser bombeado, etc. Um computador eletrônico emprega quase tanta energia quando está inativo, como quando está resolvendo longos problemas, e o corpo humano possui algumas das mesmas características. Quando "trabalhando", a energia precisa ser despendida em todos os movimentos e, ainda quando não está "trabalhando", no sentido mecânico, o corpo despende energia internamente. (Tente manter o seu braço estendido, sem apoio, por alguns minutos!)

A discussão dêste assunto pode se prolongar a ponto de se tornar infrutífera. Logo que os pontos fundamentais tenham sido discutidos, será conveniente seguir adiante.

PROBLEMA 20

Suponha que você tem duas grandes caixas de massa desprezível. A caixa A contém 1 mol de hélio aquecido a 60°C, e a caixa B contém 1 mol de argônio (também um gás nobre), a 10°C.

(a) As duas caixas são colocadas lado a lado, em contato, ficando tôdas as suas outras faces isoladas. Após algum tempo, ambos os gases estão à mesma temperatura. Qual é esta temperatura e por quê?

(b) Em lugar de serem colocadas lado a lado, as duas caixas são unidades, formando uma só caixa grande, sem variação de volume, de modo que os gases se misturam. Qual será a tenperatura final da mistura?

(c) Suponha, agora, que a caixa B contém 1 mol de nitrogênio a 10°C, em vez de argônio. O hélio quente e o nitrogênio frio misturam-se, como no item (b). A temperatura final será igual, maior ou menor do que em (b)?

(d) Justifique claramente sua resposta ao ítem (c).

a) Tanto o hélio como o argônio são gases monoatômicos; portanto, cada um dêles requer 12,4 joules de energia para aumentar de 1° a temperatura de um mol. Assim, um esfriar-se-á tantos graus quanto o outro deverá se aquecer. Como têm a mesma temperatura final, esta

temperatura deve estar exatamente entre suas temperaturas iniciais, isto é, 35°C.

b) No equilíbrio, a caixa dupla conterá uma mistura de dois gases (são "nobres" e não se combinam quìmicamente), todos a uma temperatura uniforme. Isto significa que tôdas as moléculas, em média, (hélio e argônio) possuem a mesma energia cinética de translação. Nenhuma energia entra ou sai do sistema; assim, a energia cinética, ganha pelo argônio ao aquecer-se à temperatura final, T, deve ser exatamente igual à energia cinética perdida pelo hélio ao resfriar-se a T. Enquanto se refere às variações de temperatura, a situação é idêntica a de (a). Portanto, a temperatura final neste caso será também 35°C.

c) A diferença entre êste caso e (b) é que o nitrogênio é um gás *diatômico*. Quando aquecido, alguma energia transfere-se para os movimentos das moléculas, em tôrno de seus centros. Como calculamos no Problema 3, são necessários 20,5 joules de energia para elevar de um grau a temperatura de um mol de um gás diatômico ideal.

Mais energia é necessária para elevar a temperatura do nitrogênio a 35°C, do que a energia liberada no resfriamento do hélio a 35°C. Assim, quando a temperatura de hélio atingir 35°C, a temperatura do nitrogênio será menor do que esta, e a temperatura final de equilíbrio estará *abaixo* de 35°C.

d) A razão já foi apresentada na parte (c). A temperatura final, T, pode ser obtida, escrevendo-se a equação da troca de calor. A energia fornecida pelo resfriamento do hélio é 12,4 $(60^\circ - T)$ joules. Para o nitrogênio, o aumento na energia é 20,5 $(T - 10^\circ)$. Como a energia perdida pelo hélio deve ser a mesma que a ganha pelo nitrogênio, e como atingem a mesma temperatura de equilíbrio,

$$12{,}4\ (60^\circ - T) = 20{,}5\ (T\text{-}10^\circ)$$

$$T = \frac{(12{,}4 \times 60) + (20{,}5 \times 10)}{20{,}5 + 12{,}4} = 28{,}8^\circ C.$$

PROBLEMA 21

Testa-se um nôvo avião de tipo pequeno. Para manter segrêdo, o teste é feito num hangar fechado, cujos muros são completamente isolados do mundo externo. Colocam-se 10 kg de gasolina no avião que voa pelo hangar durante meia hora, aterrando com seu tanque vazio.

(a) Sob que forma a energia que o avião usa para voar foi-lhe fornecida inicialmente?

(b) Discuta as transformações de energia durante o vôo.

(c) Onde se encontrará a energia, e sob que forma, meia hora após o vôo?

a) Evidentemente, a gasolina fornece a energia. A energia está em forma de energia potencial química das moléculas de gasolina.

b) Um motor de combustão interna transforma a energia química da gasolina em trabalho (e também em energia dissipada sob forma de calor). As várias formas que a energia assume no motor são as seguintes:

(i) Energia química da mistura gasolina-ar.

(ii) Energia térmica do gás aquecido à alta pressão, quando esta mistura se queima.

(iii) Energia mecânica dos pistões que, finalmente (com uma pequena perda devido ao atrito) transforma-se em energia mecânica da hélice propulsora e em energia cinética da turbulência do "jato da hélice".

(iv) O próximo estágio envolve o mecanismo de vôo, que é complicado. O ponto essencial é que, a fim de manter a velocidade constante num ar parado, o avião deve realizar trabalho numa razão constante. Êste trabalho transforma-se em energia cinética do movimento do ar como um todo, por onde passa o avião.

(v) O movimento turbulento do ar gradualmente desaparece, enquanto o movimento relativamente ordenado dos redemoinhos se transforma, completamente, em energia térmica desordenada das moléculas do ar, devido à viscosidade do ar.

(vi) Há também o calor de exaustão do motor, uma conseqüência inevitável de se tentar transformar energia calorífica em energia mecânica.

c) Meia hora após o vôo, tôda a energia cinética visível foi transformada em energia térmica do ar no interior do hangar. O resultado é que a temperatura do ar foi ligeiramente aumentada.

Façamos um cálculo grosseiro do aumento de temperatura. A energia fornecida, quando 1 kg

de gasolina se queima, é, aproximadamente, 4×10^7 joules. A energia total fornecida é, portanto, 4×10^8 joules. Suponha que o hangar tenha 100 metros de comprimento, 100 metros de largura e 50 metros de altura. Seu volume seria, então, $5 \times 10^5 m^3$. Como um mol de ar, à temperatura quase ambiente e à pressão atmosférica, ocupa $2 \times 10^{-2} m^3$, há $\frac{5 \times 10^5}{2 \times 10^{-2}} \approx 2 \times 10^7$ moles de ar no hangar. As moléculas de oxigênio e nitrogênio que constituem o ar são diatômicas; assim, 20,5 joules são necessários para elevar de um grau a temperatura de um mol. O acréscimo na temperatura de todo o ar do hangar é:

$$\frac{4 \times 10^7}{20{,}5 \times 2 \times 10^7} = 0{,}1°K.$$

PROBLEMA 22

Um foguete está equipado com recipientes tèrmicamente isolados, cheios de gás muito quente, em vez de combustível. O gás quente, saindo através de um tubo de escapamento, lança o foguete para a frente.

(a) De onde vem a quantidade de movimento adquirida pelo foguete?

(b) De onde provém a energia cinética do foguete?

(c) Se o gás é lançado para dentro de uma caixa colocada no solo, e a temperatura do gás coletado na caixa é medida depois de lançado o foguete, você espera que a temperatura seja superior, inferior ou igual à temperatura inicial da reserva de gás no foguete?

a) A quantidade de movimento total do sistema foguete, combustível e gás expelido é conservada. Um foguete adquire uma quantidade de movimento para a frente, lançando a massa de gás para trás. Isto é verdadeiro para qualquer tipo de foguete. Neste foguete cheio de gás, o reservatório do "combustível" contém muitas moléculas deslocando-se com um valor elevado de quantidade de movimento, em tôdas as direções, mas o tubo de escapamento permite a saída das moléculas sòmente para trás, ao deixar o foguete. A quantidade de movimento de cada molécula, dentro do foguete, não é constante (há uma troca contínua de quantidade de movimento entre as moléculas e entre as moléculas e o próprio foguete); ainda que, inicialmente, apenas uma parte das moléculas se desloque exatamente em direção ao tubo de escape, outras moléculas também adquirirão ràpidamente a quantidade de movimento correta. Isto explica por que há um fluxo de gás constante pelo escapamento. E também explica como, de um estado inicial em que o foguete está em repouso e as quantidades e movimento das moléculas estão distribuídas desordenadamente, é possível chegar ao estado final, no qual o foguete se desloca com alta velocidade para a frente, e as moléculas do gás estão se deslocando, em média, no sentido oposto.

b) Não houve variação na energia total do sistema. (Supomos que o foguete está no espaço sideral, onde não há atrito do ar ou atração gravitacional). A energia cinética do foguete mais a energia cinética das moléculas, que se movimentam para trás, deve ser exatamente igual à energia térmica inicial das moléculas do gás.

c) A energia cinética ganha pelo foguete provém do gás. Ao liberar esta energia, o gás resfria-se.

Para entender o que acontece sob o ponto de vista microscópico, imagine bolas de bilhar bombardeando uma parede leve e móvel de ambos os lados. Consideremos cinco bolas dirigindo-se para a esquerda e seis para a direita. Suponha que tôdas as bolas tenham exatamente a mesma velocidade e que atinjam a parede, tôdas ao mesmo tempo. Após a colisão, a parede mover-se-á para a direita. Por isso, o grupo de cinco bolas voltará com uma velocidade ligeiramente aumentada para a direita, enquanto o grupo de seis bolas voltará com uma velocidade ligeiramente menor para a esquerda. No caso do foguete, as paredes da frente e de trás do cilindro de gás funcionam como os lados direito e esquerdo da parede descrita acima. As paredes da frente e de trás do cilindro de gás estão rigidamente ligadas. A abertura na parede de trás faz com que haja desigualdade no número de colisões. O foguete acelera para a frente; portanto, as moléculas que se movem para trás no cilindro possuem, em média, menor energia. São estas moléculas que saem pela abertura.

PROBLEMA 23

Imagine que você tem uma lâmpada numa caixa perfeitamente refletora, que não contém mais nada; dentro dela, há um vácuo perfeito.

(a) Acendendo a luz, você produz:
  (i) Energia cinética da caixa como um todo?
  (ii) Energia potencial da caixa?
  (iii) Energia térmica do movimento atômico?
  (iv) Energia térmica sob a forma de energia potencial intermolecular?
  (v) Energia interna em alguma forma?
  (vi) Nenhuma energia extra para a caixa?

(b) Acendendo a luz, você produz:
  (i) Quantidade de movimento da caixa como um todo?
  (ii) Quantidade de movimento, devido ao movimento térmico dos átomos?
  (iii) Nenhuma quantidade de movimento na caixa?

Prepare-se para discutir em aula suas respostas.

Êste problema envolve o conceito da radiação como uma forma de energia sujeita às mesmas leis da conservação, como a energia mecânica total e a energia térmica. A compreensão da teoria da radiação está além do escopo dêste curso, porém, uma aceitação destas propriedades da radiação fornecerá aos alunos um quadro mais completo do fluxo de energia e sua transformação, no sistema solar.

a) O sistema em questão consiste de um filamento aquecido e algo mais que esteja presente no espaço, onde foi produzido o vácuo entre as paredes refletoras. Suponha que o sistema esteja, inicialmente, no zero absoluto; não contém forma alguma de energia. Então, faz-se passar a corrente pelo filamento. *A energia elétrica* vai para o filamento. Uma parte é convertida em *calor;* o filamento se aquece. Em seguida, o filamento emite *energia radiante.* Esta energia radiante não pode escapar pelas paredes da caixa, mas é completamente refletida. Uma parte será reabsorvida pelo filamento. A energia fica prêsa dentro da caixa; assim, a densidade de energia deve aumentar constantemente. Podemos, agora, responder a primeira parte do problema.

(i) *Não* há energia cinética do movimento como um todo.
(ii) *Não* há energia potencial da matéria como um todo.
(iii) A única energia térmica do movimento atômico interno está na própria lâmpada.
(iv) e (v) Não há lugar onde a energia intermolecular potencial, ou qualquer outro tipo de energia interna, possam ser armazenadas.
(vi) Há energia extra na caixa, que está sob a forma de radiação.

b) O filamento e as paredes da caixa constituem um sistema isolado, onde a quantidade de movimento permanece constante. Se inicialmente fôr zero, deverá ser sempre zero. A radiação é contìnuamente refletida no interior da caixa. Assim, parte dessa radiação move-se em tôdas as direções (como as moléculas de um gás) e o valor médio da quantidade de movimento total é zero. Visto que a quantidade de movimento do sistema também é zero, a caixa e o filamento devem possuir quantidade de movimento zero. Assim:

(i) *Não* há quantidade de movimento como um todo, no sistema.
(ii) A única quantidade de movimento em razão do movimento térmico dos átomos está no filamento, e a sua soma é zero.
(iii) A radiação na caixa está em forma de energia e tem a quantidade de movimento associada a ela, mas a quantidade de movimento global é zero.

PROBLEMA 24

(a) Um cilindro contém gás hélio e é fechado por um pistão que se move com atrito desprezível. Um homem empurra o pistão ràpidamente, comprimindo o hélio que se aquece. Por que se eleva a temperatura do hélio? Discuta o mecanismo de aquecimento em têrmos do comportamento molecular.

(b) Um cilindro com pistão móvel contém hélio comprimido. O pistão é abandonado e o hélio empurra-o, resfriando-se. Explique, em têrmos do comportamento molecular, como o hélio se resfria.

(c) Uma grande caixa onde se fêz um bom vácuo contém uma pequena garrafa de hélio comprimido. Por meio de um gancho, retira-se a rôlha da garrafa de hélio. Depois que êste sai da garrafa, não se observa qualquer variação de temperatura. Explique, em têrmos do comportamento molecular, por que não há variação de temperatura quando o hélio se expande dentro da caixa grande.

(d) Embora o hélio não apresente qualquer variação de temperatura, alguns outros gases se resfriam sensìvelmente, ao se dilatarem no vácuo, partindo de alta compressão. Que conclusão pode você tirar a respeito dêsses outros gases comprimidos?

a) Como um trabalho foi realizado ao empurrar o pistão para dentro do cilindro, contra a pressão do gás, a mesma quantidade de energia deve aparecer em algum lugar. O único modo pelo qual pode aparecer é como aumento na energia térmica do gás, isto é, como um aumento de temperatura.

Com maiores detalhes, quando o pistão está em repouso, os átomos do gás colidem contìnuamente com o cilindro, e recuam com a mesma energia cinética que possuíam antes do choque. (A componente da quantidade de movimento, perpendicular ao pistão, inverte-se e as outras componentes permanecem inalteradas). Quando o homem comprime o pistão, os átomos atingem a superfície que se move contra êles. Êles recuam com a sua energia cinética *aumentada* (anàlogamente a uma bola de basebol, após a batida). Assim, estamos, em média, aumentando a energia cinética das moléculas; a temperatura aumenta.

b) O argumento é semelhante ao da parte (a). Necessàriamente, os átomos estão colidindo com o pistão que se afasta dêles. Como a quantidade de movimento dos átomos, relativamente ao pistão, é invertida no impacto, a quantidade de movimento em relação ao recipiente diminui. A energia térmica das moléculas do gás diminui. Por outro lado, um trabalho é realizado pelo gás, sôbre o mecanismo ligado ao pistão. Pode-se demonstrar que o decréscimo na energia térmica é exatamente o mesmo que o trabalho realizado pelo gás, na expansão.

c) Êste processo é chamado "expansão livre". A importante diferença entre êste caso e a variação no volume, produzida pelo movimento do pistão, é que agora os átomos nunca colidem com a parede em movimento, a qual poderia produzir uma variação na sua energia cinética. Os átomos escaparão ràpidamente da bôca da garrafa e continuarão o seu movimento, até atingirem a parede fixa da caixa. Suas energias cinéticas não variarão, e, conseqüentemente, nem a temperatura.

d) Em nossos argumentos anteriores, não consideramos a energia potencial. Para o hélio isto é justificado, pois dois átomos de hélio são muito semelhantes a bolas de bilhar; sòmente interagem, quando pràticamente se tocam. (Não há atração suficiente entre êles, para formar uma molécula). Entretanto, há outros gases nos quais, apesar das moléculas se repelirem fortemente quando muito próximas umas das outras, há uma fraca atração entre as moléculas, quando se encontram relativamente afastadas. Para gases rarefeitos, o têrmo "ideal" é uma boa aproximação. Quando a densidade do gás é maior ao expandir-se, a distância média entre as moléculas aumenta, o mesmo acontecendo com a sua energia potencial. Isto é acompanhado de uma queda na energia cinética, além das variações discutidas na parte (b). Assim, mesmo numa "expansão livre", a energia potencial das moléculas de alguns gases aumentará, e a energia cinética diminuirá, isto é, haverá queda na temperatura do gás.

PROBLEMA 25

Um foguete de massa 2×10^3 kg foi lançado, numa tentativa de "escapar" da Terra. Entretanto, quando se encontra a vários milhares de quilômetros da Terra, sua velocidade é de apenas 30 m/s; portanto, é evidente que êle retornará à atmosfera. O centro de contrôle no solo envia, então, um sinal de rádio que inflama uma pequena carga explosiva (de vários quilogramas) no foguete. Êste

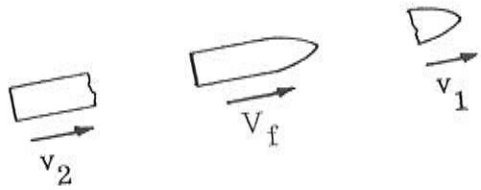
explode e divide-se em duas partes — uma, com massa $0{,}5 \times 10^3$ kg, continua a mover-se para frente com velocidade de 330 m/s.

(a) Calcule a velocidade do outro fragmento.

(b) Calcule a energia cinética do foguete original, e de cada parte, após a explosão.

(c) Por que, após a explosão, há mais energia cinética do que havia antes?





a) O foguete constitui um sistema isolado; portanto, a quantidade de movimento conserva-se. De acôrdo com os dados, um dos fragmentos continua o movimento no mesmo sentido do movimento original do foguete. Logo, a quantidade de movimento do outro fragmento também permanece na mesma reta. Em forma de equação vetorial,

$$\vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Como todos os vetores quantidade de movimento estão na mesma reta, podemos escrever a equação vetorial acima como uma simples equação algébrica, omitindo simplesmente os sinais de vetores:

$$p_f = p_1 + p_2$$

A massa do fragmento cuja velocidade é desconhecida deve ser $1{,}5 \times 10^3$ kg, que é a diferença entre a massa do foguete e a massa do primeiro fragmento. Substituindo na equação da quantidade de movimento,

$$m_2 v_2 = m_f v_f - m_1 v_1$$
$$= [(2 \times 10^3 \times 30) - (0{,}5 \times 10^3 \times 330)] \text{ kgm/s}$$
$$= -1{,}05 \times 10^5 \text{ kg m/s}.$$

Assim,

$$v_2 = \frac{-1{,}05 \times 10^5}{1{,}5 \times 10^3} = -70 \text{ m/s}.$$

O segundo fragmento move-se *para trás*, com uma velocidade de 70 m/s.

b) A energia cinética do foguete é:

$1/2\ m_f v_f^2 = 1/2 \times 2 \times 10^3 \times 30^2 = 9 \times 10^5$ joules.

Para cada um dos fragmentos, a energia cinética é:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (0{,}5 \times 10^3 \times 330^2) = 2{,}7 \times 10^7 \text{ joules.}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (1{,}5 \times 10^3 \times 49 \times 10^2) = 0{,}37 \times 10^7 \text{ joules.}$$

$$(E'_c)_{total} = (2{,}7 + 0{,}37) \times 10^7 = 3{,}1 \times 10^7 \text{ joules.}$$

c) A energia cinética de todo o conjunto, após a explosão, é bem maior do que antes. O aumento na energia cinética deve ser esperado — é a única maneira de separar os dois fragmentos. O acréscimo na energia cinética resulta da detonação da carga explosiva, que transformou parte da energia química em energia cinética de translação do conjunto e o restante em calor dos fragmentos do foguete.

PROBLEMA 26

Um projeto: Experiência com a radiação de um aquecedor elétrico incandescente.

Coloque uma fôlha de amianto (servirá, temporàriamente, uma fôlha de papelão úmido) entre o aquecedor e você. Faça um pequeno orifício, de uns 3 cm de diâmetro, de modo que a radiação o alcance. Mantenha sua mão próxima do orifício e sinta o efeito da radiação em sua pele. Tente, então, as seguintes modificações:

(a) Coloque uma fôlha de papelão entre o orifício e sua mão, e remova-a ràpidamente.

(b) Coloque uma lâmina de vidro de janela entre o orifício e sua mão, e remova-a ràpidamente.

(c) Cubra sua mão com uma lâmina de alumínio (faz-se isto fàcilmente, umedevendo as costas da mão com saliva e colocando, delicadamente, uma lâmina de alumínio bem fina sôbre a pele. Aproxime do orifício sua pele recoberta com a camada de alumínio.

(d) Mantenha em sua mão a fôlha de alumínio, mas pinte com tinta nanquim uma pequena área da fôlha. Aproxime-a de nôvo do orifício.

a) Quando o papelão é retirado, tem-se a sensação de calor, imediatamente. A remoção do papelão serve como um interruptor para "ligar" o calor de radiação. É conveniente algum tipo de "interruptor", porque, como um detetor de variação de temperatura, a pele está longe de ser um dispositivo calibrado de medição. Ela "ambienta-se" à temperatura do local onde se encontra e, embora seja sensível a modificações bruscas de temperatura, é bem menos sensível a uma modificação gradual e relativamente ineficiente, como indicadora de temperatura exata. (Quando mergulhamos alternadamente o tornozelo contundido em água fria e quente, a temperatura pode ser alterada gradativamente, até que, finalmente, chega a um ponto em que não será tolerada, se a mudança fôr brusca).

b) O vidro de janela produz o mesmo efeito do papelão. Embora o vidro seja transparente à luz visível, absorve uma grande quantidade de radiação de comprimento de onda maior do que a luz visível, que constitui a maior parte do calor irradiado.

c) Pouca ou nenhuma sensação de calor será sentida. Uma superfície brilhante de alumínio é um mau absorvedor de calor. Reflete a maior parte da radiação incidente.

d) A mão poderá ficar desconfortàvelmente quente. Uma superfície fôsca e escura absorve bastante calor.

PROBLEMA 27

Um projeto: utilize as costas da mão, ou melhor, seu rosto, para detetar a radiação de uma superfície quente. Como fonte, use uma caneca metálica bem polida cheia de água fervente ou, melhor ainda, uma fôlha polida de cobre que tenha sido recém-aquecida numa chama de gás. Em cada caso, pinte de prêto um lado da fonte (uma mistura de fuligem e álcool serve muito bem). Faça então sua estimativa para cada superfície, a polida e a preta.

Juntamente com o Problema 26, êste projeto demonstra que bons refletores de radiação são maus emissores e absorvedores. Não é fácil detectar a radiação emitida pela superfície brilhante, mas a radiação emitida pela superfície pintada de prêto é bem acentuada. (Se usar a fôlha de cobre aquecida, tenha o cuidado de não colocar seu rosto demasiadamente perto, ao testar o lado brilhante!)

O lado brilhante da fôlha de cobre perderá um pouco do seu brilho, quando aquecida, mas isto deve sòmente aumentar a radiação. Daí, a conclusão de que as superfícies brilhantes emitem menos radiação, do que as superfícies fôscas que não se modificam.

APÊNDICES

Apêndice 1. Cinemática e Dinâmica do Movimento Circular (Suplemento para o Capítulo 21, Seções 5, 6 e 7)

A orientação dada para estas seções sugere três estágios distintos, para atingir a compreensão da dinâmica do movimento circular. Sumàriamente, podemos apresentá-los:

I. Quando ocorre uma aceleração na direção perpendicular à da velocidade, o módulo da velocidade permanece constante.

II. Dedução da aceleração centrípeta para um objeto em movimento circular uniforme.

III. Aplicação da lei de Newton ao movimento circular uniforme.

A intenção do curso, é de que o aluno assimile a cinemática do movimento circular no Capítulo 6 da Parte 1. Com isto bem assimilado, o desenvolvimento da dinâmica pode ser tratado como uma predição verificável da lei de Newton.

Êste plano de ataque foi experimentado na prática, e será conveniente segui-lo. Entretanto, a dificuldade comum é que, mesmo para os alunos que entenderam perfeitamente a cinemática do movimento circular no Capítulo 6, os fatos correlacionados e o raciocínio podem tornar-se um tanto confusos. Portanto, é normalmente aconselhável reservar algum tempo para a recapitulação e o redesenvolvimento da parte puramente cinemática; se a cinemática não fôr bem entendida, a compreensão dos alunos no que se refere à dinâmica ficará insegura.

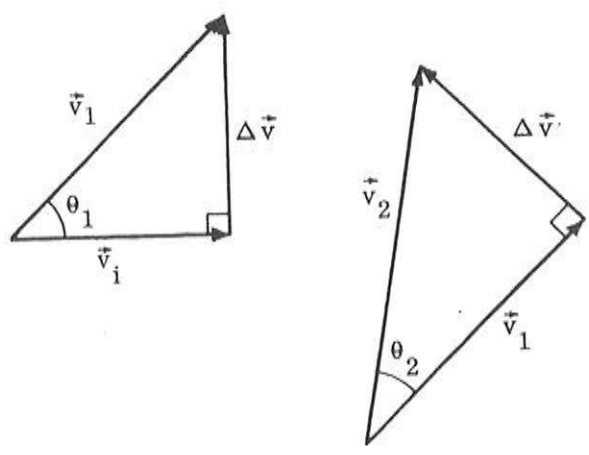
Algumas sugestões detalhadas são dadas abaixo, para uma recapitulação das idéias vetoriais, envolvidas nos estágios I e II da cinemática do movimento circular.

I. *Num Movimento em que a Aceleração é Perpendicular ao Vetor Velocidade, o Módulo da Velocidade é Constante.*

Uma maneira de apresentar esta idéia é dar uma seqüência de exemplos numéricos simples. Pode-se fazer isto semiquantitativamente, conforme os exemplos abaixo. Para esta finalidade, são suficientes alguns cálculos grosseiros.

Considere um vetor velocidade inicial, $\vec{v}_i$, de módulo 10 m/s. Adicione um vetor perpendicular de módulo Δv, formando um vetor resultante, $\vec{v}_1$, que será diferente de $\vec{v}_i$, tanto em módulo como em direção. Agora, adicione novamente um vetor de módulo Δv, mas desta vez, faça-o perpendicular à nova velocidade, $\vec{v}_1$; e assim por diante. Consideremos um exemplo específico empregando uma aceleração $a = \Delta v/\Delta t = 10\ m/s^2$.

1. Inicialmente, com intervalo de 1 segundo, obtemos $\Delta v = 10$ m/s. Adicione $\vec{\Delta v}$ perpendicular a $\vec{v}_i$, obtendo $\vec{v}_1$, conforme o diagrama. Depois, aplique Δv para $\vec{v}_1$, etc. Esta seqüência de adições pode ser representada gràficamente no quadro-negro, durante a aula. O tratamento exato não apresenta dificuldade, mas consumiria muito tempo de aula.



$v_1^2 = v_i^2 + (\triangle v)^2 = 100 + 100 = 200$

$v_2^2 = v_1^2 + (\triangle v)^2 = 200 + 100 = 300$

$v_3^2 = 400$, $v_4^2 = 500$, $v_5^2 = 600$, etc.

O ângulo entre $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_1$, representado por Θ_1, é dado por:

$$\text{tg } \Theta_1 = \frac{\triangle v}{v_i} = \frac{10}{10},$$

$$\text{tg } \Theta_2 = \frac{10}{(200)^{1/2}} = \frac{10}{14{,}1},$$

$$\text{tg } \Theta_3 = \frac{10}{(300)^{1/2}} = \frac{10}{17{,}3}, \text{ etc.}$$

Uma tabela dêstes valôres de Θ, com as respectivas rotações executadas, é dada abaixo:

	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4	Θ_5	Θ_6	Θ_7
	45°	35°	30°	27°	25°	23°	21°
Rotação Total	45°	80°	110°	137°	162°	185°	206°

	Θ_8	Θ_9	Θ_{10}	Θ_{11}	Θ_{12}	Θ_{13}
	19°	18°	17°	16°	15°	15°
Rotação Total	225°	243°	260°	276°	291°	306°

	Θ_{14}	Θ_{15}	Θ_{16}	Θ_{17}
	14°	14°	14°	13°
Rotação Total	320°	334°	348°	361°

Forneça à classe alguns valôres sòmente; depois, cite que em 17 etapas o vetor velocidade girou de 360°, enquanto a velocidade aumentou de 10 m/s para mais de 40 m/s, isto é, $\sqrt{1\,800}$.

2. Em seguida, reduza $\triangle t$, de um segundo para 0,1 segundo. Assim, $\triangle v = 1$, e $v_1^2 = 101$, $v_2^2 = 102$, $v_3^2 = 103$, etc; $\text{tg } \Theta_1 = \frac{1}{10}$, $\Theta_1 = 5{,}7°$; $\text{tg } \Theta_{100} = \frac{1}{(200)^{1/2}} = \frac{1}{14{,}1}$, $\Theta_{100} = 4°$. Usando 5° como média em cada etapa, teríamos $\frac{360°}{5°} = 72$ etapas para atingir 360°. $v_{72}^2 = 172$ e $v_{72} = 13$ m/s. Assim, enquanto o vetor velocidade girou de 360°, a velocidade aumentou de 10 m/s para apenas 13 m/s.

3. Como um caso final, faça $\triangle t = 0{,}01$ segundo. Então, para o mesmo a = 10 m/s², $\triangle v = 0{,}1$, $\triangle v^2 = 0{,}01$, $v_2^2 = 100{,}02$, $v_3^2 = 100{,}03$, etc. O primeiro ângulo de rotação deve ser: $\text{tg } \Theta = \frac{\triangle v}{v_i} = 0{,}01$.

Isto dá $\Theta = 0{,}57$ graus. (Lembre-se de que, para ângulos pequenos como êste, tg $\Theta = \Theta$ em radianos, e 1 radiano = 57,3 graus). Êste incremento angular não se modifica significativamente. O número de etapas para uma rotação de 360° deve ser, então, aproximadamente, 630. O módulo do vetor velocidade, após as 630 etapas, deve ser $v_{630} = 10{,}3$ m/s.

Escolhendo ou não o emprêgo dêste método de aproximações sucessivas para o caso de aceleração verdadeiramente perpendicular, o importante é que os alunos compreendam que uma aceleração perpendicular ao movimento tende a girar o vetor velocidade, mas não faz variar seu módulo.

II. *A Cinemática do Movimento Circular.*

Seria necessário um tempo considerável de aula, para dar aos alunos uma noção perfeita da dedução apresentada na Seção 21-5. A série seguinte de exercícios fornece a base de que os alunos necessitam, a fim de compreenderem a Figura 21-8 e as fórmulas dela deduzidas (páginas 34 e 35).

O tempo necessário, aqui, depende do entendimento pelos alunos da matéria dada no Capítulo 6, Seções 5-7. Talvez você tenha dado os exercícios sugeridos no Apêndice 1 da Parte I, durante o estudo de vetores, apresentado no Capítulo 6. Se desejar, repita alguns daqueles exercícios aqui.

Seis etapas distintas são apresentadas no desenvolvimento que se segue. Cada uma delas deve ser discutida com ilustrações no quadro-negro ou com exercícios para casa. A seqüência apresentada procura responder, gràficamente, as seguintes questões:

1. Qual é a diferença entre dois vetores? Num diagrama vetorial, como se pode mais fàcilmente trabalhar com vetores, a fim de obter a solução de um problema de subtração?

2. Como se pode obter uma velocidade média, a partir dos vetores posições (vetores raios) de um objeto em dois instantes diferentes?

3. Qual é a velocidade instantânea para o movimento circular? (Deduza $v = \frac{2\pi R}{T}$).

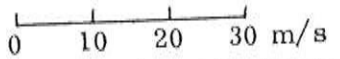
4. Qual é a aceleração média para diferentes intervalos, no movimento circular? Dê sua direção e seu módulo, à medida que os intervalos se tornam cada vez menores.

5. Qual é a direção da aceleração instantânea?

6. Qual é a aceleração? (Deduza $a = \frac{2\pi v}{T}$).

Os alunos aproveitarão melhor, se os conduzirmos às respostas dessas questões pelo emprêgo dos seus próprios gráficos. Não há substituto para o discernimento conseguido por meio de lápis, régua e transferidor (ou compasso).

Exemplo 1.1

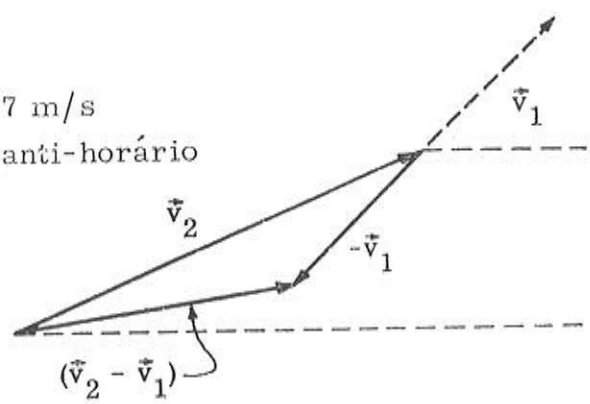


escala de velocidade

Problema: Determine $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, gràficamente; encontre seu módulo em metros/segundo, e dê a direção em função de um ângulo no sentido horário ou anti-horário, a partir da direção horizontal dirigida para a direita.

Solução (a):

módulo de $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$: 37 m/s
direção: 8º no sentido anti-horário a partir da horizontal.



1. A Diferença Entre Dois Vetores.

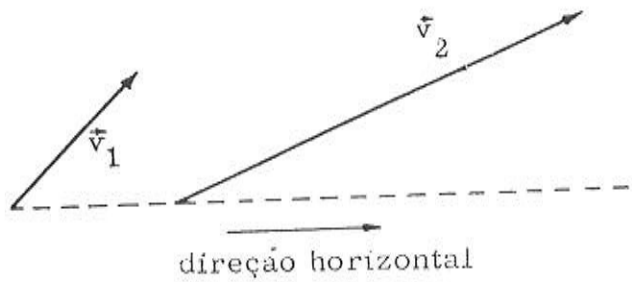
O problema é construir $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Certos alunos não têm certeza qual vetor deve ser subtraído do outro; sua tendência é subtrair o menor vetor do maior. Há duas maneiras de lembrá-los como determinar $\vec{\Delta v}$:

(a) Para determinar $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, reescreva isto como $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$. Construa o vetor $-\vec{v}_1$ e o adicione a $\vec{v}_2$.

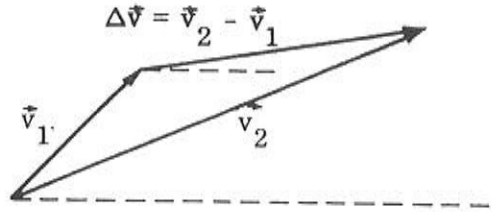
(b) Para determinar $\vec{\Delta v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, pergunte qual $\vec{\Delta v}$ deve ser adicionado a $\vec{v}_1$ para obter $\vec{v}_2$.

(Nota: O ítem (b), apresentado a seguir na solução (b), é mais conveniente na análise do movimento circular).

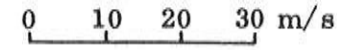
Aqui estão alguns exemplos que você poderá distribuir mimiografados.



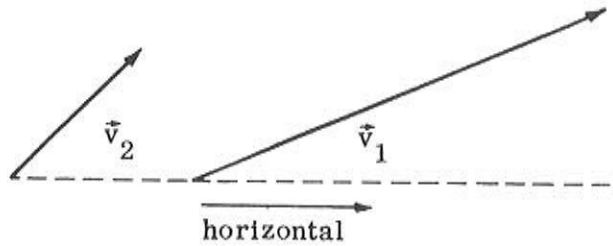
Solução (b):



Exemplo 1.2

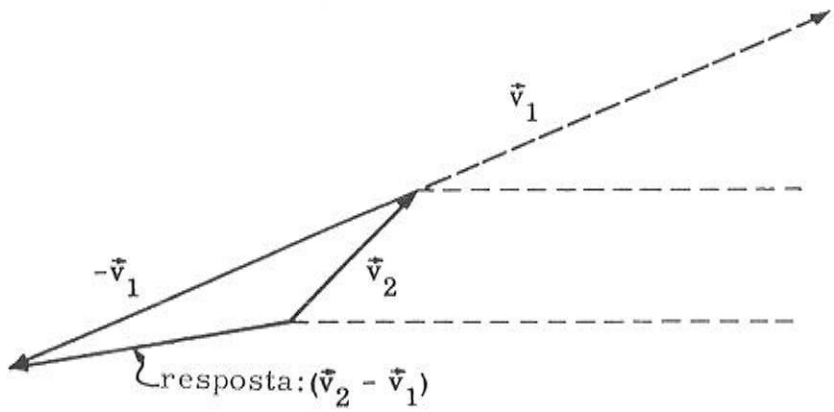


escala de velocidade

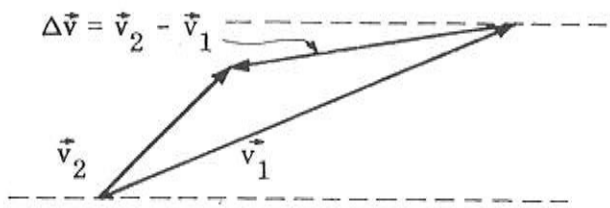


As mesmas perguntas de 1.1. (Como neste caso, $\vec{v}_2$ é mais curto do que $\vec{v}_1$, os alunos talvez sejam tentados a subtrair erradamente).

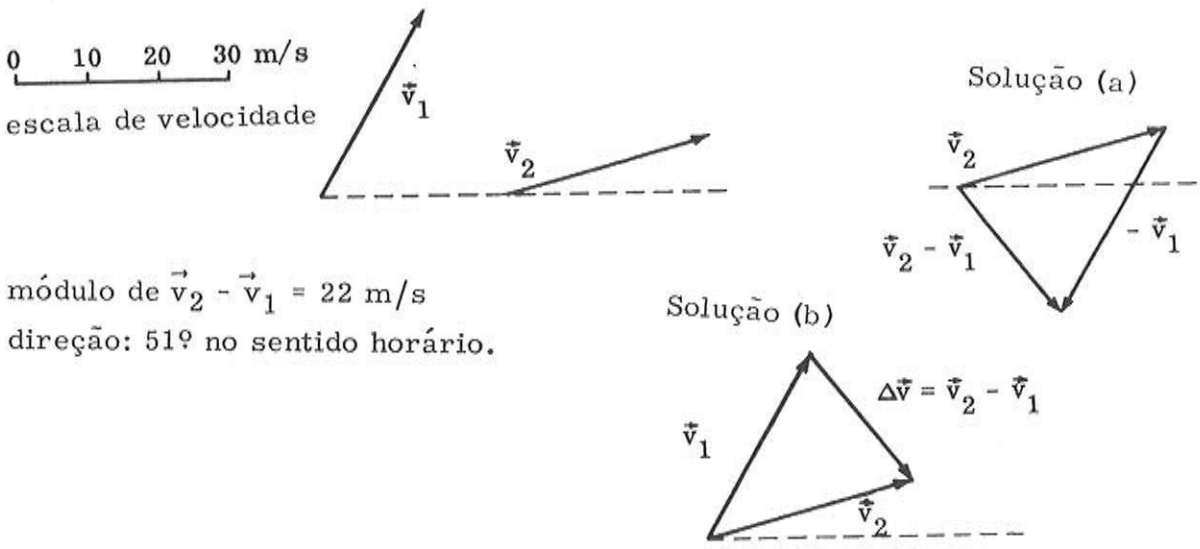
Solução (a):



Solução (b):



Exemplo 1.3. Idêntico a 1.1., exceto que, neste caso, os dois vetores têm o mesmo comprimento.



módulo de $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 22$ m/s
direção: 51º no sentido horário.

2. Determinação da Velocidade Média.

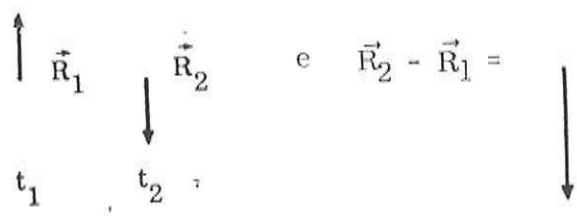
A posição de um objeto pode ser designada por um vetor, $\vec{R}$, com origem num ponto fixo arbitrário no espaço e sua extremidade no objeto. Se o objeto estiver em movimento, sua posição no instante t_1 poderá ser indicada por um vetor, $\vec{R}_1$, e sua posição num instante posterior, t_2, por um vetor, $\vec{R}_2$. Por definição, a velocidade média vetorial, durante êsse intervalo de tempo, será:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{t_2 - t_1}.$$

(Observe que, para o movimento circular, o módulo de $\vec{v}_m$ será menor do que o módulo da velocidade, em qualquer instante do intervalo. Isto não é importante. A definição, ainda assim, é útil).

3. Determinação da Velocidade Instantânea para o Movimento Circular Uniforme.

Considere o movimento da extremidade de um ponteiro em rotação. Se em t_1 êle apontar para cima e, em t_2, apontar para baixo, teremos:

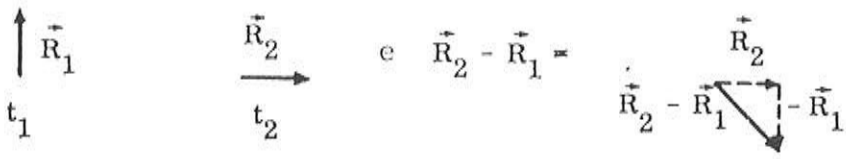


Assim, $\vec{v}_m = \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{t_2 - t_1}$, que tem um módulo

$$\frac{2R}{t_2 - t_1} = \frac{2R}{\frac{1}{2}T} = 4\frac{R}{T} \text{ m/min,}$$

onde T é o tempo de uma revolução completa.

Se, ao invés de examinar o vetor velocidade média em meia revolução, como no exemplo anterior, examinarmos agora sòmente o primeiro quarto de revolução (intervalo de tempo T/4), obteremos:



Assim, $\vec{v}_m = \dfrac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{t_2 - t_1}$, que agora possui um módulo $\dfrac{\sqrt{2}\,R}{t_2 - t_1} = \dfrac{\sqrt{2}\,R}{T/4} = 4\sqrt{2}\,R/T$ m/min, um valor maior do que o anterior.

Se tomarmos um intervalo menor ainda, de forma que $\vec{R}_1$ e $\vec{R}_2$ estejam separados por um pequeno ângulo $\triangle\Theta$, para o limite em que $\triangle\Theta$ é muito pequeno, o vetor $\triangle\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ terá um módulo $R\triangle\Theta$. Logo,

$$(v_m)\ \text{módulo} = \frac{R\triangle\Theta}{\triangle t} = R\,\frac{\triangle\Theta}{\triangle t} = R\,\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi R}{T}.$$

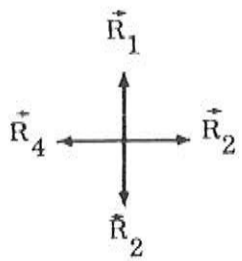
O significado desta equação é, simplesmente, que a extremidade do ponteiro, percorrendo uma trajetória circular, realmente cobre uma distância $2\pi R$ (uma revolução) em um tempo, T (tempo de uma revolução).

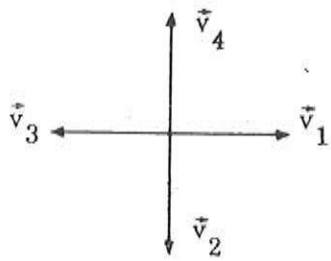
4. Determinação da Aceleração Média.

O problema aqui é análogo ao discutido anteriormente. A idéia nova refere-se ao emprêgo de vetores velocidade, ao invés de vetores posição. A aceleração média é definida como:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}.$$

Considere a extremidade do ponteiro que usamos anteriormente. Quando o ponteiro aponta para cima, num movimento horário, o vetor velocidade tem o sentido para a direita. Assim, para os quatro raios vetores mostrados no diagrama, temos quatro vetores velocidade correspondentes.





Os vetores velocidade têm as dimensões comprimento/tempo e, portanto, são representados no "espaço velocidade", e não no "espaço dos raios vetores". Enquanto o módulo de cada vetor R é, simplesmente, o comprimento do ponteiro em rotação, cada vetor velocidade é o módulo da velocidade instantânea constante, v, da extremidade do ponteiro.

5. A Direção da Aceleração Instantânea.

Vemos, pelo diagrama de vetores no "espaço velocidade", que o próprio vetor velocidade gira no sentido horário, do mesmo modo que o ponteiro. Assim, num intervalo de tempo muito pequeno, $\triangle t$, após t_1, um incremento de velocidade vetorial $\triangle\vec{v}$, que está no sentido para

baixo, foi adicionado a $\vec{v}_1$. Porém, a direção de $\vec{\Delta v}$ é a mesma que a da aceleração; logo, quando o ponteiro está na posição R_1, *para cima*, a aceleração da extremidade do ponteiro aponta *para baixo*. Assim, um objeto em movimento circular uniforme está sujeito a uma aceleração radial constante, dirigida para dentro, em direção ao centro do círculo de rotação. Esta é chamada aceleração *centrípeta* (que procura o centro).

6. O Módulo da Aceleração Instantânea.

Argumentos inteiramente análogos aos empregados em (3) conduzem à conclusão de que o módulo da aceleração instantânea é:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Isto porque a extremidade do vetor percorre uma distância $2\pi v$ no "espaço velocidade", durante o tempo de uma revolução, T.

Aplicando $v = \frac{2\pi R}{T}$, podemos também obter:

$$a = \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi R}{T} \times \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R,$$

como $T = \frac{2\pi R}{v}$, temos:

$$a = 2\pi v \times \frac{1}{T} = 2\pi v \times \frac{v}{2\pi R} = \frac{v^2}{R}.$$

III. *A Lei de Newton Aplicada ao Movimento Circular.*

A dedução um pouco mais detalhada da aceleração apresentada acima mostra que é uma dedução puramente cinemática. O argumento foi cuidadosamente desenvolvido, sem se basear no fato de que a "fôrça centrípeta necessária para manter o movimento circular deve provocar uma aceleração centrípeta".

A lei de Newton *prediz* que deve haver uma fôrça para manter um objeto em movimento circular uniforme. Esta fôrça deve ter um módulo $F = ma = mv^2/R$. Deve estar na direção da aceleração, radialmente para dentro. O fato de que uma fôrça, assim prevista, é realmente necessária para produzir um movimento circular uniforme pode ser verificado, experimentalmente, no laboratório.

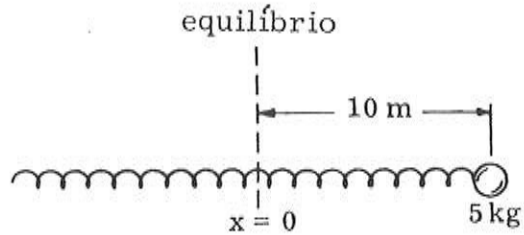
Recapitule a lógica do desenvolvimento apresentado no texto da Seção 21-5. Empregando o exemplo dado no fim desta seção, peça aos alunos os valôres das fôrças (em vez de 1,2 newtons):

Se R fôsse 0,66 metros (resposta: 2,4 nt).
Se T fôsse 6,8 segundos (resposta: 0,3 nt).
Se T fôsse 1,7 segundos (resposta: 4,8 nt).
Se m fôsse 2,06 kg (resposta: 2,4 nt).

Apêndice 2. Solução para o Movimento em que F = —kx

Uma maneira genérica de estudar o movimento, quando a fôrça é –kx, é calcular o movimento numèricamente, em muitas posições. Para cada posição, $\vec{a}$ é tratado como constante. Se os intervalos de tempo são escolhidos suficientemente pequenos, pode-se obter uma descrição bem precisa do movimento. Naturalmente, não usaremos tantas posições neste exemplo.

Considere $F = -kx$, onde $k = 1$ nt/metro. Seja $m = 5$ kg. Escolhendo um deslocamento inicial de 10 metros e uma velocidade inicial zero, tente agora encontrar o movimento, fazendo x como função do tempo.



(a) *Escolha do Intervalo de Tempo entre as Posições.*

Inicialmente, para $x = 10$ m, $F = -10$ nt. Como $m = 5$ kg, $a = F/m = -2$ m/s^2.

Tomemos um intervalo de tempo que corresponda a uma pequena fração da distância total medida do ponto de equilíbrio, como a distância do movimento durante o primeiro intervalo de tempo. Designemos como d_1 o deslocamento no primeiro intervalo, fazendo-o igual a $\frac{1}{10} x_{\text{inicial}}$, ou $d_1 = -1$ metro. Aplicando $d = \frac{1}{2} at^2$, $-1 = \frac{1}{2}(-2)t^2$, e t é determinado como sendo 1 segundo. Portanto, façamos os cálculos como se a

aceleração permanecesse constante, durante o intervalo de 1 segundo.

(b) *Cálculos Detalhados.*

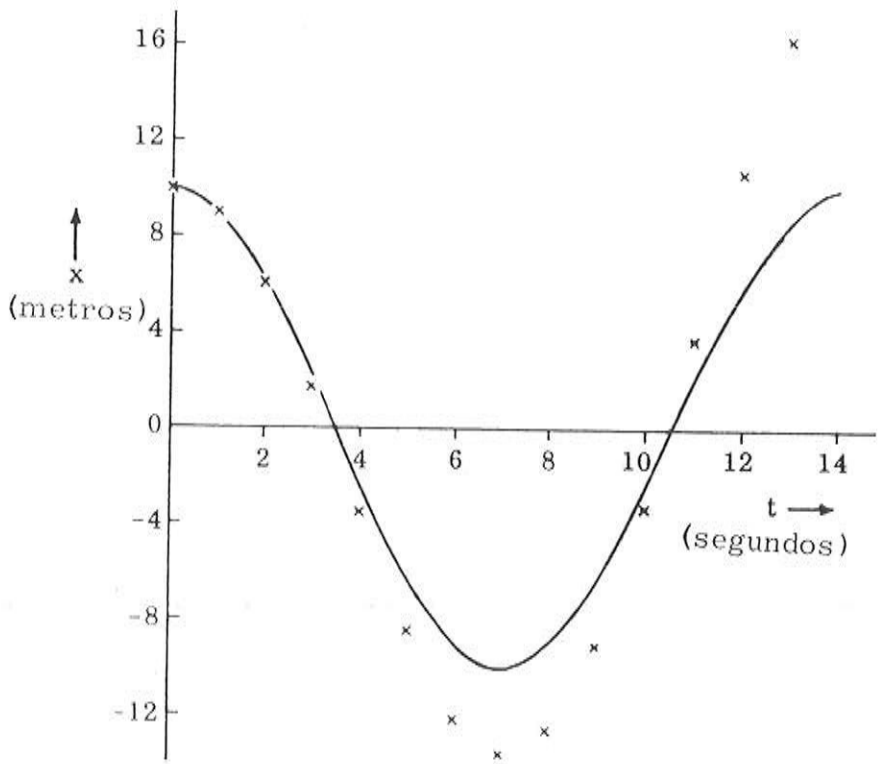
Os cálculos detalhados são simples e diretos, mas um tanto trabalhosos.

Por exemplo, no intervalo 1, $a = -2\ m/s^2$, $v_{1i} = 0$, $\Delta t = 1$ segundo. Logo, $v_{1f} = -2\ m/s$. A velocidade média é -1 m/s; assim, o deslocamento no primeiro intervalo, d_1, é $d_1 = v_m \times \Delta t = (-1\ m/s)\ (1s) = -1$ metro. A posição aproximada, após 1 segundo, é $x_1 = x_i + d = 10 - 1 = 9$ m. Isto resulta em $F = -9$ nt ou $a = -\frac{9}{5} = -1{,}8\ m/s^2$, que não é muito diferente do valor original de $-2\ m/s^2$.

c) *Tabela de Resultados.*

Intervalo n.º	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
x inicial (m)	10	9	6,1	1,7	−3,5	−8,5	−12,1	−13,6	−12,6	−9,1	−3,3	+3,7	+10,7	+1
a inicial (m/s^2)	−2	−1,8	−1,2	−0,34	+0,7	+1,9	+2,4	+2,7	+2,5	+1,8	+0,7	−0,7	−2,1	−
v inicial (m/s)	0	−2	−3,8	−5,0	−5,3	−4,6	−2,7	−0,3	+2,4	+4,9	+6,7	+7,4	+6,7	+
v final	−2	−3,8	−5,0	−5,3	−4,6	−2,7	−0,3	+2,4	+4,9	+6,7	+7,4	+6,7	+4,6	+
v médio	−1	−2,9	−4,4	−5,2	−5,0	−3,6	−1,5	+1,0	+3,5	+5,8	+7,0	+7,0	+5,6	+
d (m)	−1	−2,9	−4,4	−5,2	−5,0	−3,6	−1,5	+1,0	+3,5	+5,8	+7,0	+7,0	+5,6	+
x final	9	6,1	1,7	−3,5	−8,5	−12,1	−13,6	−12,6	−9,1	−3,3	+3,7	+10,7	+16,3	+1
a final	−1,8	−1,2	−0,34	+0,7	+1,9	+2,4	+2,7	+2,5	+1,8	+0,7	−0,7	−2,1	−3,3	−

(d) *Gráfico em primeira aproximação.*



(c) *Com Melhor aproximação*

Êste tipo de cálculo tende a exceder o valor do movimento real, porque a não foi reajustado suficientemente. Tomando intervalos de tempo menores ainda, obteríamos uma melhor aproximação, mas isto não compensaria o esfôrço.

Para o movimento real, o objeto oscila de $x = +10$, para $x = -10$. Sua velocidade máxima seria aproximadamente 4,5 m/s, enquanto os valôres aproximados para os intervalos de tempo usados acima foram 5,3 m/s, na primeira metade da oscilação, e 7,4 m/s na segunda metade da oscilação.

A solução exata do problema necessita o uso do cálculo diferencial:

$a = dv/dt = d^2x/dt^2 = F/m = -kx/m$.

Assim, obtemos uma equação diferencial simples em x e a sua derivada segunda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx}{m}.$$

A familiaridade com soluções de equações diferenciais nos permite propor a função $x = c \cos bt$. Logo,

$$dx/dt = -cb \operatorname{sen} bt$$

$$d^2x/dt^2 = -cb^2 \cos bt = -b^2x.$$

Assim, vemos que $b = \sqrt{k/m} = \sqrt{1/5}$.

Para determinar c, verificamos que $x = c$, quando $t = 0$; logo $c = 10$ m. A solução é, então:

$$x = 10 \cos \sqrt{1/5}\, t \text{ metros.}$$

Apêndice 3. Solução da Equação Diferencial do Movimento Harmônico Simples

(Para os professôres que não conhecem o cálculo diferencial e para os que necessitam de uma recapitulação da equação diferencial). Podemos representar as condições impostas pela fôrça restauradora, escrevendo:

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

$$\text{Então, } m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \qquad (1)$$

Para resolver esta equação, tentamos a solução:

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right).$$

$$\text{Então, } \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi A}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right), \text{ e}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right).$$

Substituindo na equação (1):

$$-m\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right) =$$

$$= -k A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right),$$

$$\text{Portanto, } T^2 = 4\pi^2 m/k$$

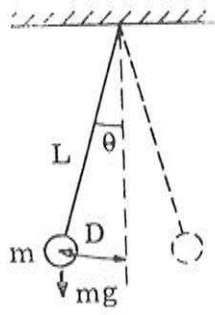
$$T = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

A amplitude do movimento A e o fator de fase sòmente poderão ser determinados, se as condições iniciais fôrem especificadas. Por exemplo, se no instante $t = 0$, x representar o máximo deslocamento de 5 cm, poderemos determinar $[\cos(0 + \Phi)]$ que dá o máximo valor para $\Phi = 0$ e $A = 5$ cm. Logo,

$$x = 5 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \text{ cm.}$$

O tratamento matemático do movimento do pêndulo simples é um pouco mais complicado, mas é dado a seguir para completar êste estudo.

Um fio de massa desprezível, de comprimento L sustenta uma massa pontual, m. A massa é desviada da vertical, de um pequeno ângulo Θ, conforme a figura. O deslocamento de m de sua posição de equilíbrio é $D = L\Theta$.



Devido ao pêso de m, há uma fôrça $\vec{mg}$ agindo sôbre o pêndulo, com o sentido para baixo. Esta fôrça pode ser decomposta nas componentes mg cos Θ, na direção do fio, e mg sen Θ, perpendicular ao fio. A fôrça ao longo do fio é simplesmente anulada pela reação e não entra no problema. A fôrça perpendicular é a fôrça restauradora. Podemos escrever:

$$F = -mg \operatorname{sen} \Theta = ma = m \frac{d^2D}{dt^2},$$

$$\text{ou } mL \frac{d^2\Theta}{dt^2} + mg \operatorname{sen} \Theta = 0.$$

Esta equação *não* representará um movimento harmônico simples, se Θ fôr um ângulo suficientemente grande. Entretanto, se Θ fôr bem pequeno, podemos escrever sen $\Theta \approx \Theta$, e a equação transforma-se em:

$$mL \frac{d^2\Theta}{dt^2} + mg\Theta = 0$$

$$\text{Simplificando, } L \frac{d^2\Theta}{dt^2} + g\Theta = 0. \qquad (2)$$

A equação (2) é idêntica à nossa equação anterior (1), exceto pela nova representação das variáveis e tem uma solução semelhante. Evidentemente, a solução é:

$$\Theta = \Theta_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \Phi\right), \text{ sendo } T = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Apêndice 4. Relatividade Geral

De acôrdo com as idéias básicas da dinâmica de Galileu e Newton, as leis do movimento são válidas sòmente num "sistema inercial", isto é, um sistema em repouso ou movendo-se com uma velocidade vetorial constante. Êstes dois casos possíveis são indistinguíveis, uma vez que percebemos fôrças apenas quando um corpo é acelerado. A dinâmica de Newton começa a falhar para corpos com velocidades próximas à da luz, mas a teoria de Einstein, da relatividade especial, estendeu satisfatòriamente as noções básicas da dinâmica clássica a tôdas as velocidades possíveis.

A existência da gravidade, contudo, complica o assunto, consideràvelmente. Sabemos que a superfície da Terra não é um sistema inercial, no sentido newtoniano. Se lançarmos um corpo para cima, êle não continua a mover-se para cima, mas inverte o sentido e retorna ao solo. Geralmente, descrevemos a situação, dizendo que estamos num sistema inercial, mas que há uma fôrça — a "fôrça gravitacional" — agindo também sôbre o corpo. Realmente, não é possível isolar um corpo das fôrças de gravidade, exercidas pela massa do restante do universo. Assim, a definição de um sistema inercial, em têrmos do estado de "repouso" ou de "movimento uniforme", é sòmente uma aproximação num universo que contém massa, desde que todos os corpos no universo interagem até um certo ponto.

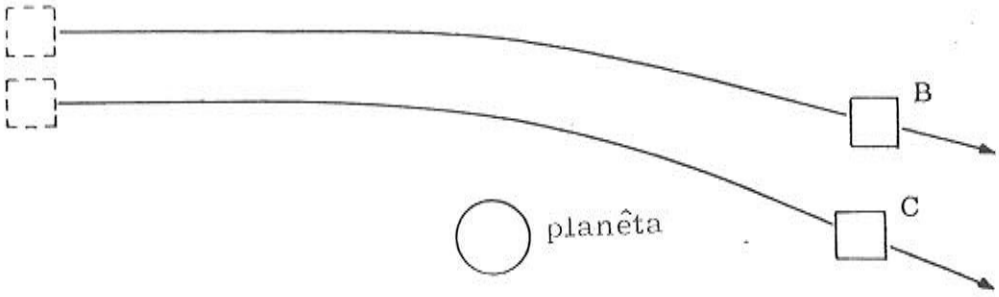
Einstein em sua teoria da relatividade geral tenta restabelecer as leis da Física, de modo a levar em consideração a equivalência entre gravidade e aceleração. Esta teoria é, como todos sabem, de grande complexidade matemática e dificilmente pode ser recomendada como exercício num nível colegial. Contudo, os conceitos básicos da teoria são suficientemente simples, para serem ilustrados por alguns exemplos.

Suponha que estejamos navegando pelo espaço numa nave espacial, onde não há "pêso", assim como nas estórias modernas "em quadrinhos". Nestas condições, poderíamos realizar experiências de dinâmica com nosso próprio corpo, como também com os objetos que nos circundassem, flutuando em nosso compartimento, e decidir ràpidamente se estamos num sistema verdadeiramente inercial, uma vez que as leis do movimento devem ser obedecidas rigorosamente. Se pulássemos para cima, certamente nos chocaríamos com o teto, por menor que fôsse o esfôrço aplicado no pulo. Em seguida, imagine que, durante o curso desta experiência, esta situação de "imponderabilidade" de repente termine. Tornaríamos a ficar de pé no chão, sentindo o nosso próprio pêso. Todos os objetos, que momentos antes flutuavam pelo compartimento, repentinamente, caem ao chão. Que pensaríamos a respeito disto?

Sem olhar através da janela da nave (isto, na verdade, não nos ajudaria) poderíamos concluir que uma das duas coisas teria acontecido: ou nossa nave, de repente, acelerou para cima ou, sùbitamente, *pousamos* (com o piso para

"baixo") na superfície de um planêta. Em qualquer dêstes eventos, seria óbvio que as leis da Física mudassem de repente, e não estivéssemos mais num "sistema inercial". Seria difícil realizar uma experiência que mostrasse se, com efeito, fomos acelerados ou entramos no campo gravitacional, pois as duas ocorrências teriam o mesmo efeito em nossas observações. Isto é precisamente o que queremos dizer, quando afirmamos que a "massa inercial" e a "massa gravitacional" de um corpo estão inextricàvelmente inter-relacionadas. É êste "princípio de equivalência" o fundamento da relatividade geral, isto é, os efeitos de uma aceleração *são, em princípio,* indistinguíveis dos efeitos do campo gravitacional. Mas, e o nosso sistema inercial? Tivemos uma ótima maneira de medi-lo anteriormente, simplesmente observando a validade das leis do movimento. Evidentemente, durante aquêle intervalo de tempo, enquanto nossa nave estava no "sistema inercial", o nosso movimento deveria ser uniforme, na ausência do campo gravitacional (impossível em nosso universo), ou em "queda livre" num campo gravitacional. Assim, o sistema inercial verdadeiro não é o que está em movimento uniforme no espaço, mas o sistema que está em queda livre.

A relatividade geral é, simplesmente, a descrição da natureza vista por um observador num sistema inercial verdadeiro, pacientemente fazendo experiências dentro de uma caixa em queda livre. Para êsse observador, as leis da dinâmica seriam exatas dentro de sua caixa, mas êle ràpidamente concluiria que o espaço fora de sua caixa tem certas propriedades muito peculiares. Como ilustração, imagine que estejamos em queda livre nessa caixa que se move a uma velocidade razoàvelmente elevada, através do espaço. Pela janela, observamos outra pessoa, movendo-se paralelamente a nós com a mesma velocidade, realizando também experiências de dinâmica. Poderíamos comparar os resultados, através de mensagens de uma caixa à outra, e verificar que os resultados são idênticos e que ambas as naves estão em sistemas inerciais. Se, em seguida, nos aproximássemos de um grande planêta (de forma que não nos chocássemos com êle), as duas caixas seriam desviadas pelo campo gravitacional, conforme a figura abaixo.



Nossa caixa, designada por B na figura, desviar-se-ia um pouco e a outra caixa, designada por C, desviar-se-ia um pouco mais, pois está mais próxima do planêta. Uma vez que tanto nós como o observador em C estamos em queda livre, dentro do limite de nossas caixas, nenhum de nós sentiria ou poderia medir diretamente qualquer efeito devido à aceleração. Tanto a nossa caixa como a outra são ainda sistemas inerciais, enquanto nossas medidas internas confirmam isso. Todavia, como estamos agora, evidentemente, nos separando, concluiríamos que a distância entre nós, de repente, começou a aumentar, sem que um de nós tenha aparentemente acelerado. Em vez de descrever o que aconteceu, em têrmos de alguma "fôrça" que não podemos detectar, a ocorrência poderia ser descrita em têrmos de uma distorção no espaço e tempo que observamos.

A exposição acima é a essência da teoria da relatividade geral. O campo gravitacional, de acôrdo com esta teoria, provoca uma "deformação" do espaço e tempo nas proximidades de uma massa. A gravidade, portanto, interage não como uma "fôrça", mas como uma propriedade do espaço e tempo.

Todo êste procedimento seria infrutífero, se não permitisse a extensão das leis da Física e a previsão de certos acontecimentos observáveis. Realmente, a relatividade geral prevê certos

fatos que não são corretamente explicados, nem pela dinâmica de Newton, nem pela relatividade especial. Um dêsses fenômenos envolve o encurvamento da luz num campo gravitacional. Na relatividade geral, a "distância mais curta entre dois pontos" não é uma linha reta, mas é um "geodésico", a trajetória que a luz segue em seu percurso entre dois pontos, encurva-se devido ao campo gravitacional. De acôrdo com a relatividade especial, a luz tem energia e, como massa e energia são equivalentes, a luz será desviada pelo campo gravitacional. Entretanto, o desvio não é dado corretamente por meio dêste argumento simples, porque a fôrça da gravidade sôbre um objeto em movimento depende de sua velocidade. Podemos, realmente, observar o desvio da luz de estrêlas distantes, ao passarem muito próximas ao Sol, durante um eclipse solar. O efeito é muito pequeno, aproximadamente, 2 segundos de arco, mas é possível medi-lo com precisão, e concorda claramente com as previsões da relatividade geral.

A teoria da relatividade geral é de considerável importância na Física, porém é mais um instrumento de trabalho para o cosmologista em seu estudo do universo. O cosmologista preocupa-se com perguntas, tais como: — "É o universo finito?" — isto é, um geodésico dirigido para fora do universo conhecido continuaria eternamente, ou, fazendo seu percurso sempre para fora, voltaria ao seu ponto de partida? Grande parte do esfôrço de astrônomos contemporâneos concentra-se na resposta a esta pergunta. Presentemente, não sabemos se o espaço que conhecemos é finito ou infinito, mas é certamente "encurvado", no sentido relativístico.

Apêndice 5. (Suplemento para o Capítulo 23, Seção 5 — Dedução da Equação que Relaciona m, m_0, v e v_e Para Foguetes)

Esta relação pode fàcilmente ser deduzida, empregando-se o cálculo integral. Considere um foguete de massa, m, e velocidade, v. O foguete ejeta um pouco de massa para trás. Representando por dm a pequena massa ejetada e por v_e a velocidade de ejeção de dm, essa massa será lançada com uma quantidade de movimento $p = (dm)v_e$. Como a quantidade de movimento deve conservar-se, a variação na quantidade de movimento do foguete será $-(dm)v_e$. O restante do foguete, massa m, deve aumentar a sua velocidade de uma quântidade, dv, e, assim, temos a relação:

$$-(dm)v_e = m\,dv$$

ou

$$-\frac{dv}{v_e} = \frac{dm}{m}.$$

Note que v_e é a velocidade constante (relativa ao foguete) com que a massa é ejetada; m e v são variáveis.

Esta equação pode ser integrada, fornecendo (lembre-se de que v_e é uma constante):

$$\frac{v}{v_e} = -\ln m + c_1$$

onde ln representa o logaritmo na base e.

Uma outra alternativa é:

$$m = c_2\, e^{-v/v_e}.$$

Para determinar qualquer uma das constantes, devemos introduzir os valôres iniciais. Quando o foguete foi lançado, sua massa era $m = m_0$, e sua velocidade era $v = 0$. Isto fornece: $c_1 = \ln m_0$ ou $c_2 = m_0$.

Portanto, obtemos as formas equivalentes da equação final:

$$\frac{v}{v_e} = \ln \frac{m}{m_0}$$

ou

$$m = m_0\, e^{-v/v_e}.$$

Apêndice 6. O Produto de Dois Vetores

O trabalho envolve o produto de uma fôrça por um deslocamento. A fôrça e o deslocamento são grandezas vetoriais, mas o trabalho é um escalar. Êste tipo particular de produto de dois vetores é chamado produto escalar ou "produto ponto", e é escrito:

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

O produto escalar é o produto dos módulos de dois vetores multiplicados pelo cosseno do ângulo formado entre êles. Isto pode também ser expresso como o módulo de um dos vetores,

zes o módulo da componente do outro vetor, longo do primeiro.

Na Figura (a) vemos, de modo geral, que componente de $\vec{F}$ ao longo da direção de possui o módulo F cos Θ, onde Θ é o ângulo ıtre F e D. Logo, $T = \vec{F}.\vec{d} = (F \cos \Theta)\, d$. bserve que podemos agrupar os fatôres, escreendo diferentemente:

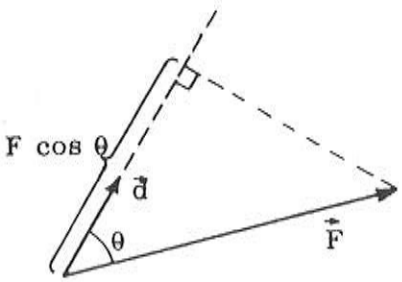
$$T = F\,(d \cos \Theta).$$

Vemos na Figura (b) que d cos Θ é a componente do deslocamento, na direção da fôrça. Assim, podemos dizer que:

Trabalho = deslocamento total × componente da fôrça atuando ao longo da direção do deslocamento, ou:

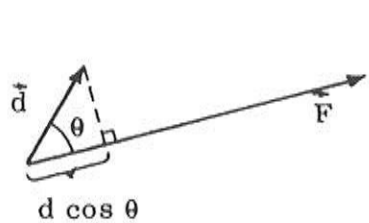
Trabalho = fôrça total aplicada × componente do deslocamento ao longo da direção dessa fôrça.

(a)



$T = (F \cos \theta)\, d$

(b)



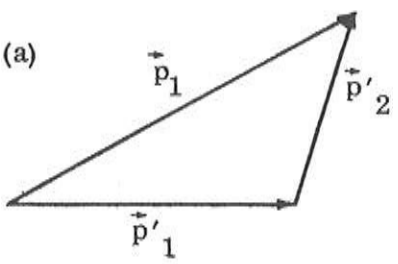
$T = F\,(d \cos \theta)$

Apêndice 7. Ângulo de 90° Numa Colisão Elástica

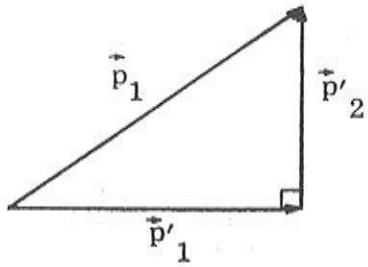
Em uma colisão elástica entre massas iguais, ma delas inicialmente em repouso, as trajetóias finais formam um ângulo de 90°, uma com outra.

Se $\vec{p}_1$ é a quantidade de movimento da bola que se move antes da colisão, e $\vec{p}'_1$ e $\vec{p}'_2$ são as quantidades de movimento após a colisão, a conservação das quantidades de movimento fornece $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$. Portanto, de maneira genérica, os três vetores quantidade de movimento devem formar um triângulo, como o mostrado em (a).

(a)



(b)



A energia antes da colisão é:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{p_1^2}{2m},$$

e, se a energia cinética é conservada na colisão,

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m}.$$

O que quer dizer que:

$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2,$$

que é, simplesmente, o teorema de Pitágoras para o triângulo mostrado em (a). O triângulo deve ser, então, retângulo como em (b), e as duas bolas afastam-se, formando um ângulo de 90°.

Nas Figuras 23-9 e 23-10, o ângulo entre $\vec{p}'_1$ e $\vec{p}'_2$ é, aproximadamente, 85,5°, em vez de 90°. Isto se deve ao fato de que a colisão não é perfeitamente elástica. A quantidade de movimento conserva-se completamente na colisão, e o fato de $\vec{\Delta p}_1$ e $\vec{\Delta p}_2$ não pertencerem a uma mesma reta, na Figura 23-10b (por, aproximadamente, 1°), é um êrro experimental, provàvelmente devido ao atrito no sistema (uma fôrça externa).

O ângulo entre as trajetórias finais deve ser menor do que 90°, sempre que houver alguma perda de energia na colisão. Isto pode ser observado, considerando-se o caso em que as bolas se colam uma na outra. Neste caso, o ângulo é 0°, evidentemente menor que 90°.

Quando se trata de uma colisão frontal, a bola incidente pára, e a bola atingida continua o movimento para a frente, com a mesma velocidade da bola incidente. Neste caso, o ângulo entre p'_1 e p'_2 é indeterminado.

Apêndice 8. Relação Entre Fôrça e Energia Potencial

Quando uma massa se move sob a ação de uma fôrça restauradora linear, $F = -kx$, a sua energia potencial é $U = \frac{1}{2} kx^2$ e, como a variação da energia cinética é de sinal contrário à variação da energia potencial, medida pelo trabalho realizado ao transferir energia de uma forma a outra, obtemos:

$$T = \Delta E_c = \frac{1}{2} k (x^2 - x'^2).$$

Em seguida, suponhamos que alguém nos forneça esta expressão, e desejamos verificar se ela é correta, da mesma forma quando nos foi dada uma expressão da variação da energia potencial ou cinética, numa interação gravitacional. O processo empregado, para testar se nossa expressão para a variação da energia potencial é correta, é escrevê-la numa forma em em que a equação se transforma num produto de alguma expressão, por uma pequena variação na distância, de x para x'. Como estamos tratando de trabalho, esta expressão deve ser a fôrça vêzes a pequena variação na distância, e podemos verificar se a fôrça é realmente a que deveria ser. Para o exemplo da energia potencial de uma fôrça restauradora linear, o processo é o seguinte:

Fatorando a expressão acima,

$$T = \frac{1}{2} k (x - x') (x + x');$$

admitindo que a variação na distância seja $\Delta x = x' - x$, temos:

$$T = \frac{1}{2} k (-\Delta x) (2x - x + x')$$

$$= -k \frac{(2x + \Delta x)}{2} \Delta x.$$

Para uma pequena variação de distância, Δx, o Δx dentro dos parênteses pode ser desprezado, em comparação com a distância 2x e, logo, $T = -kx \Delta x$.

Êste resultado concorda com nossa expectativa, na qual a fôrça deve ser $F = -kx$.

Por outro lado, suponha que nos seja dada uma expressão incorreta para a energia potencial, uma que realmente pertença a uma fôrça diferente. Através de um processo análogo, podemos determinar a fôrça relacionada a essa expressão. Por exemplo, suponha que alguém afirme que a energia potencial associada à fôrça restauradora linear é realmente $U = kx$. Daí, podemos concluir que o trabalho, T, que altera

a energia cinética por uma pequena quantidade, quando a massa se desloca de x para x', :

$$T = \triangle E = k\,(x - x') = -\,k\,\triangle x.$$

Vemos imediatamente que a fôrça correspondente a esta energia potencial é uma constante F=—k. Deveríamos esperar que a fôrça fôsse constante, porque nossa expressão U = kx é semelhante à da energia potencial num campo gravitacional constante.

Em outras palavras, qualquer expressão, para uma energia potencial ou para o trabalho em mover uma massa de um lugar a outro, implica um tipo definido de fôrça, e a expressão da energia potencial é característica para cada tipo de fôrça. Um possível método, para determinar a energia potencial associada a qualquer tipo de fôrça, é investigar tôdas as expressões possíveis que representem a energia potencial e escolher aquela que reproduza realmente a fôrça.

Apêndice 9. Cálculo das Velocidades de Escape e Energias de Ligação

1. A velocidade de escape é deduzida no texto como sendo:

$$v_e = \sqrt{2\,GM/r_T}$$

v_e pode ser determinado, substituindo os valôres nessa expressão, ou o cálculo pode ser simplicado, lembrando que GM/r_T^2 é a fôrça gravitacional na superfície da Terra. Logo,

$GM/r_T = gr_T$, e

$$v_e = \sqrt{2gr_T}$$
$$= \sqrt{2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times 6{,}4 \times 10^6 m}$$
$$= 11{,}2 \times 10^3\ m/s.$$

2. Para calcular a energia de ligação da Terra com o Sol, necessitamos de algumas constantes do sistema solar (texto, pgs. 56 e 65):

$G = 6{,}670 \times 10^{-11}$ nt m^2/kg^2 (Constante Gravitacional)
$M = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg (Massa do Sol)
$m = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg (Massa da Terra)
$R = 1{,}5 \times 10^{11}$ m (Raio da órbita da Terra)
1 ano $= 3{,}2 \times 10^7$ s (Número de segundos em um ano)
$v = 2\pi R/1$ ano $= 3{,}0 \times 10^4$ m/s (Velocidade da Terra em sua órbita).

Assim, a energia cinética da Terra relativa ao Sol é:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{6{,}0 \times 10^{24}\ kg\ (3{,}0 \times 10^4\ m/s)^2}{2} = = 2{,}7 \times 10^{33}\ \text{joules}.$$

A energia potencial da Terra relativa ao Sol é:

$$-\frac{GMm}{R} = -\frac{6{,}67 \times 10^{11}\ \text{nt-m}^2/\text{kg}^2 \times 2{,}0 \times 10^{30}\ kg \times 6{,}0 \times 10^{24}\ kg}{1{,}5 \times 10^{11}\ m} = -\,5{,}3 \times 10^{33}\ \text{joules}.$$

Logo, a energia de ligação da Terra com o Sol é

$$E_l = 2{,}6 \times 10^{33}\ \text{joules}.$$

3. Para calcular a *sua* energia de ligação com a Terra, desprezamos inicialmente seu movimento devido à rotação da Terra. Assim,

$v = 0$
$r = 6{,}4 \times 10^6$ m, (raio da Terra)
$m =$ *sua* massa, entre 50 e 90 kg
$g = 9{,}8\ m/s^2$ (aceleração da gravidade).

Como $\frac{GMm}{r^2} = mg =$ SEU pêso,

então $E_l = \frac{GMm}{r} = mgr = 3{,}1$ a $5{,}6 \times$ $\times 10^9$ joules, o que abrange o valor dado no texto, para a *sua* energia de ligação com a Terra — o exato valor depende de sua massa.

O efeito da rotação da Terra sôbre sua energia de ligação pode ser avaliado, como se segue:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 60 \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 60 \left(\frac{2\pi \times 6{,}4 \times 10^6}{24 \times 60 \times 60} \right)^2 = 6{,}5 \times 10^6$$

joules.

Isto representa apenas uma fração de 1/10 por cento da energia de ligação calculada acima.

4. Podemos determinar as respostas quantitativas para a questão proposta no primeiro parágrafo da Seção 4, sôbre a energia potencial gravitacional de um satélite. Considere um satélite de 1 ton, cujo período de revolução em tôrno da Terra é de 2 horas e suponha uma órbita circular (como foi feito no exemplo acima para Terra-Sol). Eliminando v nas expressões,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}, \qquad \text{(lei de Newton) e}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \qquad \text{(período de rotação)}$$

(como neste caso a Terra é o centro de movimento, representando por M a sua massa e por m a massa do satélite) temos:

$$r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}. \qquad \text{(terceira lei de Kepler).}$$

Para $T = 2 \times 60 \times 60$ s, (período do satélite)

$M = 6{,}0 \times 10^{24}$kg (massa da Terra)

$G = 6{,}670 \times 10^{-11}$nt m^2/kg^2,

então, $r = 8{,}1 \times 10^6$ m (raio da órbita do satélite em tôrno da Terra).

Substituindo êsse valor de r na equação de T, temos:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 7{,}1 \times 10^3 \text{ m/s.}$$ (velocidade do satélite em sua órbita).

Considerando $m = 9 \times 10^2$ kg a massa do satélite, sua energia cinética é:

$$\frac{mv^2}{2} = 2{,}3 \times 10^{10}$$ joules, (energia cinética do satélite em órbita, relativa à Terra).

$$\frac{-GMm}{r} = -4{,}4 \times 10^{10}$$joules,

(energia potencial do satélite em órbita relativa à Terra)

Portanto, $E_l = 2{,}1 \times 10^{10}$ joules (energia de ligação do satélite em órbita).

Deve-se empregar mais energia do que esta para remover o satélite da influência da Terra.

Em seguida, vamos determinar a energia necessária para colocar um satélite em órbita, de duas maneiras: primeiro, indiretamente e, depois, de modo mais direto.

Observamos que a energia de ligação do satélite com a Terra, quando êle está em repouso antes do lançamento, é encontrada do mesmo modo que a energia de ligação de um homem com a Terra. Esta energia é (desprezando novamente a pequena energia cinética inicial)

$$E_{l\,(\text{superfície})} = \frac{GMm}{r_{\text{Terra}}} = 5{,}6 \times 10^{10} \text{ joules.}$$

A diferença entre essa energia e a energia de ligação em órbita deve ser a energia total necessária para colocar o satélite em órbita, a partir da superfície da Terra.

Energia necessária $= E_{l\,(\text{superfície})} - E_{l\,(\text{órbita})} =$
$= 3{,}5 \times 10^{10}$ joules.

[A energia necessária para colocar o satélite em órbita pode ser dada também por:

$$GMm \left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_0} \right) = 1{,}2 \times 10^{10} \text{ joules,}$$ *mais* a energia cinética que o satélite deve ter para permanecer em órbita. Vimos anteriormente que esta energia cinética é $2{,}3 \times 10^{10}$ joules e, portanto, a energia total necessária é $(1{,}2 + 2{,}3) \times 10^{10}$ joules, que coincide com o resultado anterior].

Apêndice 10. Energia do Movimento das Moléculas de um Gás Poliatômico

A extensão da teoria para os gases poliatômicos é razoàvelmente simples. Verificamos, pela equação $\frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} mv^2$, que a energia

térmica, $\frac{1}{2}$ kT, está associada a cada um dos três graus de liberdade do movimento do centro de massa da molécula. Haverá mais graus de liberdade disponíveis, se considerarmos o caso de uma molécula mais complicada do que um único átomo. Por exemplo, uma molécula diatômica é uma unidade em forma de haltere. Considere os dois átomos no eixo x. Seu centro de massa pode mover-se, independentemente, nas direções x, y e z. Além dêstes movimentos, o "haltere" pode girar independentemente, em tôrno do seu centro de massa e de eixos paralelos às direções y e z. Êle deve ter também um "spin" em tôrno do eixo x, da mesma forma que o haltere tem um "spin" em tôrno do seu próprio eixo. Entretanto, a dinâmica para êsse tipo de rotação é, evidentemente, bem diferente dos outros dois. Para átomos pontuais, nenhuma energia deve subsistir neste tipo de "spin". Há mais um tipo de movimento independente para uma molécula diatômica. Êste movimento é devido à vibração dos dois átomos, aproximando-se e afastando-se um do outro. Contràriamente aos outros movimentos, êste envolve tanto a energia cinética como a potencial, e êste fato nos leva a introduzir dois graus de liberdade associados à vibração, ao invés de apenas um.

A física clássica afirma que a energia de tal sistema, em média, estará igualmente distribuída entre todos os graus de liberdade. Portanto, se 8 joules de energia calorífica fôrem transferidos a um gás monoatômico, tôda a energia se distribuirá nos 3 graus de liberdade de translação. Se a mesma quantidade de energia fôr transferida a um gás diatômico, a Lei da Equipartição estabelece que esta energia ficará igualmente distribuída entre os sete graus de liberdade referidos acima (desprezando o "spin"). Logo, sòmente 3/7 da energia transformam-se em movimento de translação que determina a temperatura. O calor específico de um gás monoatômico deve ser 3/7 do gás prèviamente discutido.

Realmente, a mecânica quântica modifica essa imagem, determinando um mínimo de energia de excitação, que pode atuar em qualquer grau de liberdade. Em geral, a energia é mais baixa no grau de translação, maior no de rotação e maior ainda no grau de vibração. O resultado é que, em temperaturas baixas, sòmente é excitado o movimento de translação. Em altas temperaturas, a rotação pode ser excitada e, a uma temperatura mais alta ainda, será excitado o movimento de vibração.

À temperatura ambiente, para os gases diatômicos em sua maioria, ocorre a rotação molecular, mas a vibração não. Portanto, há sòmente cinco graus efetivos de liberdade, e o calor específico será 5/3 do calor específico de um gás monoatômico. Logo, em geral, o calor específico depende tanto da estrutura da molécula, como da temperatura.

Apêndice 11. Suplemento Histórico Sôbre Calor

A história da investigação do homem, para compreender a natureza do calor é fascinante. Naturalmente, os homens já conheciam algo sôbre o calor, muito antes de serem formulados conceitos sôbre energia. Especulações antigas, relativas à natureza do calor, estavam baseadas em duas hipóteses antagônicas: a primeira hipótese afirmava que o calor, de certa forma, estava ligado ao movimento (fogo por atrito, etc) e a segunda afirmava que o calor era uma substância material.

Em 1620, Francis Bacon estabeleceu em seu *Novum Organum* que "o próprio calor ... é movimento e nada mais". Mais tarde, no século XVII, Robert Boyle e Robert Hooke expressaram idéias análogas, mas a teoria teve pouca aceitação entre os cientistas do século seguinte, principalmente, porque ela não era capaz de explicar como, sendo movimento, o calor conservava-se numa experiência em que dois corpos, inicialmente em temperaturas diferentes, atingiam o equilíbrio térmico, quando colocados em contato.

Durante o século XVIII, o calor foi considerado como sendo um fluido imponderável e elástico, presente em qualquer corpo "quente". Supunha-se que as partículas do "fluido" se repeliam umas às outras, porém, eram atraídas pelas partículas ordinárias da matéria. Êste "fluido" calor tornou-se conhecido como "calórico", e o conceito de calor como uma substância material foi, conseqüentemente, chamado "teoria do calórico".

O fundamento da teoria do calórico estava na idéia de que o calor se conserva. As observações e experiências feitas pelos que admitiam esta teoria eram realizadas, em sua maioria, sob determinadas codições que permitiam perma-

necer invariável a quantidade total de calor. Tais experiências sugeriam que o calor era uma quantidade que se conserva. Assim, era conveniente pensar no calor como uma substância que não pode ser criada, nem destruída, mas que pode fluir de um corpo a outro.

É interessante examinar as explicações para os fenômenos do calor, dadas pelos "caloristas". Êles supunham, o que era comum naquele tempo, que as unidades básicas da matéria eram impenetráveis. Não obstante a atração mútua das partículas de uma substância, êles argumentavam que estas partículas não poderiam realmente estar em contato; de outra forma, a contração não ocorreria, quando um corpo fôsse comprimido. Todavia, deveria haver alguma fôrça repulsiva que equilibrasse a atração, e esta fôrça era atribuída à presença do calórico entre as partículas. Devido à própria repulsão da substância calórica, o calor deveria fluir de um corpo quente para um frio. O fato da substância existir nos estados sólido, líquido ou gasoso dependeria da quantidade de calórico existente em sua composição. Quando o corpo contivesse uma grande quantidade de calórico, êle assumiria a forma de um gás; sólidos e líquidos conteriam menos calórico e, portanto, ocupariam um volume menor. Quando uma substância esfriava, pensava-se que o calórico, em parte, tivesse sido drenado; o calórico removido (que fornecia a fôrça repulsiva) explicava o fato de que a maioria das substância se contrai com o esfriamento.

Embora a teoria do calórico não tivesse sido largamente empregada, alguns de seus têrmos são usados na descrição moderna do calor. Isto é particularmente conveniente, quando se discute o "fluir" e o "transferir" de calor. Ainda falamos que um objeto "contém calor". E, de fato, nossa unidade de calor, a caloria, foi originalmente utilizada como uma medida da substância calórica.

As experiências do Conde Rumford (1753-1814), iniciadas por volta de 1787, foram projetadas para derrubar a teoria do calórico. A primeira preocupação de Rumford foi mostrar que, aquecendo-se um corpo, sua massa não aumenta. Poder-se-ia argumentar que, se o calórico fôsse matéria, deveria possuir a propriedade fundamental de tôda a matéria: deveria ter massa. Através de uma série de experiências extremamente cuidadosas, êle mostrou que o pêso de um corpo não depende de sua temperatura. Contudo, esta prova não ofereceu sérias dificuldades aos "caloristas". Êstes simplesmente respondiam que o calórico não era uma matéria comum e, portanto, não estava, necessàriamente, sujeito a fôrças gravitacionais.

Rumford, então, dirigiu-se para experiências em que o calor é produzido por atrito. Enquanto supervisionava a operação de perfuração de canos de canhão, no arsenal de Munich, êle observou que o canhão atingia uma temperatura muito elevada durante a perfuração. Baseando-se na teoria do calórico, a fôrça atrativa que se supôs existir entre o calórico e as moléculas do metal deve ter sido diminuída, quando o cano era perfurado, e o metal, transformando-se em cavacos, liberava calórico que aparecia em forma de calor. Entretanto, êste calor liberado em tais experiências era inesgotável. Daí, Rumford concluiu que: "Parece-me extremamente difícil, senão impossível, formar qualquer idéia de alguma coisa capaz de ser excitada e transmitida, do modo como o calor era excitado e transmitido em tais experiências, exceto se o calor fôr MOVIMENTO".

O fundamento físico, no qual a teoria do calórico se baseava, era a noção de que calor era uma quantidade que se conservava. Era justamente neste ponto que os críticos combatiam a teoria. Êles demonstravam que, nas experiências com o atrito, tais como a de Rumford, o calor poderia ser produzido em quantidades aparentemente ilimitadas.

Segundo consta, Julius Robert Mayer, que viveu de 1814 a 1878, foi o primeiro a compreender a importância de uma identificação do calor como energia. Mayer teve a idéia de que a energia não poderia ser destruída, e que uma forma de energia era, de certo modo, equivalente à outra. Êle afirmava que:

> "Em inúmeros casos, vemos cessar o movimento, sem causar um outro movimento ou elevar um pêso; mas, a energia não pode ser aniquilada, pode apenas transformar-se em outra forma de energia; e, assim, surge a questão: qual é essa outra forma de energia .... que se pode presumir?"

Êle afirmava que, como o trabalho pode ser convertido em calor, êste deve ser uma forma de energia.

> "Se as energias potencial e cinética são equivalentes ao calor, o calor deve, evi-

dentemente, ser também equivalente às energias cinética e potencial".

Aqui, Mayer fêz sua observação mais perspicaz. Se o calor é simplesmente uma forma transformada de energia cinética ou potencial, e se a energia como um todo é conservada, então, uma dada quantidade de calor deve resultar de uma quantidade proporcional de energia mecânica. O trabalho realizado sôbre um objeto deve produzir uma quantidade proporcional de calor no objeto, se suas energias cinética e potencial permanecem fixas. De experiências anteriores sôbre gases, Mayer foi capaz de deduzir uma relação quantitativa entre trabalho mecânico e calor, que, razoàvelmente, concorda com os melhores valôres obtidos posteriormente. O trabalho definitivo de James Prescott Joule (1818-1898) surgiu um pouco mais tarde e pôs fim à teoria do calórico.

Apêndice 12. Suplemento Sôbre as Três Leis da Termodinâmica

O texto cita ràpidamente a primeira e a segunda das três leis da termodinâmica. A primeira lei deriva-se da teoria cinética e diz respeito à energia das moléculas que formam qualquer substância. Esta lei é, freqüentemente, expressa na forma:

$$\delta Q = dU + \delta T,$$

que estabelece que o aumento em calor que flui para um corpo, δQ, é igual à soma do acréscimo na energia interna (térmica) do corpo, dU, e o acréscimo de trabalho, δT, realizado pelo corpo contra uma fôrça externa. Se o trabalho é realizado *sôbre* o corpo por uma fôrça externa (por exemplo, pela compressão de um gás com um pistão) δT é negativo. Semelhantemente, δQ é negativo para o calor que flui para fora do corpo. A primeira lei é simplesmente um tratamento formal da conservação da energia, onde definimos, explìcitamente, calor como uma forma de energia.

A primeira lei nos ensina muito acêrca do comportamento térmico da matéria. Por exemplo, a lei nos diz que, se isolarmos tèrmicamente um sistema de modo que não haja passagem de calor para dentro ou para fora, de forma que $\delta Q = 0$, o trabalho realizado sôbre o sistema (por exemplo, comprimindo um gás) aumentará a energia térmica do sistema. Ao contrário, se o sistema realizar trabalho (por exemplo, expandindo e empurrando o pistão) sua energia térmica reduzir-se-á. Podemos perceber, imediatamente, que é necessário mais calor para aumentar a energia térmica de um sistema à pressão constante (desde que o sistema pode expandir-se e realizar trabalho), do que um sistema a volume constante: (se o deslocamento é zero, δT é zero).

A primeira lei, entretanto, não nos diz tudo o que se sabemos sôbre calor. Considere a seguinte situação: suponha que possamos introduzir um grande número de moléculas numa caixa onde existe o vácuo, com tôdas as moléculas movendo-se na mesma direção e com a mesma velocidade. Se olhássemos no interior da caixa, um dia depois (ou mesmo, um segundo depois, não importa) verificaríamos que a ocorrência das colisões ao acaso desorganizou completamente o movimento das moléculas. As moléculas mover-se-iam em tôdas as direções, de acôrdo com a distribuição de velocidades, de Maxwell. E, nem ocasionalmente, encontraríamos tôdas as moléculas se deslocando na mesma direção, com a mesma velocidade. A probabilidade de uma tendência da ordem para a desordem é ditada pela experiência. Êste é o caminho que o sistema tende a seguir, e esta tendência do sistema não é prevista pela primeira lei da termodinâmica. A energia poderia se conservar, tendendo da desordem para a ordem, exatamente como tende para o sentido inverso.

Se mergulharmos um pedaço de metal bem aquecido em um balde de água fria, esperamos que o metal se esfrie e a água se aqueça. Será surpreendente encontrar o metal ainda mais quente e a água congelada. Contudo, a última transformação não violaria a conservação da energia.

A direção que a transformação, como a citada acima, tende a seguir é limitada pela segunda lei da termodinâmica. O parâmetro, introduzido para servir como medida dessa tendência, é chamado entropia.

A segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada de muitas maneiras. Essencialmente, todos os enunciados têm o mesmo significado. Um dêles é: "No equilíbrio térmico, a entropia de um sistema é máxima". Em outras palavras, há um "sentido" natural da ordem para a desordem. Consideremos uma sala cheia de ar, mas

com um mol de um gás em uma garrafa, no canto da sala (estado altamente ordenado); se removermos a tampa da garrafa, a "direção natural" será tal, que teremos possìvelmente uma distribuição ao acaso das moléculas, na sala tôda (estado altamente desordenado). Porém, se iniciarmos com um estado desordenado, o mol do gás, distribuído ao acaso por tôda a sala, não terá muita probabilidade de que suas moléculas voltem eventualmente ao interior da garrafa.

Anàlogamente, se tivermos dois corpos separados, um quente e um frio, e os pusermos em contato térmico, a entropia dêsse conjunto aumentará se o calor fluir do corpo quente para o corpo frio, de modo que ambos ficarão com a mesma temperatura final. Se o calor fluísse do corpo frio para o quente, de modo que o corpo frio se esfriasse mais ainda e o quente se aquecesse mais ainda, a entropia do conjunto teria diminuído. De acôrdo com a segunda lei, o "sentido natural" é tal, que podemos excluir esta segunda possibilidade para corpos de tamanho razoável. Realmente, devemos efetuar trabalho para fazer com que o calor flua do corpo frio para o corpo quente (exemplo, um refrigerador).

A segunda lei possui amplas conseqüências e contém um significado muito mais profundo, do que apenas o de afirmar que o calor flui de corpos quentes para frios. Explica por que encontramos "ruído" nas resistências de rádio, por que tôdas as medidas estão sujeitas a êrros fortuitos, e outras coisas.

A terceira lei da termodinâmica refere-se ao zero absoluto de temperatura. Com efeito, esta lei afirma que se pode tornar a temperatura de um objeto tão próximo ao zero absoluto quanto se queira, porém, nunca podemos atingir perfeitamente o limite.

Apêndice 13. Suplemento Sôbre Máquinas

As máquinas, tais como alavancas simples, polias, cunhas, parafusos e redutores, ou as possíveis combinações e permutações com essas máquinas, são freqüentemente tratadas minuciosamente, nos cursos elementares de Física. Elas foram omitidas no curso do PSSC, em parte, por falta de espaço e, também, porque êste assunto está à margem das principais idéias da Física. Tôdas as máquinas podem ser entendidas, simplesmente, tendo como base as leis da termodinâmica. Comumente, ignoramos o efeito térmico, o que contraria apenas o impôsto pela primeira lei. Quando introduzimos uma certa quantidade de trabalho, $F_i s_i$, numa máquina, esperamos obter, pelo menos, a mesma quantidade de trabalho de volta. Se considerarmos $F_r s_r$ o produto da fôrça útil pelo deslocamento, o trabalho retirado, para tais máquinas em geral, será $F_i s_i \geq F_r s_r$. O sinal *igual* vale sòmente para uma máquina ideal, onde não há perdas por atrito. Esta "equação da máquina" é, simplesmente, uma formulação da conservação de energia. A definição usual da "vantagem mecânica" ou "ganho real" da máquina, F_r/F_i, ainda que seja um conceito útil, não é fundamental. É evidente que, para uma máquina ideal, $F_r/F_i = s_i/r_r$, e podemos determinar a vantagem mecânica de qualquer máquina simples, verificando a razão do deslocamento da fôrça que introduz trabalho pelo deslocamento da fôrça que retira trabalho.

Durante séculos, muitos homens sonharam em construir máquinas que executassem "movimento perpétuo", dispositivos que realizassem trabalho útil, consumindo menos do que a quantidade equivalente de energia produzida. Comumente, isto tem contribuído apenas para transferir dinheiro do bolso de pessoas incautas para o bolso dos "inventores" ou promotores. Êste tipo de máquinas de movimento perpétuo, que funcionam violando a lei da conservação de energia, é denominado, de modo geral, moto-contínuo de primeira espécie, visto que são incompatíveis com a primeira lei da termodinâmica. Algumas dessas máquinas são mais engenhosas. Funcionam sem violar a conservação de energia, fluindo o calor de um modo errado. Êste tipo de dispositivos, que violam a segunda lei, é chamado moto-contínuo de segunda espécie. Tôdas as máquinas de movimento perpétuo, não importa com que habilidade sejam planejadas ou engenhosamente construídas, possuem uma grande característica em comum: não funcionam!

GUIA DO PROFESSOR PARA EXPERIÊNCIAS, PARTE III

Como na Parte II, é muito importante planejar as experiências, em conexão com as seções específicas do texto.

Número	*Experiência*	*Melhor Oportunidade*	*Prioridade*
III - 1	Uma Variante da Experiência de Galileu.	Antes da Seção 20-2	°
III - 2	Variações de Velocidade por uma Fôrça Constante.	Antes da Seção 20-3	° ° °
III - 3	Como a Aceleração Depende da Fôrça e da Massa.	Antes da Seção 20-3	° ° °
III - 4	Massas Inercial e Gravitacional.	Após as Seções 20-5 e 20-6.	° °
III - 5	Fôrças Exercidas sôbre uma Bola no Espaço.	Após a Seção 21-4	° °
III - 6	Fôrça Centrípeta.	Antes da Seção 21-5	° ° °
III - 7	Lei das Áreas Iguais.	No meio do Capítulo 22	°
III - 8	Variações da Quantidade de Movimento numa Explosão.	Durante a Seção 23-2	° ° °
III - 9	O Carrinho e o Tijolo	Durante a Seção 23-4	° °
III - 10	Uma Colisão em duas Dimensões	Após a Seção 23-4	° ° °
III - 11	Colisões Lentas	Durante a Seção 24-5	° °
III - 12	Variações na Energia Potencial.	Após a Seção 25-3	° ° °
III - 13	A Energia de um Pêndulo Simples.	Após a Seção 25-3	° °
III - 14	Uma Colisão Frontal	No Capítulo 26	°

°°° indispensável; °° desejável; ° facultativa.

III - 1. UMA VARIANTE DA EXPERIÊNCIA DE GALILEU

Esta é uma modificação da experiência "idealizada" por Galileu, descrita na Seção 20-2. É conveniente realizá-la, antes dos alunos terem estudado no texto esta seção e após a apresentação da questão dos objetos conservarem-se em movimento, sem serem empurrados. Para poupar tempo, esta experiência pode ser

feita como demonstração, ou omitida em favor das experiências sôbre a lei de Newton que são mais importantes.

Galileu raciocinou que, como uma bola abandonada em uma rampa tende a subir até a mesma altura, em uma rampa oposta, uma bola lançada numa superfície horizontal teria um movimento perpétuo, se não houvesse atrito. A finalidade desta experiência é auxiliar os alunos a chegarem à mesma conclusão.

O arco que o pêndulo descreve, quando se move da posição onde foi abandonado até o ponto mais baixo de sua trajetória, é equivalente à rampa imaginada por Galileu (Fig. 20-4). O arco que o pêndulo descreve a partir do ponto mais baixo, após separar-se do obstáculo, corresponde ao plano de inclinação variável. Levantar a pinça equivale a diminuir a inclinação na qual a bola se eleva, na experiência de Galileu. É conveniente usar um pêndulo tão longo quanto possível, mas resultados relativamente bons podem ser obtidos com um pêndulo de, aproximadamente, um metro de comprimento.

Testando o pêndulo, inicialmente sem a barreira (Fig. 1), observa-se que as distâncias do ponto central aos dois lados e as alturas atingidas são aproximadamente iguais, dentro dessas condições. Isto não é surprêsa. O teste adquire maior significado, ao prever o que acontecerá quando o obstáculo fôr usado (Fig. 2).

Para melhorar a estimativa da altura alcançada pela bolinha do pêndulo, pode-se colocar um fio, horizontalmente, no nível em que se abandona a bolinha. Isto também auxiliará a duplicar a altura em que abandonamos o pêndulo.

O Disco de Gêlo Sêco é um dispositivo muito útil, para demonstrar o movimento uniforme na ausência de fôrças. A construção do disco é mostrada na Fig. (a). Como a camada de gás entre o disco e a mesa é muito fina, será necessária uma mesa com superfície lisa, de vidro ou metal. É essencial que a superfície da mesa, bem como a superfície do disco, estejam bem limpas e sêcas. Enxugue a mesa e o disco com um pano sêco, para remover a condensação acumulada durante a demonstração.

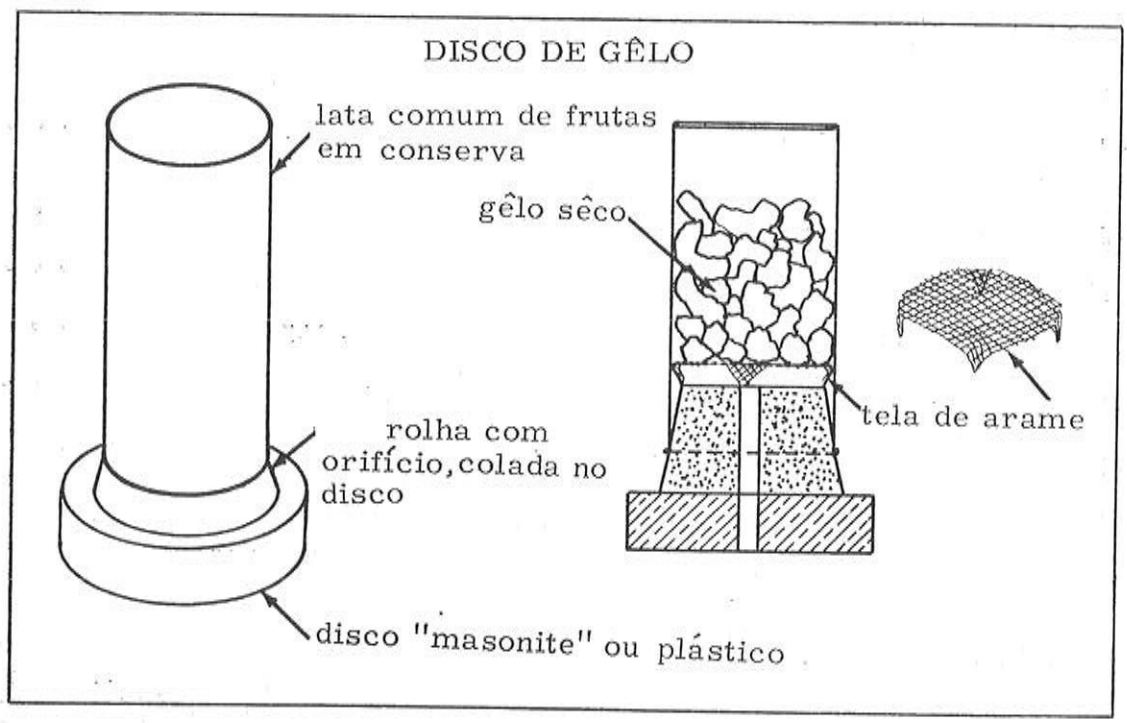


Figura (a)

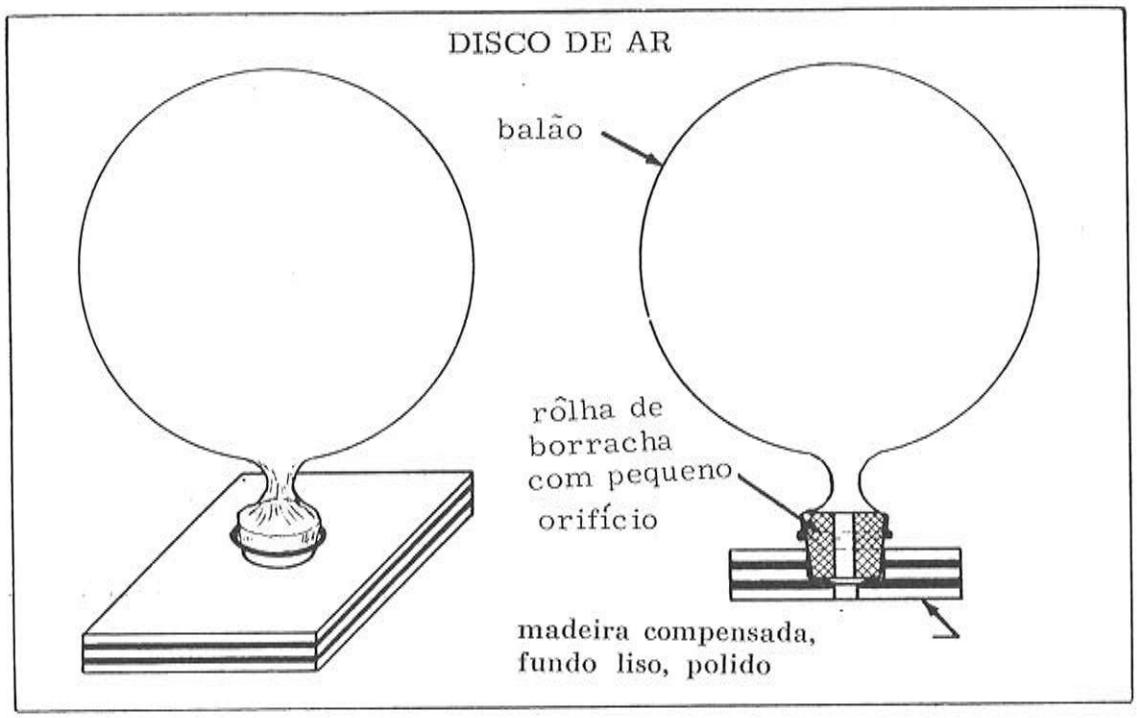


Figura (b)

Se a mesa estiver nivelada, o disco deslizará sôbre tôda a extensão da mesa, a baixas velocidades e sem diminuir a velocidade. Se a mesa não estiver nivelada, o disco entrará em movimento. Experiências com êstes discos tornam a lei de Galileu mais real.

Se não fôr possível conseguir um Disco de Gêlo Sêco, um dispositivo empregando ar, mostrado na Fig. (b), pode ser utilizado. Seu desempenho é inferior ao do Disco de Gêlo Sêco, todavia, êle pode ser útil.

MATERIAL

Cordonê e esfera com gancho.
Haste com presilha.
Pinça para bureta.
Régua de 1 metro.

Disco de Gêlo Sêco, ou disco com balão de ar.
Gêlo Sêco.

III - 2. VARIAÇÕES DE VELOCIDADES POR UMA FÔRÇA CONSTANTE

Esta experiência e a seguinte (III-3, Como a Aceleração Depende da Fôrça e da Massa) são de grande importância e não devem ser omitidas. Já que elas conduzem o aluno a descobrir a lei de Newton, devem ser feitas antes da Seção 20-3.

Como um resultado desta experiência, o aluno descobrirá que, dentro dos êrros experimentais, uma fôrça constante, atuando sôbre um objeto, varia sua velocidade numa razão constante — isto é, sua aceleração é constante. A unidade de fôrça, nesta experiência, é a produzida por um anel de borracha distendido com uma deformação constante, e a velocidade é expressa em metros por "tique". Mencione que as unidades usadas não são importantes, na descoberta ou na forma de expressar a lei fundamental.

Não utilize a fôrça da gravidade para puxar o carrinho, porque isto fará surgir muitas questões que não podem ser respondidas nesta altura do curso. O aluno não possui uma forma

real para verificar que a gravidade fornece uma fôrça constante a um objeto em movimento; e, na experiência seguinte, quando medir massas, encontrará dificuldade em perceber que a massa do pêso que cai deve ser incluída, como parte da massa total, que está sendo acelerada. Além disso, o anel de borracha fornece uma evidência de que a fôrça é realmente constante.

A experiência é melhor realizada sôbre uma mesa lisa e nivelada de, aproximadamente, 2 metros de comprimento. Se a mesa não estiver nivelada, isto aparecerá ao examinar na fita uma corrida do carrinho (sem fôrça atuante). Os tiques podem ser comparados, colocando as duas extremidades da fita uma ao lado da outra. Não é necessária, aqui, uma medida quantitativa acurada. É suficiente observar que, dando um impulso rápido no carrinho, êle se moverá com uma velocidade razoàvelmente constante sôbre uma superfície horizontal.

A fita do marcador de tempo deve deslizar fàcilmente através do marcador, fixado à mesa por uma presilha em U. A fôrça total de atrito de arrastamento sôbre o carrinho será cêrca de 0,3 newtons, que é uma fôrça pequena, comparada à fôrça aplicada pelo anel de borracha. As fitas devem ser marcadas, logo após serem obtidas, para uma futura identificação. Se a aula de laboratório não fôr suficiente, a análise das fitas poderá ser feita em casa.

É necessário praticar com os carrinhos, antes de fazer qualquer prova quantitativa. Não é fácil manter a deformação constante no anel de borracha, no início e quando o carrinho está animado de altas velocidades, no fim do percurso. Ao iniciar uma corrida, é importante sincronizar os momentos de puxar e soltar o carrinho.

Uma palavra final de advertência: os anéis de borracha são ideais para atirar "clips" e pequenos aviões de papel no laboratório!

Respostas às Perguntas

A velocidade do carrinho é mais uniforme a altas velocidades do que a baixas velocidades. A razão para isto pode ser explicada da seguinte forma: uma leve depressão no meio da mesa, de apenas 1 mm abaixo do nível e de vários centímetros de comprimento, não observável pela vista e mal detectável com um bom nível variará a velocidade de um carrinho partindo do repouso, de 14 cm/s! ($v = \sqrt{2gd} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10^{-3}} = 0{,}14$ m/s). Se o carrinho possui uma velocidade inicial, v_0,

$$v^2 - v_0^2 = 2gd$$

$$(v + v_0)(v - v_0) = 2gd$$

$$\Delta v = v - v_0 = \frac{2gd}{v + v_0}$$

Se $v_0 >> 2gd$, então $v \approx v_0$

$$\Delta v = \frac{gd}{v_0},$$

e a fração de variação de velocidade será:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{gd}{v_0^2}$$

que diminui ràpidamente, quando v_0 aumenta. Não permita, entretanto, que os alunos analisem a extremidade final da fita que representa as altas velocidades, onde êles provàvelmente foram incapazes de manter constante a fôrça aplicada.

Dentro dos êrros experimentais, o gráfico obtido mostrará que uma fôrça constante produz uma aceleração constante [Fig. (a)]. Os desvios da reta são causados, principalmente, pela dificuldade em manter os anéis de borracha com uma deformação constante.

A fôrça exercida pelo experimentador não é a única fôrça atuante sôbre o carrinho. O marcador de tempo, o atrito nas rodas do carrinho e a mesa exercem fôrças opostas ao movimento. Estas fôrças produzem variações de velocidade desprezíveis, comparadas com as produzidas pela fôrça aplicada. Isto foi concluído, a partir dos impulsos dados no início da experiência, com os quais o carrinho mantinha velocidade constante.

A aceleração da massa maior é menor do que a da massa menor, com a mesma fôrça atuando sôbre o carrinho. Medidas quantitativas do efeito da massa sôbre a aceleração serão feitas na próxima experiência.

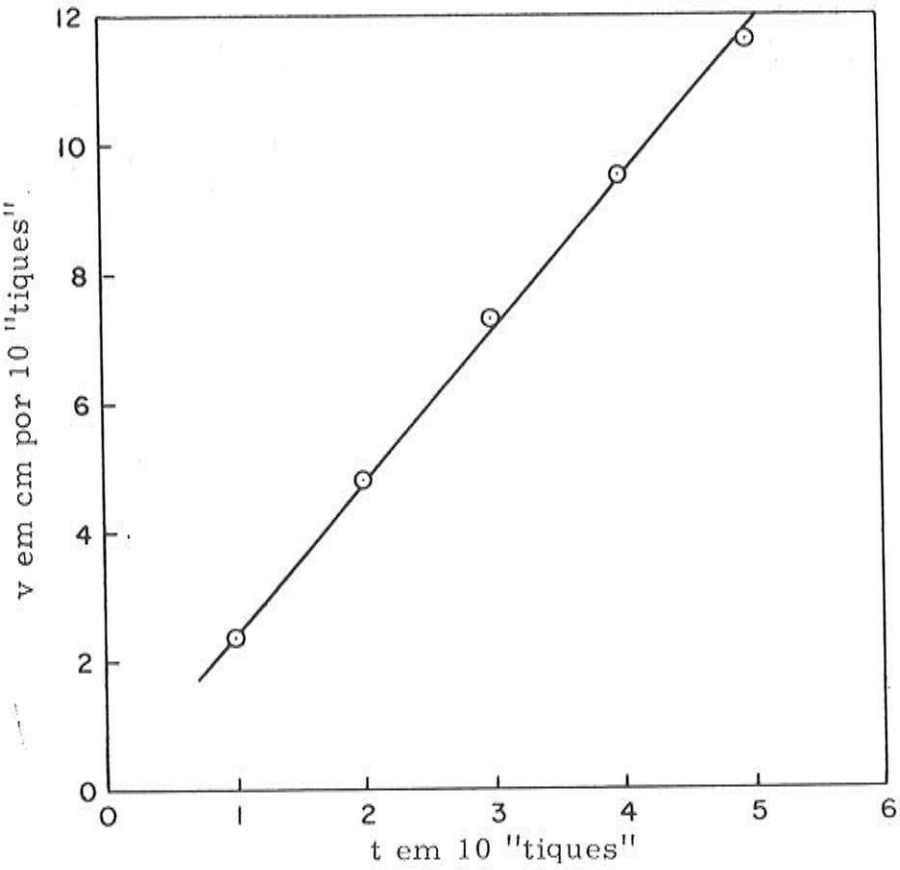


Figura (a)

MATERIAL

1 Carrinho de dinâmica.
1 Anel de borracha (do PSSC).
4 Tijolos.
1 Marcador de tempo (kit).
2-3 Grampos de carpinteiro.
1 Fôlha de papel de gráfico.
1 Régua.
1 Aparador para carrinho.

Fita adesiva.

III - 3. COMO A ACELERAÇÃO DEPENDE DA FÔRÇA E DA MASSA

A finalidade desta experiência é descobrir a relação entre fôrça, aceleração e massa (lei de Newton). Será melhor aproveitada, se fôr dada antes de estudar a Seção 20-3.

A técnica de execução é idêntica à experiência anterior, devendo-se tomar as mesmas precauções. Cuidado extra é necessário na primeira parte da experiência, quando fôrças mais intensas devem ser aplicadas. (A régua *não* deve ser usada para a prática de arco e flecha, uma vez que ela fàcilmente percorre o comprimento da classe e curva-se erràticamente em seu vôo! Faça com que os alunos retardem

suavemente o carrinho no fim do percurso, a fim de não danificá-lo, e os tijolos não caírem em seus pés). Se fôr necessário improvisar anéis de borracha para substituir os anéis padrões, cinco elásticos n.º 19, ligados em forma de corrente, serão aproximadamente equivalentes ao anel de elástico, fornecido com o material.

Ao analisar o movimento, o aluno pode considerar, após ter feito a Experiência III-2, que a aceleração é constante durante a corrida; êle precisa medir sòmente a distância percorrida em um dado número de tiques, para determinar a aceleração de $a = \frac{2d}{t^2}$.

Muitas vêzes, é impossível distinguir os tiques sôbre a fita, no início da corrida [Fig. (a)].

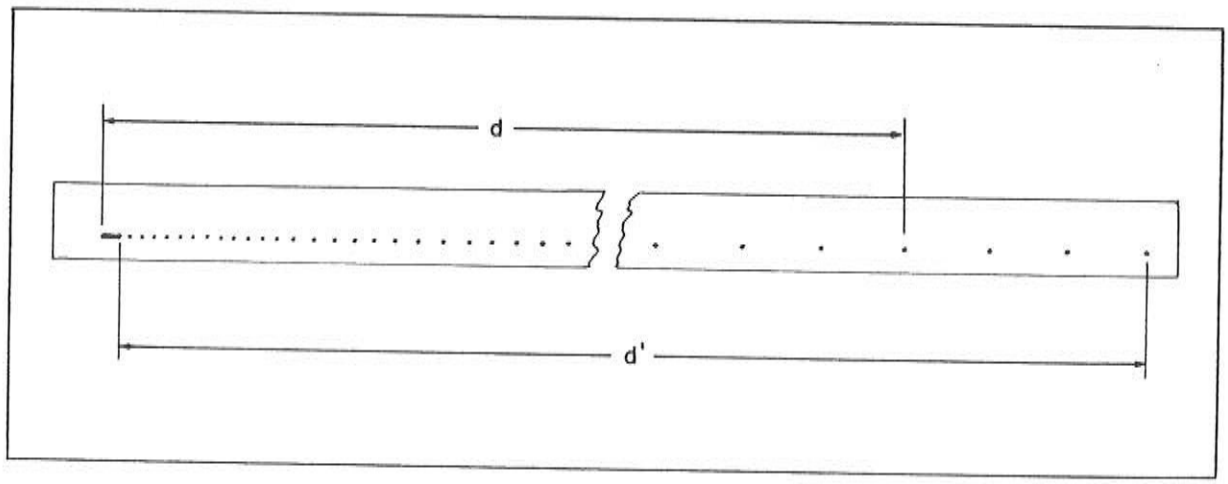


Figura (a)

É possível estimar o número de tiques na região borrada. Partindo do primeiro ponto distinto, obtém-se uma distância aparente, d', e uma aparente aceleração, $a' = \frac{2d'}{t^2}$, ao invés de $a = \frac{2d}{t^2}$. Isto resulta numa fração de êrro $\frac{a' - a}{a} = \frac{d' - d}{d}$. Se êste êrro superar 5 por cento, a aceleração poderá ser achada, determinando-se primeiramente as velocidades v_1 e v_2 nos instante t_1 e t_2, e, em seguida, $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. Para se ter uma idéia do êrro, neste segundo método, será melhor repetir a determinação de *a*, utilizando diferentes valôres para t_1 e t_2.

Se os alunos trabalharem em grupos, cada um poderá analisar uma fita diferente e os resultados poderão ser reunidos para a construção do gráfico.

Esta experiência é longa e, provàvelmente, tôdas as análises terão de ser feitas como trabalho para casa, a menos que a experiência seja dividida em duas partes, e feita em duas aulas consecutivas de laboratório.

Respostas às Perguntas

O gráfico da aceleração em função da fôrça aproxima-se bastante de uma reta e mostra que a fôrça e a aceleração são proporcionais [Fig. (b)]. A partir do gráfico, podemos dizer, nesta parte da experiência, que a razão da fôrça pela aceleração é constante. Sem atrito, a curva passará pela origem. Com atrito, o gráfico mostrará um valor positivo da fôrça, quando a aceleração é zero, porque a fôrça aplicada é igual e oposta

à fôrça de atrito e a fôrça resultante é zero. Nesta experiência, o atrito é tão pequeno comparado com a tração aplicada nos anéis de borracha, que, se falharmos em manter a fôrça aplicada constante, tornar-se-á difícil constatar a fôrça de atrito. Como uma conseqüência, a curva pode interceptar o eixo da fôrça, um pouco acima ou abaixo da origem, sem que isto represente a medida da fôrça de atrito [Fig. (b)].

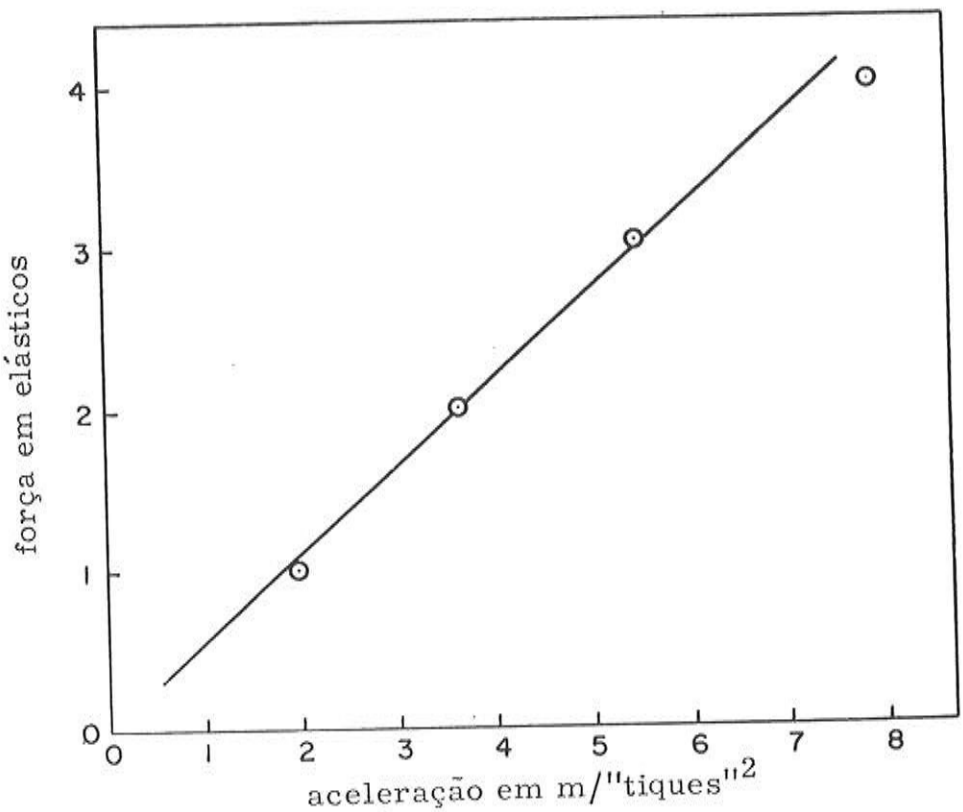


Figura (b)

O gráfico da razão da fôrça pela aceleração, em função do número de tijolos, é, aproximadamente, uma reta. Se sòmente três pontos fôrem marcados sôbre o gráfico, o resultado não será convincente. [Fig. (c)].

A intersecção da reta com o eixo do "número de tijolos" dá a massa do carrinho em unidades de tijolos. Isto é aproximadamente verdadeiro, visto que as rodas do carrinho realizam um movimento de rotação, e suas inércias de rotação podem aparecer no gráfico como equivalentes a uma massa de, aproximadamente, 0,2 kg. Os dados experimentais não serão suficientemente precisos para demonstrar isto.

Observe que, até aqui, ainda não foi discutida a relação entre as massas inercial e gravitacional. Se você não pretende dar a Experiência III-4, pode utilizar esta experiência para introduzir a discussão das massas inercial e gravitacional, pedindo aos alunòs que comparem a razão entre as massas gravitacionais do carrinho e um tijolo com a razão de suas massas inerciais, encontradas pelo gráfico [Fig. (c)].

Para determinar a massa inercial de um bloco de chumbo ou de uma pedra de massa razoável, puxe o carrinho com a massa desconhecida, por meio de um anel de borracha. Da razão da fôrça pela aceleração, a massa pode ser determinada por interpolação (ou extrapolação) do gráfico de "f/a em função de m".

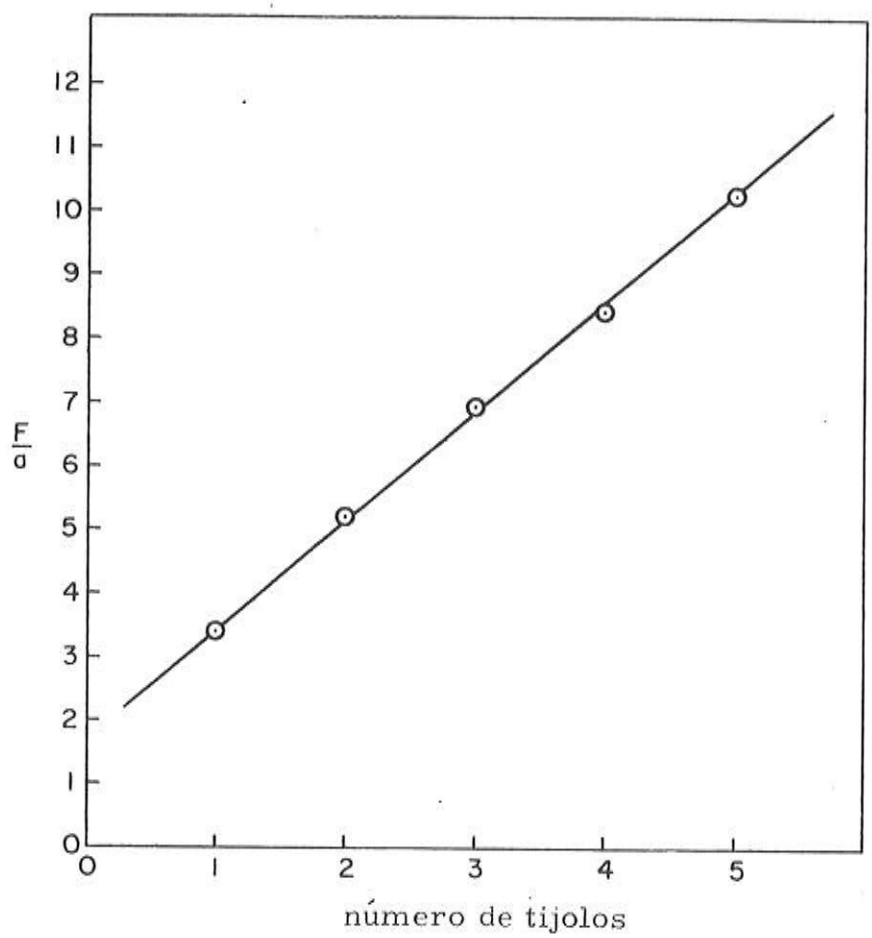


Figura (c)

As duas experiências conduzem à conclusão de que a equação, relacionando fôrça, massa e aceleração, é F = kma. O valor de k depende das unidades escolhidas. A resposta F = ma será correta, sòmente se o aluno usar as unidades corretamente relacionadas, como quilogramas para massa, metros/(n tiques)^2 para a aceleração e, conseqüentemente, quilograma-metros/(n tiques)^2 para a fôrça. (Usamos n para representar o número de tiques, para um dado intervalo de tempo, a fim de fazer a análise e os gráficos).

O marcador de tempo pode ser calibrado em segundos por tique, e a aceleração expressa em m/s^2. Se houver 0,02 segundos por tique do marcador de tempo e 80 tiques fôrem tomados como o intervalo de tempo, então, uma aceleração de 0,4 metros por (80 tiques)^2 é igual a:

$$a = \frac{0{,}4\,\text{m}}{(80 \times 0{,}02\,\text{s})^2} = 0{,}16\ \text{m/s}^2.$$

A fôrça aceleradora em newtons seria essa aceleração, vêzes a massa acelerada em quilogramas.

MATERIAL

1 Carrinho de dinâmica.

1 Marcador de tempo (kit).

1 Régua.

4 Anéis de borracha (do PSSC).

4 Tijolos.

Papel milimetrado.

Grampos de carpinteiro.

III-4. MASSAS INERCIAL E GRAVITACIONAL

Esta experiência dá um resultado bastante preciso e auxilia a esclarecer a relação entre as massas inercial e gravitacional. É aconselhável realizá-la após a discussão das Seções 20-5 e 20-6.

A experiência mostra que as massas inercial e gravitacional são, conceitualmente, duas coisas diferentes. Isto é constatado a partir das formas em que elas são medidas. Contudo, dados dois objetos, a razão de suas massas inerciais é igual à razão de suas massas gravitacionais.

O material utilizado nesta experiência fornece um resultado com uma precisão de cêrca de 1 por cento. Um pequeno êrro como êste justifica considerações cuidadosas das fontes de êrros e seus valôres, expressos em frações ou em porcentagem.

Grampos de carpinteiro de 5 cm são unidades convenientes de massas e podem, fàcilmente, ser atarraxadas à plataforma da balança. Isto fornece um resultado aceitável, desde que os grampos sejam razoàvelmente uniformes. Se você dispuser de tempo, poderá escolher os grampos de mesmo pêso, com uma precisão de 1 por cento. Se fizer isto, tome grampos mais leve como padrão e lime os outros até igualarem-se.

Outros objetos de tamanho, forma e composição semelhantes podem ser usados como massas padrões. Um pedaço de papel de lixa, prêso à plataforma da balança inercial, não permite que essas massas deslizem, quando a balança está oscilando. Se elas deslizarem, a balança parará, antes que uma contagem adequada possa ser feita.

Uma das coisas, que o aluno deve aprender dessa experiência, é que a unidade padrão da massa inercial pode ser completamente independente da unidade de massa gravitacional. Portanto, é aconselhável não fazer a unidade de massa inercial exatamente igual a 100 gramas.

Qualquer objeto de material diferente do padrão pode ser usado como massa desconhecida. Porém, para permitir uma interpolação acurada, êle deve ter uma massa que não esteja muito perto das extremidades da escala para a qual a balança foi calibrada (100 a 600 gramas). A massa desconhecida pode ser prêsa à balança com um grampo, unitário.

Ao determinar o período da balança vazia, talvez não seja possível ao aluno contar oscilações suficientes para conseguir o período, com um êrro de apenas 2 por cento. Êste valor menos acurado é ainda merecedor de um ponto sôbre o gráfico, mas não se deve dar muita importância a êsse valor, ao traçar a curva.

Quando a carga sôbre a balança é demasiadamente grande (superior a 750 gramas) há um visível movimento para cima e para baixo, além do movimento horizontal. Isto faz com que o gráfico da relação entre T e m divirja de $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, que é a relação obtida do movimento harmônico simples. (Não discuta esta relação em aula, nesta altura; isto será visto mais tarde, no Capítulo 21). Um gráfico mais complicado [Fig. (a)] do que o mostrado abaixo é, ainda, uma boa curva de calibração.

Contràriamente a um pêndulo simples, a freqüência é independente da amplitude, para uma larga faixa de amplitudes.

Respostas às Perguntas

O exame qualitativo da aceleração, para uma dada amplitude e massas diferentes, mostra que a aceleração não é constante, mesmo para uma dada massa; ela é maior em cada ponto da oscilação, para massas menores. Êste é o efeito *inercial* da massa, o mesmo efeito que ocorre na lei de Newton, que faz variar o período da balança.

Se as oscilações da balança fôrem medidas durante 100 segundos, o êrro na cronometragem, supondo-se que o tempo possa ser determinado

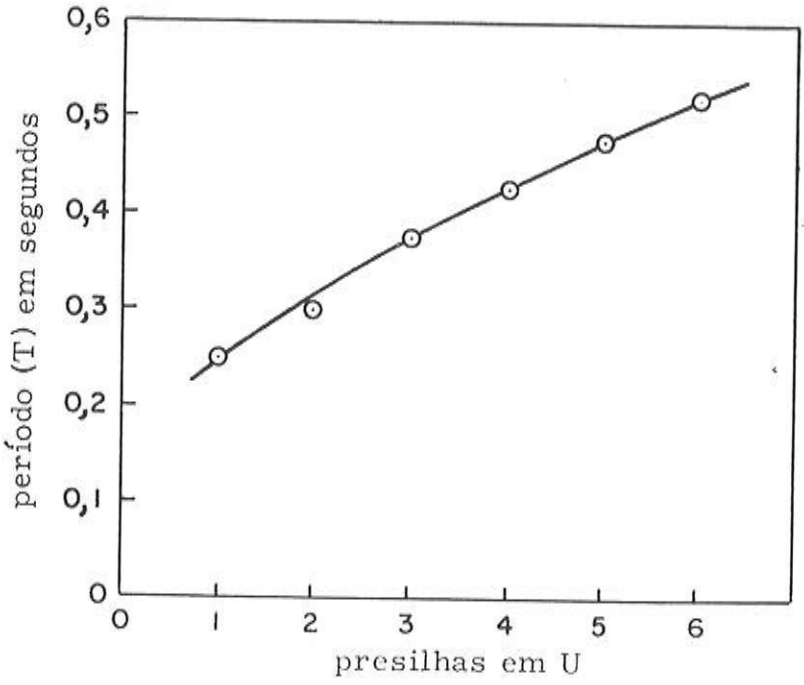


Figura (a)

com aproximação de 1 segundo, será de 1/100 = 1%. Se 100 vibrações completas fôrem cronometradas, o êrro na contagem também será de 1 por cento, porque o número de oscilações pode ser determinado a menos de um ciclo. Portanto, se em 100 segundos a balança completar mais de 100 oscilações, a razão do $\frac{\text{n.º de osc.}}{100\text{s}}$ terá uma precisão de 2 por cento. Se, por outro lado, a balança completar 100 oscilações em menos de 100 segundos, será necessário contar até 100 segundos para conseguir uma razão de precisão dentro de 2 por cento.

A massa gravitacional do objeto "desconhecido" é encontrada de sua massa inercial, m_i:

$$\frac{(m_g)\ \text{desconhecido}}{(m_i)\ \text{desconhecido}} = \frac{(m_g)\ \text{padrão}}{(m_i)\ \text{padrão}}$$

Em nossa experiência, fizemos (m_i) padrão = 1.

As massas inercial e gravitacional são proporcionais, dentro dos êrros experimentais. Elas não serão iguais, se fôrem medidas em unidades (grampos e gramas) diferentes. Evidentemente, as massas inercial e gravitacional serão iguais na maioria dos trabalhos de Física, visto que a mesma peça padrão de matéria, o quilograma-padrão, é usado para ambas as escalas.

Na Lua, obteríamos os mesmos resultados. Nem a massa gravitacional, nem a inercial variam, quando as transferimos da Terra para a Lua.

Se a balança fôr usada como mostra a Fig. 8, terá um período menor para uma dada massa, visto que, neste caso, a fôrça de gravidade atua como uma fôrça restauradora em adição à fôrça elástica das lâminas, quando a balança é puxada para os lados. Esta parte da experiência é facultativa.

Êste dispositivo pode ser utilizado como um acelerômetro, fixando-se um canudinho ou outro indicador sôbre a plataforma móvel e marcando uma escala de fôrça sôbre a base [Fig. (b)]. A balança pode, então, ser prêsa a uma mesa e puxada por uma balança de mola calibrada, para dar uma escala de fôrça em newtons. Com uma massa conhecida (massa do objeto, mais

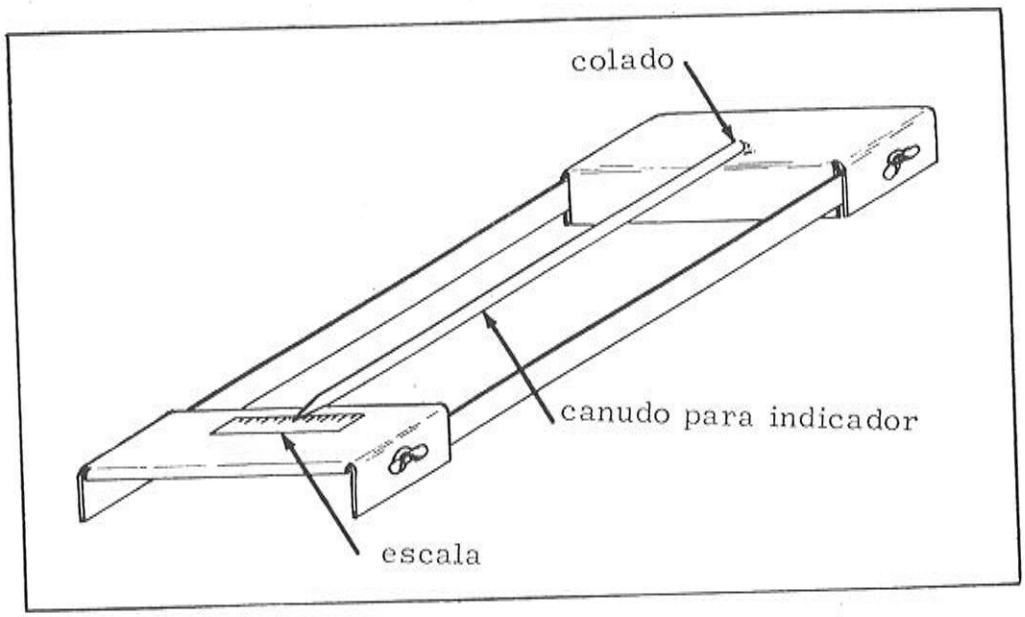


Figura (b)

massa da plataforma) em lugar da balança de mola, o dispositivo pode ser calibrado em unidades de aceleração, a partir da lei de Newton ($a = F/M$). A resposta a esta questão, bem como a real calibração e o uso do dispositivo como um acelerômetro, devem ser considerados sòmente como um projeto para alunos particularmente interessados. Isto não significa que deve ser respondida completamente.

O acelerômetro pode ser mantido ou montado em um automóvel, numa posição horizontal e com as lâminas vibrantes em ângulo reto com a direção do movimento. Com a aceleração do carro, o acelerômetro mostrará uma deflexão, mas poderá resultar também uma oscilação para trás e para a frente, se a aceleração fôr rápida. Para prevenir isto, a balança pode ser amortecida, atarraxando-se a ela vários grampos de carpinteiro. (A atenção do motorista deve estar voltada para a estrada e não para o acelerômetro!)

MATERIAL

1 Balança de inércia (kit).
6 Grampos de carpinteiro de 5 cm.
1 Grampo de carpinteiro, de 10 cm.
1 Suporte de base retangular, com presilha e haste de 30 cm.
1 Fôlha de papel milimetrado.
1 Cronômetro.

---

1 Balança.
Várias massas desconhecidas (massas de 2 a 4 unidades).

III - 5. FÔRÇAS EXERCIDAS SÔBRE UMA BOLA NO ESPAÇO

Os alunos são tão comumente instruídos a "desprezar o atrito" ou "desprezar a resistência do ar", que podem pensar que sòmente movimentos ideais simples podem ser analisados. Nesta experiência, o aluno verificará como uma aplicação do que êle já aprendeu sôbre o movimento simples de projéteis conduz a uma compreensão de movimentos mais complexos. Isto é o que se tem de mais importante para aprender, nesta experiência. O aluno também descobrirá por si mesmo, analisando a Fig. 9, que a resistência do ar atua em direção oposta ao movimento, e que a resistência aumenta com o aumento de velocidade.

Esta experiência, embora importante, não envolve equipamento experimental e pode ser dada como um trabalho de casa, após ter sido estudado no texto o movimento de projéteis.

O papel milimetrado fornece uma escala conveniente, embora qualquer papel transparente sirva para a experiência. A Fig. (a) é um exemplo da análise da Fig. 9. Os alunos podem encontrar dificuldades em reduzir a variação de velocidade resultante de $\triangle v_g$, a um vetor que possam subtrair dos de seus diagramas.

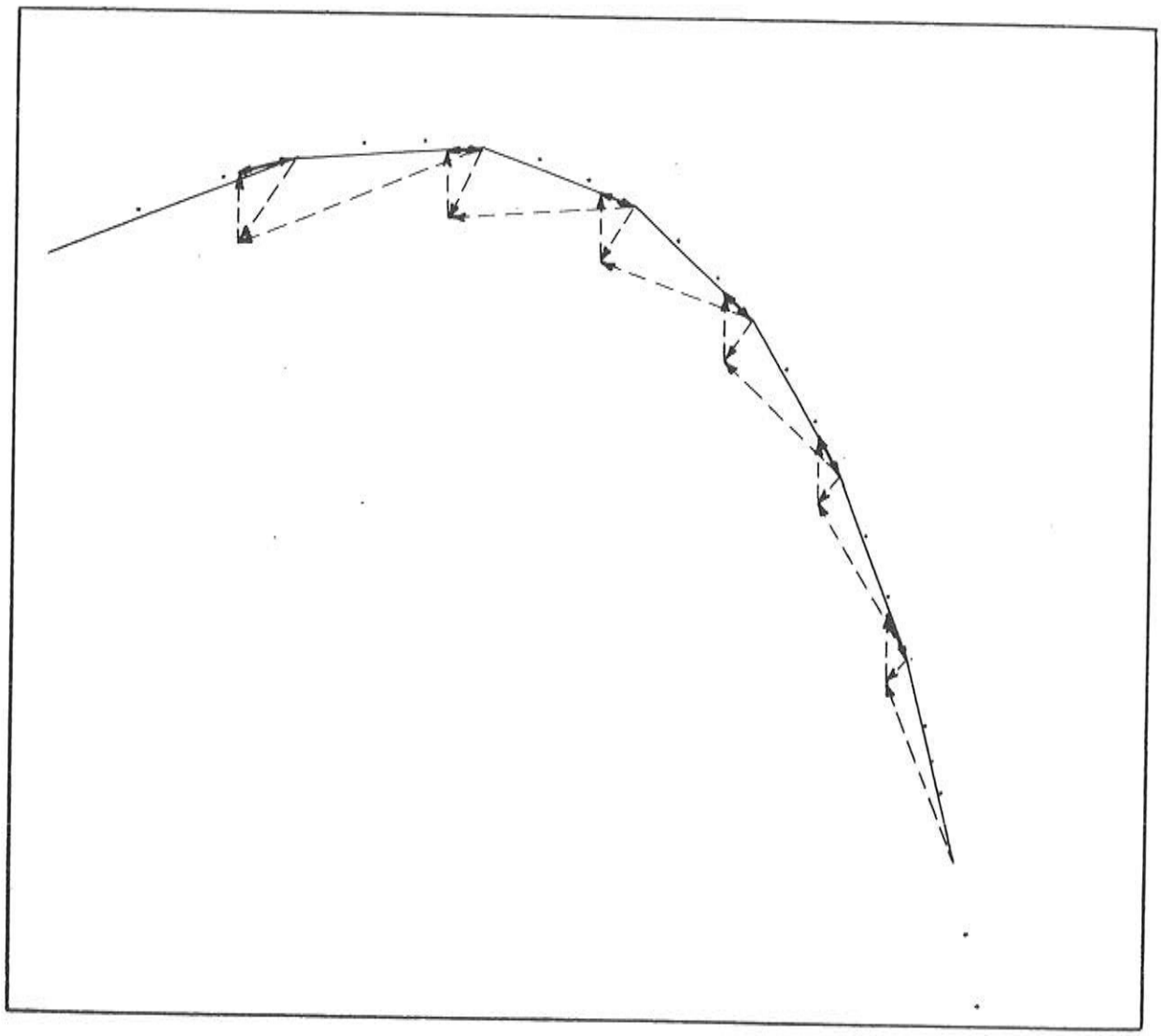


Figura (a)

O caminho a seguir é $\triangle v_g = g\triangle t = 9{,}8\ (0{,}1) = 0{,}98$ m/s. Isto pode, então, ser convertido em metros por *décimo* de segundo. Teremos, então: 0,98 (0,1) = 0,098 m/0,1 s. Isto é equivalente a converter a aceleração da gravidade, de metros por segundo ao quadrado para metros por (décimo de segundo)^2, 9,8 m/s^2 = 9,8/100 = 0,098m/(0,1s)^2. Êste valor

é, então, reduzido à escala da Fig. 9. Como a fotografia é 1/10 do tamanho real, o comprimento do vetor variação de velocidade devido à gravidade, $\triangle v_g$, que deve ser subtraído, será: 0,098/10 = 0,0098 m. Evidentemente, êste vetor variação está na direção vertical e é subtraído do vetor variação de velocidade, $\triangle v$, pela adição de seu oposto, como mostra a Fig. 10 b.

Se um aluno estiver interessado em analisar as Figs. 11 e 12, deverá determinar a redução de escala, medindo a régua das fotografias.

Respostas às Perguntas

Um exame qualitativo da figura mostra que a velocidade horizontal diminui da esquerda para a direita. Uma conclusão que tiramos disto é que, em adição à fôrça de gravidade, há uma fôrça que tem uma componente horizontal.

A variação total de velocidade, determinada pela subtração dos vetores velocidade no diagrama, ocorre de intervalo a intervalo, tanto em direção como em módulo. O módulo

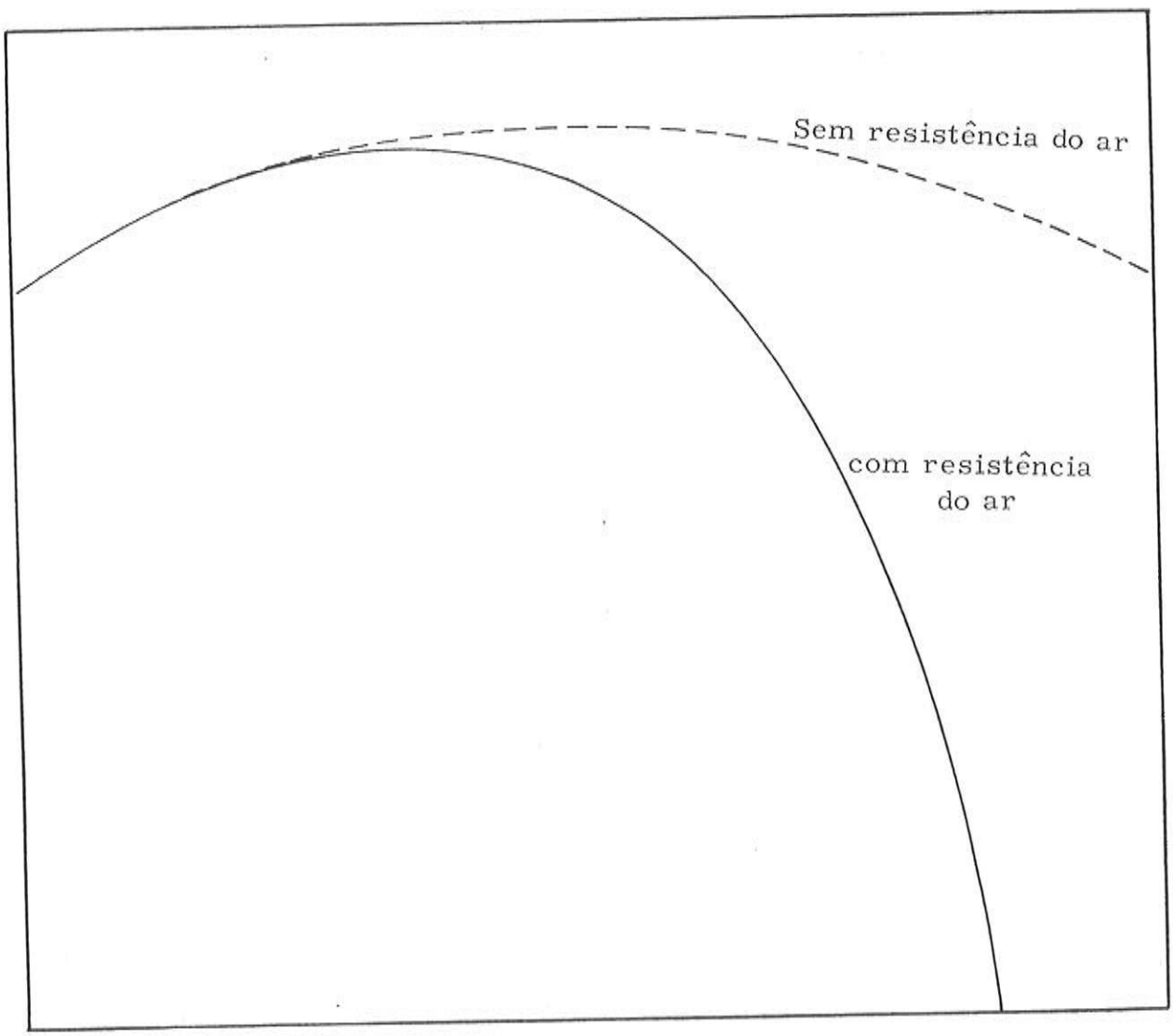


Figura (b)

de $\triangle v$ decresce durante o movimento, e a sua direção torna-se lentamente mais horizontal. Uma vez que as variações de velocidade estão nas direções das fôrças que as produzem, há, pelo menos, uma componente horizontal da fôrça resultante atuando sôbre a esfera. Sem análises adicionais, é impossível dizer como a fôrça desconhecida varia.

A variação de velocidade da bola em 0,1 segundo, causada pela gravidade, é 0,98 m/s, e está dirigida verticalmente para baixo. Em metros por décimo de segundo, é 0,098 m/0,1 s.

Quando o efeito da gravidade é subtraído, as variações de velocidade, devido apenas à fôrça remanescente, possuem uma componente vertical e uma componente horizontal e são opostas à direção do movimento. À medida que aumenta a velocidade, aumenta também a fôrça retardadora. A fôrça retardadora é provocada pela resistência do ar. Tal fôrça é proporcional ao quadrado da velocidade, dentro das condições da nossa experiência. A variação total de velocidade não é, entretanto, suficientemente grande para demonstrar essa proporcionalidade, a partir de um gráfico da fôrça em função de v^2, particularmente, com a limitada precisão com que se pode medir a fôrça nessa experiência.

A bola deve ter uma razão bem grande entre a área e a massa (uma densidade bem baixa), para mostrar êsses grandes efeitos da resistência do ar a velocidades relativamente baixas. Se a bola tivesse o mesmo tamanho, porém, pêso muito maior, teria seguido uma trajetória como a parábola ilustrada no texto. A bola, usada nas três fotografias, é uma esfera de 0,05 g com um diâmetro de 1,5 cm, de isopor.

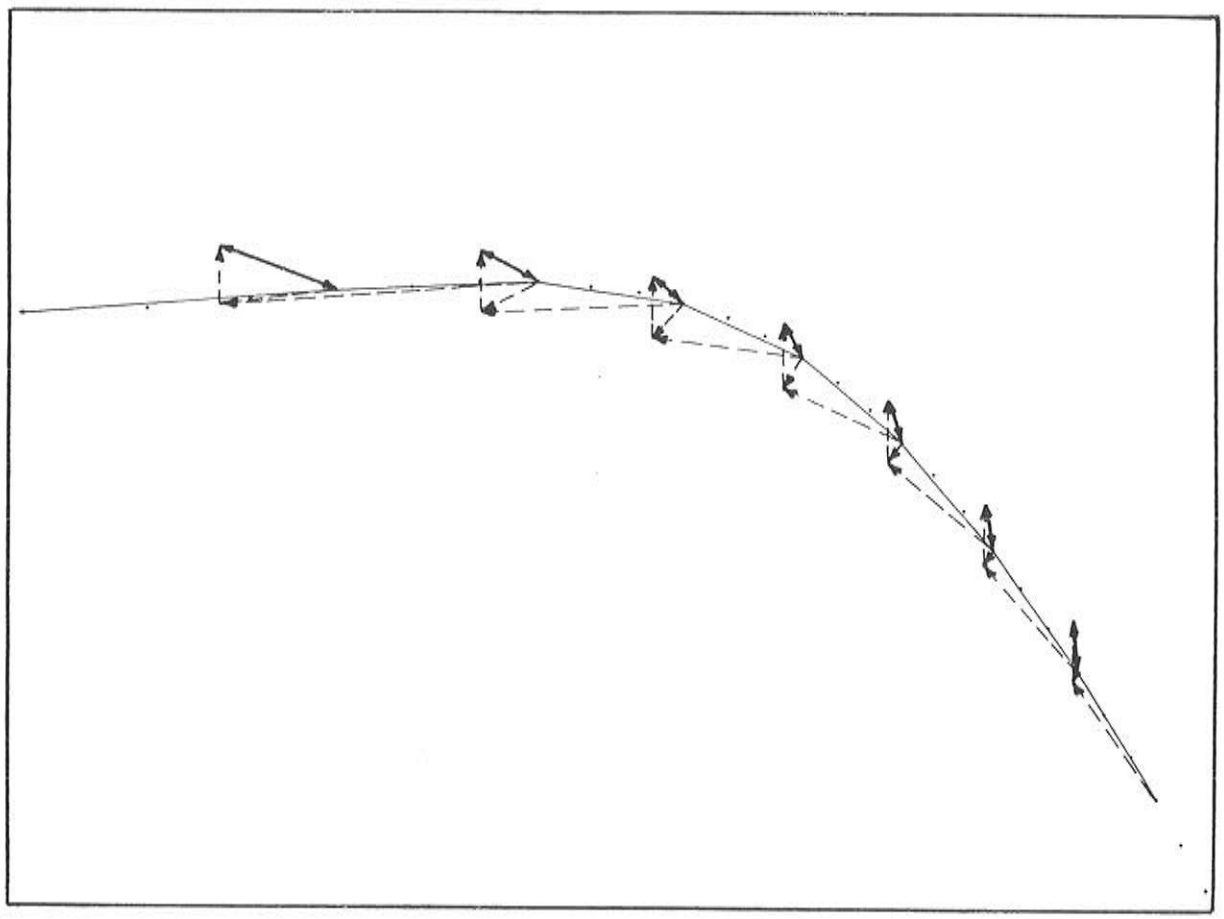


Figura (c)

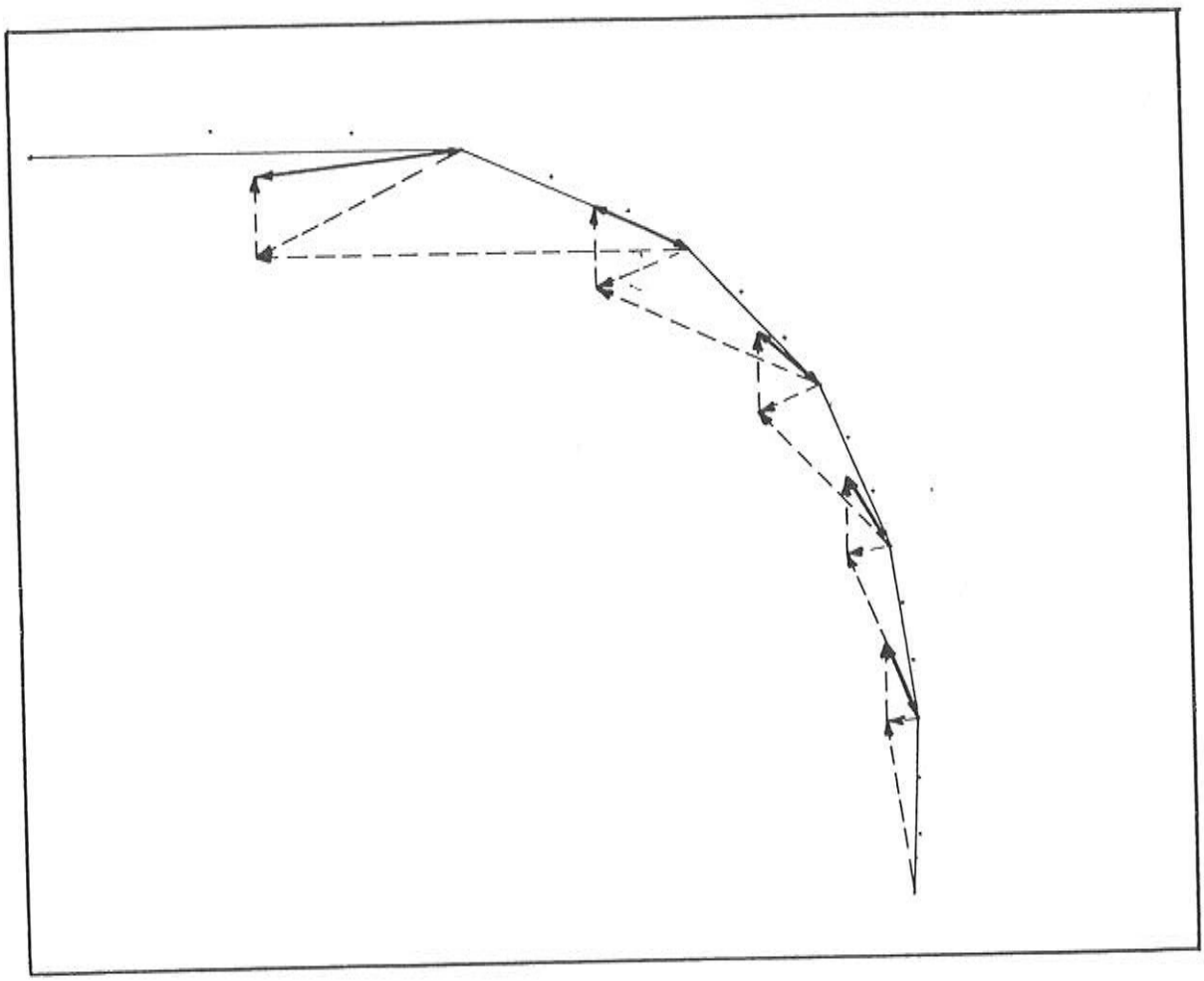


Figura (d)

Se a gravidade fôsse a única fôrça atuante sôbre a esfera, sua trajetória seria como a mostrada na Fig. (b), onde a velocidade média no primeiro intervalo foi tomada como velocidade inicial.

A bola, na Fig. 9, foi atirada com a mão e com pouca ou nenhuma rotação. As fotografias 11 e 12 foram tiradas com a mesma velocidade de flashes da Fig. 9, mas a bola foi atirada com uma rotação. Na Fig. 11, a bola foi atirada com uma rotação anti-horária, com o eixo de rotação perpendicular à página. Na Fig. 12, a rotação foi horária. As análises das Figs. 11 e 12 são apresentadas nas Figs. (c) e (d).

As análises das fotografias das bolas com rotações e o traçado de suas trajetórias, sem a resistência do ar, devem ser considerados como um trabalho suplementar da parte principal da experiência, e devem ser dados sòmente aos alunos particularmente interessados. Na Fig. (c), a fôrça que permanece, após a subtração do efeito da gravidade, não é mais oposta à direção do movimento, mas tem uma componente em ângulo reto com a trajetória. Esta componente torna-se cada vez menor, à medida que a velocidade de rotação decresce durante o movimento. A Fig. (d) exibe uma componente também perpendicular à trajetória, mas no sentido oposto.

Um tratamento matemático completo dêste tipo de movimento (ou mesmo do movimento

com resistência do ar e sem rotação) é uma tarefa formidável e não deve mesmo ser tentada.

Nas três fotografias, a velocidade da bola, quase no fim de sua trajetória, é aproximadamente constante. A bola está próxima à sua velocidade limite. Quando alcança tal velocidade limite, a fôrça da gravidade sôbre ela iguala-se à resistência do ar, a fôrça resultante torna-se zero, e dêsse instante em diante, move-se com velocidade constante.

Os alunos talvez queiram atirar bolas de pingue-pongue em rotação. Com um tubo de papelão, pode-se improvisar um bom atirador. Ponha a bola no tubo. Segurando o tubo, lance a bola, fazendo um movimento com o braço esticado, de modo a descrever um arco de cima para baixo ou vice-versa, dependendo do sentido desejado de rotação da bola. Êste método foi utilizado para obter as fotografias das Figs. 11 e 12.

MATERIAL

Papel milimetrado transparente ou qualquer papel transparente.
Régua.

Sugestões sôbre Fotografias com Estroboscópio

A câmera na Fig. 6, Experiência I-1, registra sôbre o filme a posição do objeto, no instante em que a abertura do estroboscópio passa em frente à lente. Esta técnica torna possível analisar movimentos a duas dimensões, que não podem ser medidos com um marcador de tempo, de fita.

Na maioria dos casos, uma exposição com velocidades de 5 a 30 por segundo será suficiente. Um motor de baixa rotação, sincronizado a 300 rpm, será mais versátil, desde que uma maior velocidade de exposição poderá ser obtida, utilizando um disco com várias fendas igualmente espaçadas. O melhor é utilizar um motor sincronizado para movimentar o disco, visto que sua velocidade de rotação, e, portanto, a velocidade de exposição é conhecida. Entretanto, em muitos casos, a unidade de tempo é arbitrária e, então, um motor de baixo custo será adequado.

A velocidade de um motor não sincronizado pode ser medida e testada por meio de fotografia com velocidade constante, o que é conseguido com um disco de fonógrafo de 78 rpm ou 33 1/3 rpm, marcando-o com um risco branco. Se o motor sincronizado estiver sobrecarregado, êle não girará em sua velocidade normal. Verifique se o disco não é muito grande, de forma que a resistência do ar sôbre sua superfície venha a provocar uma queda na sua velocidade. Quando um motor sincronizado estiver sobrecarregado, uma lâmpada de néon ou fluorescente, operando numa corrente alternada de 60 ciclos, cintilará, quando observada através do disco com fendas em rotação.

O disco em rotação deve ser colocado tão perto quanto possível da lente da câmera, porém sem tocar na lente. Tanto a câmera como o estroboscópio devem ser mantidos bem fixos.

A exposição individual de um objeto em movimento pode ser mudada, ajustando as fendas do disco e a abertura da lente. Mantendo a abertura no máximo, a lente deve ser, então, guarnecida com fitas de modo que sua abertura tenha a mesma forma da fenda do disco, porém com uma largura menor. Imagens mais nítidas são obtidas, diminuindo a largura das fendas do disco.

O tempo total de exposição pode ser melhor controlado, empregando-se uma lâmpada fixa, em lugar do disparador da câmera. Se um disparador automático ao invés de um manual fôr usado para acionar o obturador, provàvelmente, evitará que a câmera vibre.

Aconselha-se um filme com uma velocidade de emulsão A.S.A. de 160 ou mais. Em certos casos, melhor imagem pode ser obtida deixando-se o filme mais tempo que o normal no banho revelador e imprimindo-a sôbre um papel de alto contraste.

O plano do filme na câmera deve estar paralelo ao plano do movimento, para evitar ampliações desiguais das diferentes regiões de observação. Se uma régua fôr usada para dar uma medida absoluta, deverá ser colocada no mesmo plano do movimento; assim, haverá um êrro mínimo devido à paralaxe.

Para melhores resultados, use como fundo um papel prêto ou um outro material pintado de prêto, de, aproximadamente, 2 metros quadrados. Se necessário, pinte a superfície com tinta que não produza brilho, nem reflexão. O objeto a ser fotografado deve ser montado para movimentar-se paralelamente ao fundo. A câmera deve estar 1 1/2 metros em frente do objeto.

O objeto em movimento pode carregar sua própria fonte de luz (uma lâmpada de lanterna

ligada à duas pilhas), ou ser iluminado por duas lâmpadas iguais à usada na cuba de ondas (150 watts, vidro transparente, com uma parte coberta). Para objetos movendo-se horizontalmente, monte duas lâmpadas em ambos os lados da câmera, separadas de 1 metro, aproximadamente, e orientadas para o objeto, formando um ângulo de cêrca de 40° com o plano do movimento do objeto. A fim de fotografar objetos movendo-se verticalmente, coloque uma lâmpada no solo, dirigida para cima e formando um ângulo de 80° com o plano do objeto, e uma outra lâmpada a, aproxidamente, dois metros diretamente acima da primeira, dirigida para baixo, formando um ângulo de 80° com o plano do objeto.

Se quiser apresentar na fotografia uma escala, coloque uma régua no plano do objeto.

Fotografias satisfatórias, utilizando uma lente

Fotografias satisfatórias, utilizando uma câmara polaróide, foram obtidas com a disposição descrita acima e com as especificações seguintes:

Abertura da lente f 4,7.
Ajuste do obturador em B
Disco do estroboscópio 2,3 ou 6 fendas abertas.
Filme polaróide, (3000 ASA).

MATERIAL

Qualquer máquina fotográfica com dispositivo para regular o tempo de exposição.
Motor (de preferência, sincronizado): 300 a 1 800 rpm.
Disco (15 cm a 25 cm) de papelão duro, metal fino, plástico ou outro material semelhante.
Diversas lâmpadas de alta "wattagem".

III - 6. FÔRÇA CENTRÍPETA

A finalidade desta experiência é determinar como a fôrça centrípeta depende da freqüência de revolução, da massa e do raio do círculo de um objeto em movimento circular. É conveniente realizar a experiência, antes de deduzir a relação da fôrça centrípeta, apresentada no texto (Seção 21-5).

Na primeira parte da experiência, os alunos concluirão que a fôrça centrípeta é proporcional ao quadrado da freqüência. Se dispuser de tempo e certos alunos desejarem ir além, poderão concluir pela evidência experimental que a fôrça centrípeta é proporcional à massa e ao raio do círculo descrito.

Como na maior parte das experiências dêste volume, deve-se realçar o fato de que a descoberta de leis fundamentais não requer o uso de unidades padrões como medidas. Nesta experiência, utilizamos unidades arbitrárias de fôrça e massa: a unidade para a medida da fôrça centrípeta é a fôrça da gravidade sôbre uma arruela; a unidade de massa é a massa de uma rôlha de borracha (# 4).

A experiência pode ser feita no laboratório ou em casa, mas é melhor que seja realizada por um grupo de dois ou três alunos — um dêles gira a rôlha em círculo, o outro conta o número de revoluções, e o terceiro cronometra as revoluções. Se o laboratório fôr muito pequeno, para girar várias rôlhas num círculo de um metro de raio, será aconselhável fazer a experiência fora, no pátio do colégio.

O tamanho do tubo de vidro não é importante, mas o ponto de apoio externo para o fio, na extremidade superior do tubo, deve ser cuidadosamente alisado a fogo, tornando, assim, suaves as rotações e reduzindo o atrito ao mínimo. As fôrças são tais que o tubo não se partirá, a menos que êle tenha algum defeito. Para prevenir acidentes, envolva o tubo com fita adesiva, evitando assim o perigo de cortar-se com os pedaços de vidro, se o tubo se quebrar.

A escolha do fio será importante, para que o atrito seja pequeno. Para se obter bons resultados, deve-se utilizar um fio de náilon, fortemente *trançado*, do tipo usado pelos pescadores.

O tamanho da rôlha, raio do círculo, tamanho e número mínimo de arruelas devem ser cuidadosamente escolhidos, a fim de se obter bons resultados. Grande variação dos valôres recomendados pode tornar o gráfico da fôrça em função da velocidade semelhante a uma reta.

A fim de manter a rôlha em movimento de freqüência constante, a extremidade superior do tubo deve mover-se descrevendo um pequeno círculo. Isto fornece uma pequena componente da fôrça, ao longo da trajetória, que neutraliza o atrito. Contudo, êste círculo deve ter um diâmetro menor do que um ou dois centímetros, ou o círculo descrito pela rôlha não poderá ser precisamente medido pelo comprimento do fio. O raio do círculo descrito pela

rôlha deve ser medido a partir do meio da rôlha, próximo ao centro de massa. Como as dimensões da rôlha são pequenas, comparadas com o raio do círculo, uma medida a partir dêsse ponto dará um valor para o raio, que está muito próximo do valor real.

O Guia de Laboratório especifica um número mínimo de arruelas, de forma a manter o fio suficientemente horizontal para permitir o uso dêsses comprimentos como uma medida razoàvelmente acurada do raio do círculo. Realmente, o uso de um certo comprimento do fio, como o raio "inclinado", conduz a resultados corretos, independentemente do tramanho do ângulo entre o fio e a horizontal. Isto pode ser verificado pela análise da Fig. (a). A fôrça da gravidade, $m_a g$, atuando sôbre as arruelas, é transmitida ao longo do fio e atua sôbre a rôlha, ao longo de L. A componente horizontal dessa fôrça fornece a fôrça centrípeta F_c, ao longo de R. Verificamos que $R = L \cos \Theta$, e $F_c = m_a g \cos \Theta$. Podemos escrever a equação para a fôrça centrípeta na forma:

$$F_c = 4\pi^2 m_r f^2 R = \frac{4\pi^2 m_r R}{T^2};$$

por substituição, obtemos:

$$m_a g \cos \Theta = \frac{4\pi^2 m_r L \cos \Theta}{T^2}, \quad m_a g = \frac{4\pi^2 m_r L}{T^2}.$$

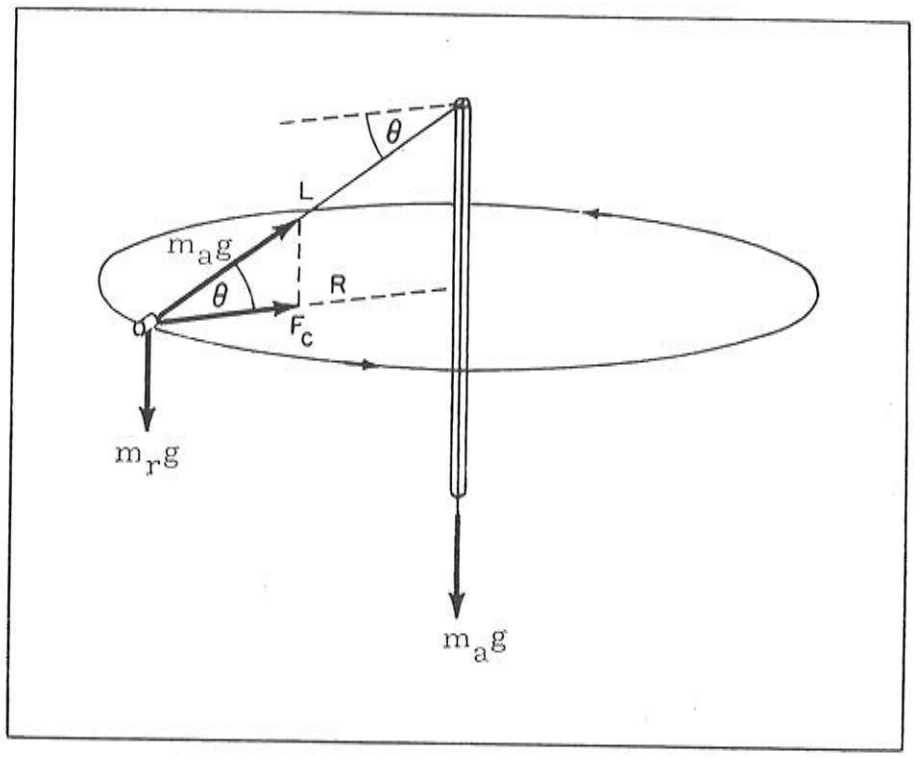


Figura (a)

Isto significa que a fôrça exercida pela rôlha é inversamente proporcional ao quadrado do período para um comprimento constante L do fio. Como os alunos supõem que R seja aproximadamente igual a L, medem o período de rotação e consideram o período como sendo inversamente proporcional à velocidade v. Não há êrro devido às variações de ângulo Θ, porque Θ é eliminado nos cálculos. Você pode observar, pela Fig. (a), que Θ é determinado ùnicamente pelo pêso das arruelas, visto que $\operatorname{sen} \Theta = \frac{m_r g}{m_a g}$. Se se utilizar com uma rôlha

(# 4) um número menor de arruelas, o valor de Θ tornar-se-á maior.

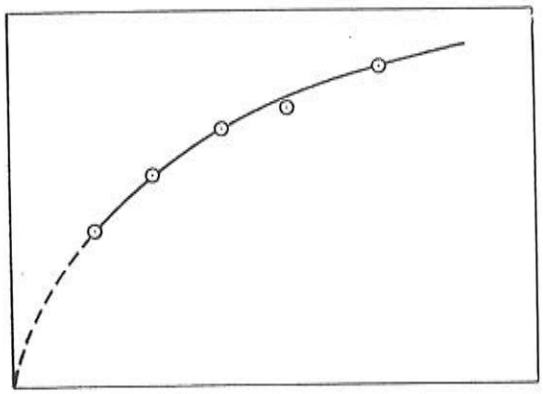


Figura (b)

Respostas às Perguntas

Quando aumentamos a velocidade de rotação da rôlha, torna-se necessário puxar o fio para baixo com maior fôrça. Se se largar o fio, a rôlha deixará de mover-se em círculo e puxará o fio para cima, através do tubo. Os alunos, exercendo êles mesmos a fôrça, ficam cientes de que, para um objeto mover-se em círculo, é preciso que atue uma fôrça em ângulo reto com a direção do movimento.

O gráfico da freqüência da rôlha em função do número de arruelas é semelhante ao da Fig. (b). Evidentemente, isto não esclarece que tipo de função representa êsse gráfico, embora se deva suspeitar de que seja uma parábola. Os alunos talvez pensem que, se os pontos no gráfico estão espalhados, a curva é uma reta que não passa pela origem, mas, se lhes perguntarem qual é a freqüência para uma fôrça zero, êles concluirão que a freqüência também deve ser zero, isto é, a rôlha está parada. Portanto, a curva deve passar pela origem, encurvando-se para baixo, a partir de sua suposta linha reta.

Uma curva de f^2 em função do número de arruelas dará uma reta passando pela origem, evidenciando que a fôrça centrípeta varia proporcionalmente a f^2.

Os alunos podem concluir, pela lei de Newton, $F = ma$, que, duplicando a massa que gira num dado círculo com uma certa aceleração centrípeta, torna-se necessário que a fôrça seja dobrada, para manter o movimento em círculo na mesma velocidade de rotação. Se êles dispuserem de tempo, podem tentar isso.

É difícil descobrir como a fôrça depende do raio; a dificuldade está em girar a rôlha com a mesma freqüência, cada vez que variamos o raio. A melhor maneira de obter a relação entre a fôrça e o raio é repetir a primeira parte da experiência várias vêzes, utilizando diferentes raios e sòmente um valor da fôrça centrípeta para cada raio. Em seguida, constrói-se a família de curvas de f^2 em função de F [Fig. (c)]. Como sabemos, pela primeira parte da experiência, que essas curvas são retas, um único valor da fôrça centrípeta para cada raio basta para traçar a reta pela origem.

Para um valor constante de f^2, representado pela linha AB, os diversos valôres da fôrça (F_1, F_2 F_3 e F_4) determinam sôbre as curvas os valôres correspondentes de R. Quando êsses valôres de F e R são representados em um gráfico, resulta uma curva semelhante à Fig. (d). [Note que as Figuras (c) e (d) não representam dados reais, obtidos com o dispositivo da experiência. São simplesmente esboços aproximados dos resultados que poderíamos obter]. Alunos que são técnicos em rádio talvez reconheçam êste método de analisar uma família de curvas, como sendo semelhante ao método de determinar o fator de amplificação de uma válvula eletrônica, a partir de um gráfico da corrente como função da voltagem nas placas.

Se não houver tempo suficiente para investigar experimentalmente o efeito da massa e do raio, sôbre a fôrça centrípeta, talvez seja interessante fazer esta parte da experiência como demonstração em classe.

A Fig. (e), pág. 260, mostra tôdas as fôrças que atuam sôbre o dispositivo da experiência. F é a fôrça resultante que o experimentador exerce sôbre o dispositivo (desprezando o pêso do tubo). Observe que a componente gravitacional dessa fôrça ($m_a g + m_r g$) é constante, ainda que a componente horizontal F_c seja constantemente variável em direção, no plano horizontal.

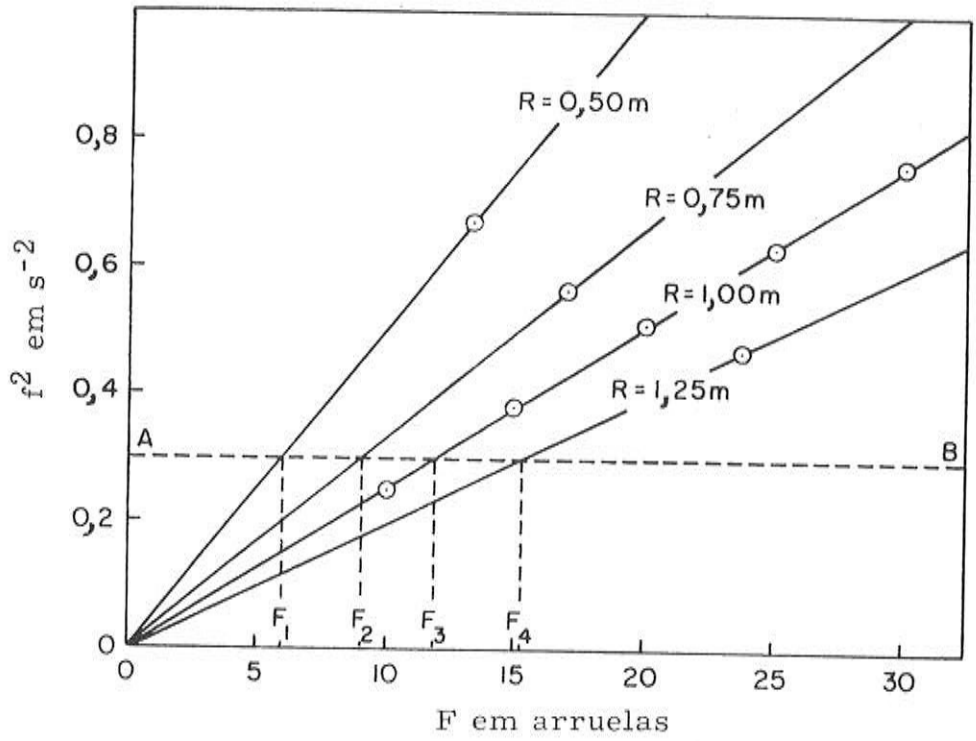


Figura (c)

MATERIAL

1 Tubo de vidro com bôca alisada a fogo e enrolado com fita adesiva.
Fio, 1,5 m (de nailon fortemente trançado, do tipo usado para pesca).
20 Arruelas.
1 "Jacaré" ou outro indicador.
1 Rôlha de borracha.
1 Clip para papel.
2 Fôlhas de papel milimetrado.
Régua.
Cronômetro ou relógio com ponteiro de segundos.

III - 7. LEI DAS ÁREAS IGUAIS

Sempre que uma fôrça central atua sôbre um objeto, êle se move numa órbita tal, que varre áreas iguais em intervalos iguais de tempo, não importando como a fôrça varia com a distância ao ponto central. A lei das áreas iguais expressa a conservação da quantidade de movimento angular, mas, como isto não é tratado neste curso, provàvelmente, seria imprudente discutir a quantidade de movimento angular em relação a esta experiência. A experiência serve ùnicamente para ilustrar a lei das áreas iguais e não está incluída entre as experiências mais importantes. Será melhor entendida pelos alunos, se fôr dada durante o estudo do Capítulo 22.

A melhor substância para se utilizar como indicador de tempo é areia fina. Funis cônicos devem ser usados, uma vez que a areia, eventualmente, não se escoa de recipientes de fundo plano. Para interromper a vazão, o orifício do copo pode ser tapado, empurrando a extremidade de um lápis apontado através da areia, na direção do orifício.

Para pesar a areia, deve-se utilizar uma balança com uma sensibilidade de, pelo menos, 0,1 g; seria melhor uma sensibilidade de 0,01;g.

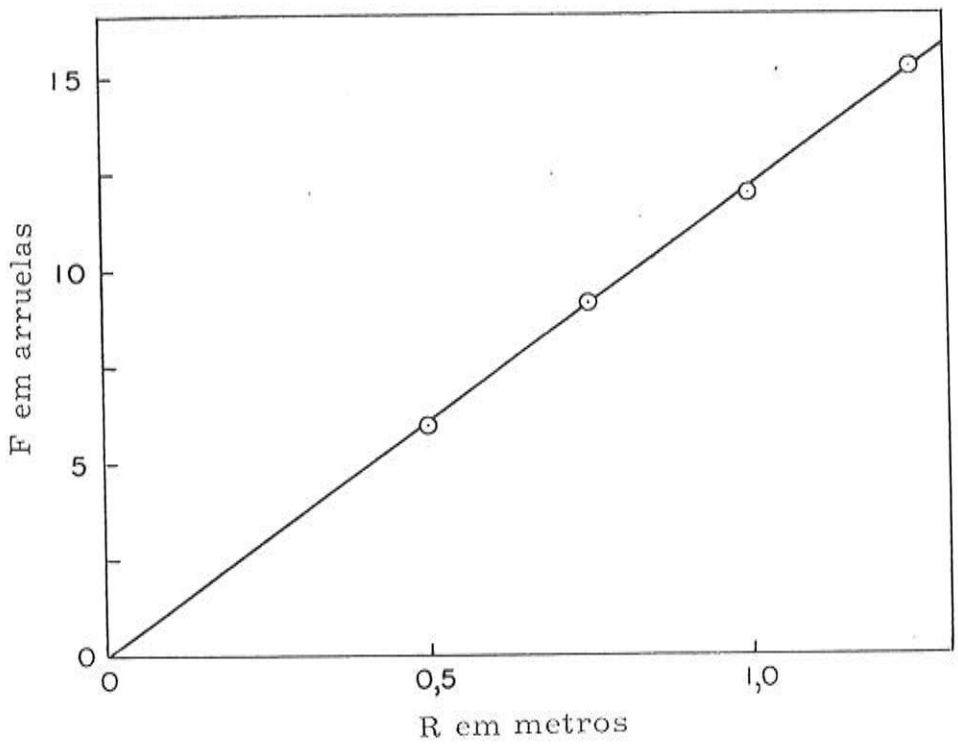


Figura (d)

Não é interessante o uso de uma balança mais sensível, uma vez que outras fontes de êrro serão maiores do que a imprecisão na pesagem.

É necessário empregar um suporte bem fixo. Se o suporte oscila, o pêndulo precessa em sua órbita, reduzindo a precisão, quando utilizamos várias revoluções, a fim de coletar areia suficiente para obter um pêso acurado. O ideal seria prender o pêndulo ao teto.

Talvez seja melhor que os alunos coletem os dados de várioas oscilações do pêndulo, em seguida, pesem a areia e analisem os resultados mais bem sucedidos, em casa.

Respostas às Perguntas

Várias voltas completas permitem uma maior precisão na pesagem da areia acumulada. Entretanto, um número muito grande de voltas completas resultará numa imprecisão de cálculos, causada pelo movimento de precessão.

A fôrça resultante sôbre o pêndulo atua sempre em direção a um ponto diretamente abaixo do ponto de suspensão. Isto pode ser testado, puxando o pêndulo para um lado e abandonando-o, sem comunicar-lhe qualquer movimento lateral. Neste caso, se se permitir que a areia escoe do pêndulo a partir de diferentes pontos, em tôrno de sua órbita, todos rastos da areia cruzar-se-ão sob o ponto de suspensão. Esta questão sugere ao aluno que êsse é o ponto para onde está dirigida a fôrça, e em tôrno do qual o pêndulo cônico varre áreas iguais, diferentemente do movimento planetário, no qual a fôrça atua em direção a um dos focos da elipse, fazendo com que o planêta varra áreas iguais em tempos iguais, em tôrno dêsse foco.

Um trabalho cuidadoso demonstrará, com uma precisão de cêrca de 5 a 10 por cento, que áreas iguais são varridas, mesmo para uma órbita elíptica estreita onde ocorre grande variação de velocidade.

Tanto para o pêndulo como para os planêtas, a fôrça é central, atuando em direção a um único ponto não importando a posição do objeto. A fôrça sôbre um planêta varia inversa-

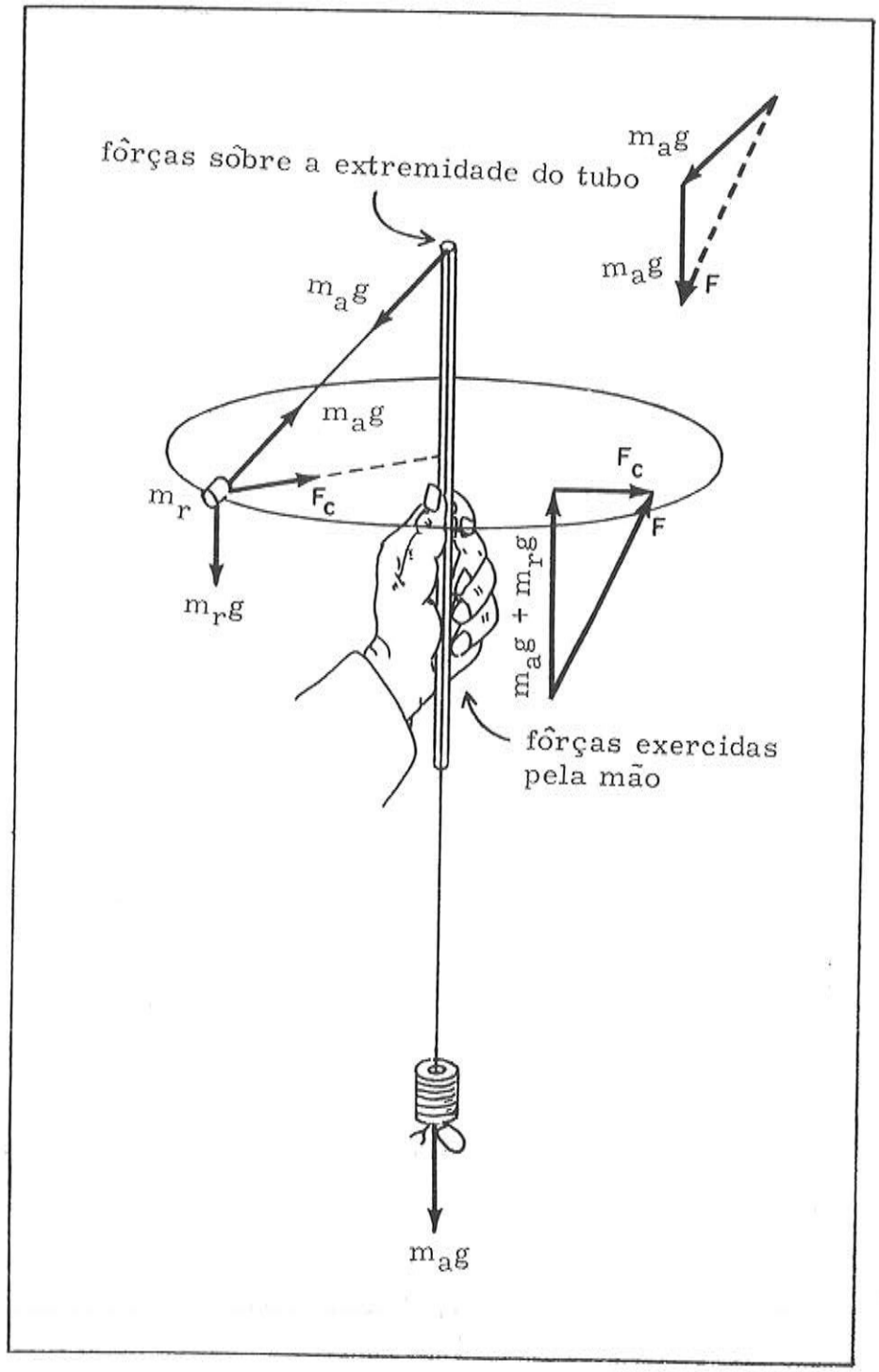

fôrças sôbre a extremidade do tubo
$m_a g$
$m_a g$
F
$m_a g$
$m_a g$
F_c
m_r
F_c
F
$m_r g$
$m_a g + m_r g$
fôrças exercidas pela mão
$m_a g$

Figura (e)

mente com o quadrado da distância entre o planêta e o Sol. A fôrça sôbre o pêndulo é diretamente proporcional à distância do corpo cônico ao centro da elipse, desde que o ângulo formado entre o fio de suspensão e a vertical seja pequeno.

Uma fôrça que varia com o inverso do quadrado da distância obriga um planêta a mover-se descrevendo uma elipse, com o centro de fôrça num dos focos, ao passo que uma fôrça linear sôbre um pêndulo obriga-o a mover-se descrevendo uma elipse, com a fôrça dirigida para o centro da elipse.

A Fig. 17 (a) foi feita, utilizando o método descrito no Guia de Laboratório. (Veja as sugestões dadas no final da Experiência III-5). O plano do filme estava paralelo ao plano da elipse. A Fig. 17 (b) foi feita da mesma maneira e com o mesmo equipamento da Fig. 17 (a), mas o tamanho da órbita foi diferente.

Se as Figs. 18 e 19 fôrem analisadas para determinar a razão R^3/T^2, as razões não serão iguais para os dois casos, visto que a lei de Kepler, dos períodos, aplica-se apenas a uma fôrça que obedece à lei do inverso do quadrado.

MATERIAL

1 Copo cônico de papel.
Suporte com haste e presilha.
Areia ou sal sêco.
1 Fôlha grande de papel de embrulho.
3 Grampos de carpinteiro.

---

1 Câmera.
1 Estroboscópio movido a motor.
2 Lâmpadas de 150 watts, soquetes, fios de ligação e protetores.
1 Esfera pintada de branco.
5 Suportes com haste e presilhas.
Fio.
1 Fôlha grande de papel prêto.
1 Régua
1 Fôlha de papel milimetrado transparente.

Balança
Escôva.

III-8. VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO NUMA EXPLOSÃO

Será mais oportuno dar esta experiência logo que o impulso e a quantidade de movimento tenham sido estudados no texto, e, preferìvelmente, antes de examinar, com os alunos, as variações da quantidade de movimento quando dois corpos interagem (Seção 23-3). A experiência introduzirá a lei da conservação da quantidade de movimento.

O dispositivo de explosão pode ser perigoso, se disparado indiscriminadamente. Não deve ser acionado, sem que a mola esteja seguramente fixa ao carro. Deve recomendar a seus alunos que não disparem a mola, quando o carro estiver apontado na direção de alguém.

As molas diferem na capacidade de fôrça. Uma mola fraca, atuando sôbre um carrinho pesado, talvez não dê uma velocidade suficiente para reduzir o efeito devido a pequenas variações da superfície da mesa.

Uma distância excelente entre os dois aparadores é, aproximadamente, 1,5 m. Se o carro deve percorrer uma distância muito grande, pode, devido ao atrito, parar antes de atingir os aparadores. Por outro lado, se a distância percorrida fôr muito pequena e as velocidades fôrem razoàvelmente altas, o método de tempos iguais não apresentará boa precisão.

Pelo menos, um tijolo deve ser colocado em cada carrinho, uma vez que a fôrça da explosão aplica um binário (torque) nas rodas, girando-as. Isto aparece como uma perda de quantidade de movimento linear. Sendo pequenas as massas das rodas comparadas à massa total, tal efeito é insignificante.

A posição inicial dos carrinhos sôbre a mesa pode ser marcada com giz. Verifique se os alunos colocaram as marcas para cada carrinho, junto à extremidade que tem apenas uma roda, como mostra a Fig. 21.

Se os dois carrinhos possuírem a mesma carga, o atrito não influirá; assim, as fôrças de atrito atuam no mesmo intervalo de tempo sôbre os dois carrinhos, dando-lhes impulsos iguais e opostos e diminuindo igualmente suas quantidades de movimento. Evidentemente, as fôrças de atrito serão diferentes, se os dois carrinhos estiverem carregados com diferentes massas, mas êste efeito de atrito é pequeno e pode ser desprezado, nesta experiência.

Se a mesa não estiver nivelada, um dos carrinhos ganhará quantidade de movimento em seu percurso, enquanto o outro perderá quantidade de movimento. Se não pudermos nivelar a mesa, será necessário fazer duas provas, tendo o cuidado de inverter as posições na segunda prova e comparar as variações da quantidade de movimento médio de cada carrinho.

Respostas às Perguntas

Se a mola fôr disparada com o carrinho em repouso sôbre a mesa, o carrinho não parecerá mover-se. O aluno concluirá que a quantidade de movimento do carrinho, antes e depois da explosão, é zero. Variando a carga sôbre o carrinho, o resultado não se modificará.

Com várias cargas sôbre o carrinho, pode-se observar qualitativamente que o carro mais leve se move mais ràpidamente, após a interação. Alguns alunos podem supor que as quantidades de movimento dos dois carros têm a mesma intensidade e sentidos opostos.

No cálculo da razão das quantidades de movimento, não é necessária uma unidade padrão da quantidade de movimento. A quantidade de movimento pode ser expressa em quilograma-metro por "batida". (Uma "batida" é o intervalo de tempo unitário necessário para os carrinhos atingirem os aparadores, numa dada corrida). Efetivamente, modificando-se as cargas nos carrinhos, resultarão diferentes velocidades e, portanto, diferentes unidades de tempo e de quantidade de movimento, mas a unidade de tempo será a mesma para ambos os carrinhos. Sem tentar determinar uma unidade específica, o aluno pode responder que a variação da quantidade de movimento de um dos carrinhos é igual em intensidade e oposta em sentido à variação da quantidade de movimento do outro carrinho. A razão das quantidades de movimento é igual a 1, dentro de 5%.

A quantidade de movimento total, antes e após a explosão, é zero e, portanto, a quantidade de movimento conservou-se.

Se se explodisse dinamite entre os carrinhos, seus pedaços voariam em muitas direções diferentes, com diferentes velocidades, mas determinaríamos que o *vetor soma* de suas quantidades de movimento seria zero. Esta é uma questão difícil para os alunos resolverem, antes de se familiarizaraem com as variações da quantidade de movimento em duas dimensões, estudadas mais tarde, no Capítulo 23 e na Experiência III-10.

Uma outra forma de realizar esta experiência elimina a necessidade de ouvir o ruído da colisão simultânea dos carrinhos com os aparadores. Isto requer um material mais elaborado e suscita um número maior de questões, porém, alguns alunos talvez queiram tentar esta extensão da experiência.

Coloque os carrinhos sôbre uma prancha lisa de cêrca de 1,5 metros de comprimento, que tenha aparadores em suas extremidades [Fig. (a)]. A prancha deve apoiar-se sôbre 3 peças roliças de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de polegada. Utilize os três apoios roliços, dois próximos às extremidades e um no meio. Faça uma marca sôbre a prancha e uma outra correspondente sôbre a mesa. Quando o dispositivo de explosão lança os carrinhos na direção das extremidades da prancha, um dêles atinge o aparador correspondente em primeiro lugar e move a prancha no sentido de seu movimento. Um instante depois, o segundo carrinho atinge seu aparador e pára a prancha. O deslocamento da marca é o indicador sensível da ordem relativa, com que os carrinhos atingem os aparadores. Quando a posição inicial correta dos carrinhos fôr determinada, êles atingirão os aparadores simultâneamente, e a prancha não se moverá.

MATERIAL

2 Carrinhos de dinâmica.

4-5 Tijolos.

4 Grampos de carpinteiro.

2 Aparadores de madeira.

Régua.

---

1 Prancha lisa, 1,5 m de comprimento.

3 Roletes de madeira.

Giz ou fita adesiva.

Balança.

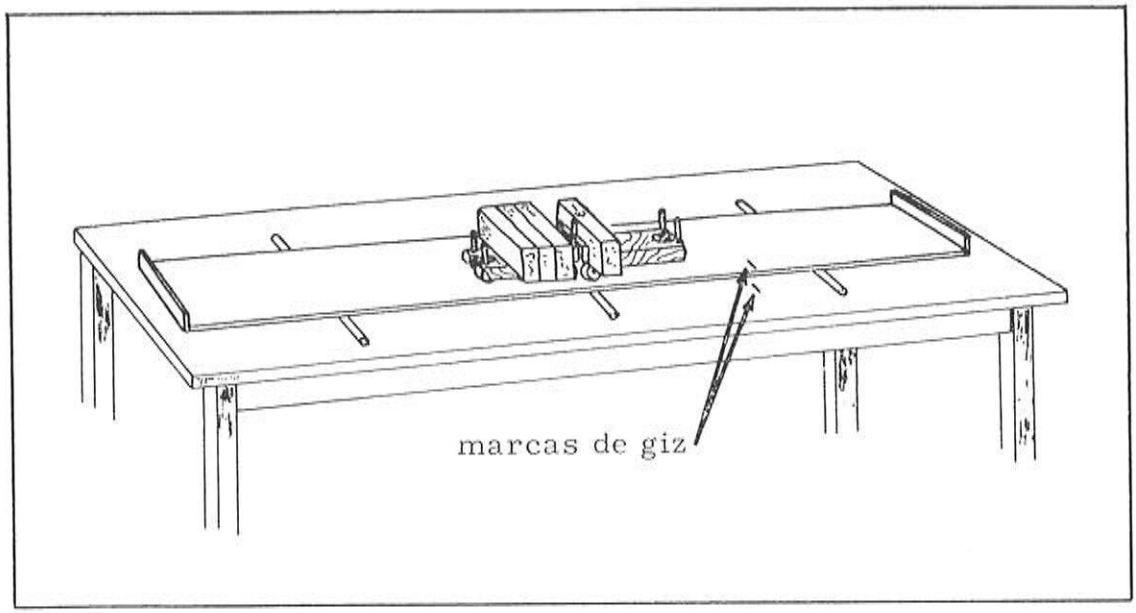


Figura (a)

III-9. O CARRINHO E O TIJOLO

Como esta experiência vem após o aluno ter descoberto a conservação da quantidade de movimento na explosão, Experiência (III-8), é indiferente realizá-la antes ou depois dos alunos estudarem, no texto, as seções correspondentes à conservação da quantidade de movimento. Esta é uma experiência mais complexa do que "Variações da Quantidade de Movimento numa Explosão", dando ao aluno um discernimento mais profundo na conservação da quantidade de movimento.

Não é difícil realizar a experiência, mas há várias técnicas a serem observadas. Deve-se utilizar um fio grosso e pesado para suportar o tijolo, porque é mais fácil de segurá-lo no travessão suporte, como mostra a Fig. 22. Pratique um pouco, antes de registrar o movimento do carrinho.

Como sempre há um pouco de atrito, o carrinho diminui de velocidade no percurso. Para analisar a interação pròpriamente dita, a velocidade do carrinho deve ser medida exatamente antes e após a interação. Quando estiver coletando os dados, o carrinho deve carregar, pelo menos, 1 tijolo, a fim de evitar uma velocidade final tão baixa, que as irregularidades da mesa causem flutuações grandes demais. É necessário um bom critério, para determinar as velocidades antes e depois da interação; deve-se, portanto, escolher um intervalo suficientemente longo, para ser significativo e suficientemente curto para que a velocidade seja, aproximadamente, constante.

Para prevenir danos na superfície da mesa, quando tijolos caem fora do carrinho, embrulhe-os com papel.

Uma outra análise dos dados pode ser feita, construindo-se o gráfico da velocidade em função do tempo. As velocidades reais podem ser determinadas, extrapolando as retas que representam as velocidades ligeiramente variáveis, antes e após o impacto [Fig. (a)]. Sôbre uma mesa lisa e plana, não é pràticamente necessária a extrapolação. De qualquer modo, sòmente os alunos mais interessados devem ser aconselhados a utilizar êste método de análise.

Respostas às Perguntas

O carrinho diminuirá de velocidade, quando o tijolo cair sôbre êle. Aumentando-se a massa do carrinho, sua velocidade diminuirá menos.

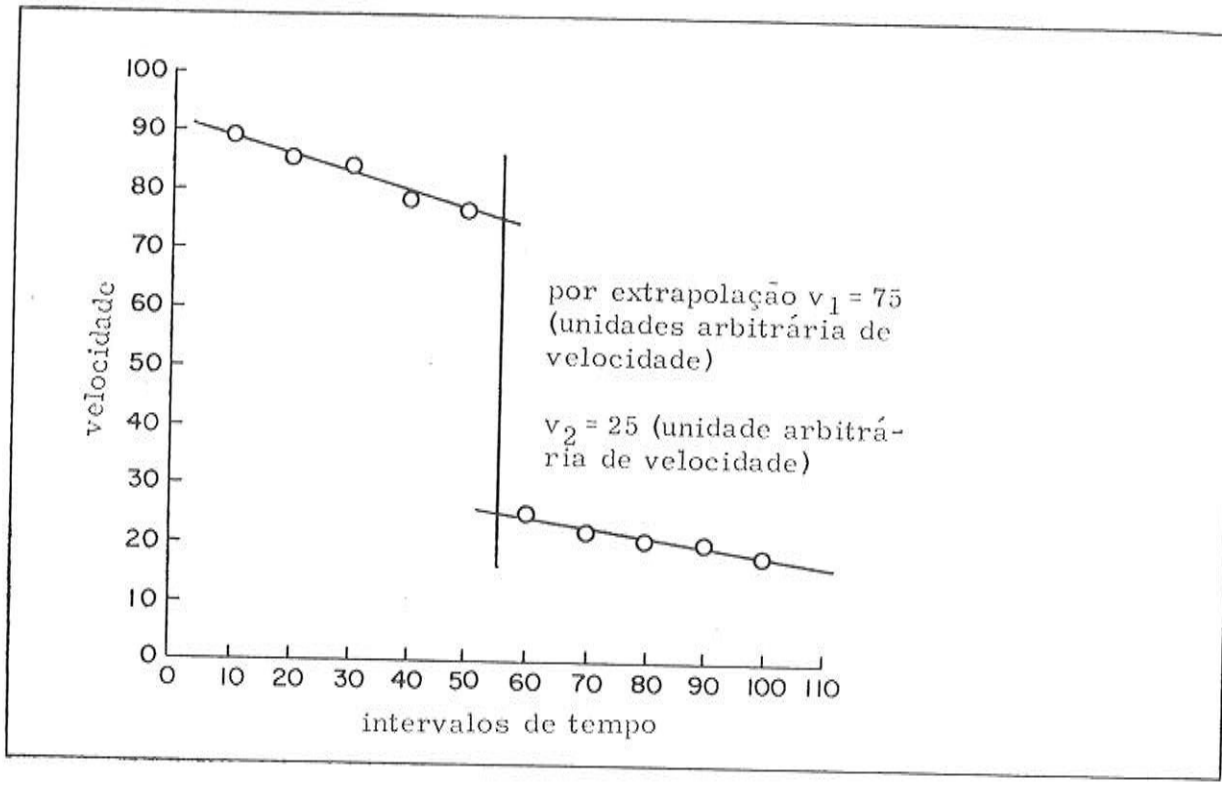


Figura (a)

O decréscimo na quantidade de movimento do carrinho é igual ao acréscimo na quantidade de movimento horizontal do tijolo, mas as variações são em sentidos opostos.

A quantidade total de movimento horizontal do sistema carrinho-tijolo suspenso, antes da interação, é sòmente a do carrinho. Como, devido à colisão, o carrinho perde a mesma quantidade de movimento que o tijolo ganha, a quantidade de movimento total do sistema carrinho-tijolo, após a interação, é a mesma que antes da interação. A quantidade de movimento conserva-se, dentro dos êrros experimentais (cêrca de 2 por cento).

O impulso horizontal aplicado ao tijolo que cai é igual à sua variação de quantidade de movimento horizontal. A duração do instante de interação pode ser estimada, examinando-se cuidadosamente as fitas e avaliando quantos intervalos mostram uma variação rápida de velocidade. Em geral, a interação completa ocorre em um ou dois tiques.

A fim de calcular a fôrça horizontal (em newtons) aplicada ao tijolo, os "tiques" devem ser calibrados em segundos. O melhor modo de conseguir isto é puxar a fita através do marcador de tempo, durante um intervalo de tempo conhecido (4 ou 5 segundos) e contar os tiques. A precisão na calibração do marcador de tempo, assim, não é importante, visto que a inspeção da fita dará sòmente a ordem de grandeza do número de intervalos, durante os quais se deu a interação.

Utilizando o impulso conhecido aplicado ao tijolo, a fôrça média da interação pode ser determinada numa ordem de grandeza de $F = \frac{I}{\Delta t}$, onde I é o impulso e Δt é o tempo de interação. Esta é uma determinação grosseira, e é importante assinalar que se trata de uma fôrça média; na realidade, a fôrça varia bastante durante a interação, de maneira imprevisível.

A fôrça aplicada ao carrinho é igual e oposta à fôrça aplicada ao tijolo.

A quantidade de movimento vertical do tijolo que cai é transferida à Terra, através do carrinho e da mesa. Teòricamente, o módulo da velocidade vertical é de pouca importância, nesta experiência.

Se derramarmos areia, vagarosamente, dentro de uma caixa sôbre o carrinho, êle diminuirá de velocidade, mas a duração da colisão será maior do que quando deixamos cair o tijolo. Contudo, se permitirmos que a areia se escoe do carrinho, a velocidade do carrinho não varia. Deve ficar claro que nosso sistema consiste do carrinho e da areia, durante a experiência. Sòmente a soma das quantidades de movimento de ambos permanece invariável. Quando soltamos o tijolo sôbre o carrinho, aparece uma fôrça de atrito entre êles, até que ambos se movem com a mesma velocidade.

Quando retiramos o tijolo ou permitimos que a areia se derrame fora do carrinho, tanto o carrinho como a areia possuem a mesma velocidade horizontal e continuam com a mesma velocidade, até a areia atingir a mesa que não faz parte do nosso sistema. Não se pode incluir qualquer objeto no sistema, durante a interação, porque isto conduzirá a êrros. Deixar cair o tijolo sôbre o carrinho é diferente do caso acima. Porque, de início, o tijolo não tem uma quantidade de movimento horizontal, podemos dizer que a massa do carrinho aumenta e, portanto, sua velocidade diminui.

O inverso da experiência de abandonar o tijolo sôbre o carrinho é lançar o tijolo, em sentido contrário ao do movimento do carrinho, por meio de um dispositivo, de tal forma que a velocidade do tijolo, relativa à mesa, seja zero; o carrinho, então, aumentará de velocidade e o tijolo cairá verticalmente.

MATERIAL

1 Carrinho de dinâmica.
1 Marcador de tempo e acessórios.
3-4 Tijolos.
1 Suporte de base retangular com uma haste e presilhas.
3 Grampos de carpinteiro.
Corda fina, bem forte.
Papel de embrulho.
Aparador para o carrinho.

Balança.
Calços.
Fita adesiva.

III - 10. UMA COLISÃO EM DUAS DIMENSÕES

Esta experiência possui dupla finalidade. O primeiro objetivo é convencer os alunos de que a quantidade de movimento é uma grandeza vetorial e, portanto, o que se conserva é a soma *vetorial* e não a soma aritmética. Sòmente através da análise de uma colisão em duas dimensões é que isto pode ser evidenciado. O segundo objetivo é deixar os alunos descobrirem que uma outra quantidade, mv^2, que não é um vetor, parece também conservar-se. A descoberta da conservação de mv^2, nesta experiência, tem a finalidade de estimular sòmente a curiosidade do aluno mais capaz, não se pretendendo fazer um estudo profundo da energia, nesta altura. Esta experiência é importante e não deve ser omitida. A ocasião propícia para ser feita é após a Seção 23-4.

O marcador de tempo pode ser utilizado para medidas de velocidades e quantidades de movimento, sòmente para colisões que ocorrem ao longo de uma reta. Colisões em duas dimensões, sôbre uma mesa, podem ser analisadas por meio de fotografias estroboscópicas, e êste método é utilizado pelo livro texto. Na falta dêste equipamento, outros métodos podem ser usados para cronometrar os movimentos. A velocidade horizontal constante de um projétil proporciona um meio simples de medir velocidades, em qualquer direção horizontal.

Quando uma esfera rola pela borda de uma mesa, recebe dela um pequeno impulso horizontal; quanto mais rápido é o movimento, tanto menor é o impulso. Por isso, a esfera é montada sôbre um parafuso afastado da borda da mesa, de forma que a esfera incidente não entre em contato com a mesa, no instante da colisão.

A esfera golpeada deve estar à direita do centro da régua. Esta disposição permite um número maior de posições da esfera alvo, sem que haja batidas da bola incidente no suporte do parafuso.

Certos alunos talvez sintam que esta colisão é, realmente, em três dimensões, uma vez que as esferas não se movem apenas em diferentes direções no plano horizontal, mas também caem verticalmente. Pode lembrá-los de que estão determinando as velocidades, exatamente antes e exatamente após a colisão, enquanto os objetos estão se movendo no plano horizontal, e que o movimento vertical resultante é usado apenas como um meio de medir as velocidades no plano horizontal.

Respostas às Perguntas

Quando rolamos a esfera, cêrca de dez a quinze vêzes ao longo da canaleta, os pontos onde ela atinge o solo sôbre o papel ficam espalhados numa pequena área que pode ser considerada como um círculo, cujo diâmetro é, aproximadamente, 3 por cento da distância percorrida pela esfera. Logo, as velocidades iniciais em cada ensaio variam da velocidade média, em cêrca de 1,5 por cento.

As quantidades de movimento, no caso das esferas de massas iguais, são representadas pelos vetores deslocamento, sôbre o papel. Se a experiência fôr feita cuidadosamente, a soma vetorial das duas quantidades de movimento finais será igual à quantidade de movimento inicial da esfera incidente, tanto em módulo como em direção, dentro da precisão experimenttal determinada pelo espalhamento dos pontos. As Figs. (a) e (b) mostram exemplos com dados e diagramas vetoriais. A quantidade de movimento conserva-se, dentro dos êrros experimentais.

Embora a soma vetorial das quantidades de movimento seja constante, a soma *aritmética* dos módulos das quantidades de movimento é variável.

Quando a experiência é feita com massas diferentes, a esfera mais pesada deve ser utilizada como esfera incidente. De outra forma, na colisão frontal ou aproximadamente frontal, a esfera incidente mais leve, após a colisão, recua e bate na mesa.

Quando se emprega esferas de massas diferentes, os deslocamentos sôbre o papel, representando as velocidades, não representam mais as quantidades de movimento. A soma vetorial das velocidades finais não será igual à velocidade inicial.

Para converter os vetores velocidade em vetores quantidade de movimento, no caso de esferas de massas desiguais, o vetor velocidade de cada esfera deve ser multiplicado pela respectiva massa da esfera. Para facilitar, podemos escolher a massa da bola incidente como nossa unidade de massa. O vetor quantidade de movimento da bola incidente torna-se, assim, idêntico ao seu vetor velocidade, e o vetor quantidade de movimento da esfera alvo torna-se menor do que o correspondente vetor velocidade, pela razão m_a/m_i. Verifica-se a conservação da quantidade de movimento.

As componentes vetoriais das quantidades de movimento finais das duas esferas, numa direção em ângulo reto com a quantidade de movimento inicial, são iguais em módulos e opostas em sentido.

Quando os alunos compararem os quadrados das velocidades iniciais e finais para o caso de massas iguais, verão que o quadrado da velocidade inicial da bola incidente é, aproximadamente, igual à soma aritmética dos quadrados das duas velocidades finais. Isto sugere que alguma quantidade, envolvendo o quadrado da velocidade, mantém-se constante.

No caso das massas diferentes, os alunos verificarão que o quadrado das velocidades não se conserva, mas, quando os quadrados das velocidades são multiplicados pelas respectivas massas, a soma do final mv^2 é igual ao inicial mv^2.

Uma vez montada a experiência, em pouco tempo pode-se tomar um grande número de dados, mas a análise é longa e, provàvelmente, poderá ser feita em casa. Não peça um número muito grande de colisões, para serem analisadas. (A determinação das componentes vetoriais das quantidades de movimento finais, em ângulo reto com a direção das quantidades de movimento iniciais, é interessante, mas não uma parte essencial da experiência).

A última parte da experiência, os cálculos demonstrando a conservação da energia cinética, pode ser considerada como opcional. A perda da energia cinética nessas colisões é muito pequena, e um meio rápido de testar isto, no caso de massas *iguais*, é examinar o ângulo entre as direções do movimento das duas esferas, após a colisão. Se não houver perda de energia

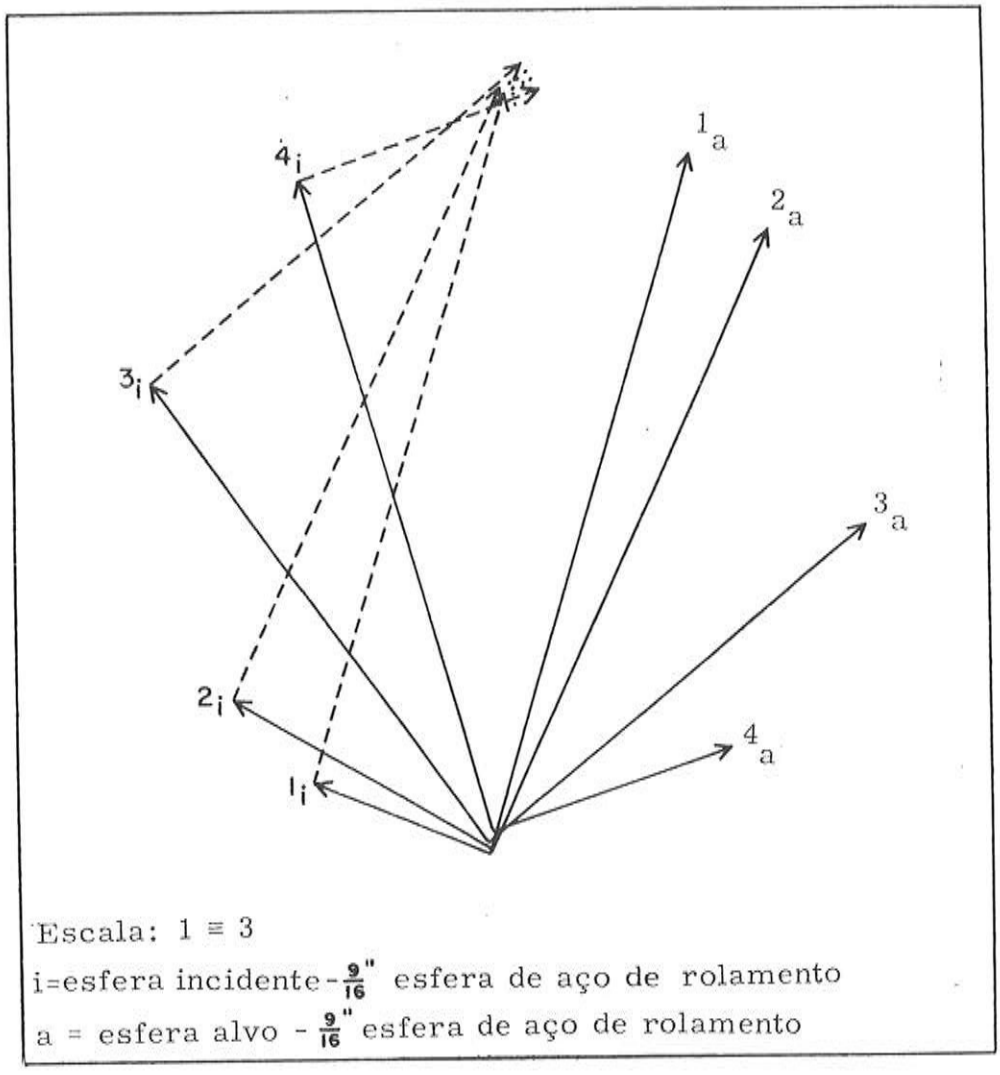


Figura (a)

cinética, êsse ângulo será reto; quanto maior fôr a perda, menor será o ângulo.

Para saber por que o ângulo é 90°, quando não há perda de energia cinética e as massas são iguais, observe que, como a velocidade é um vetor $\vec{v}$, a soma das velocidades $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$ das duas massas iguais é:

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_b,$$

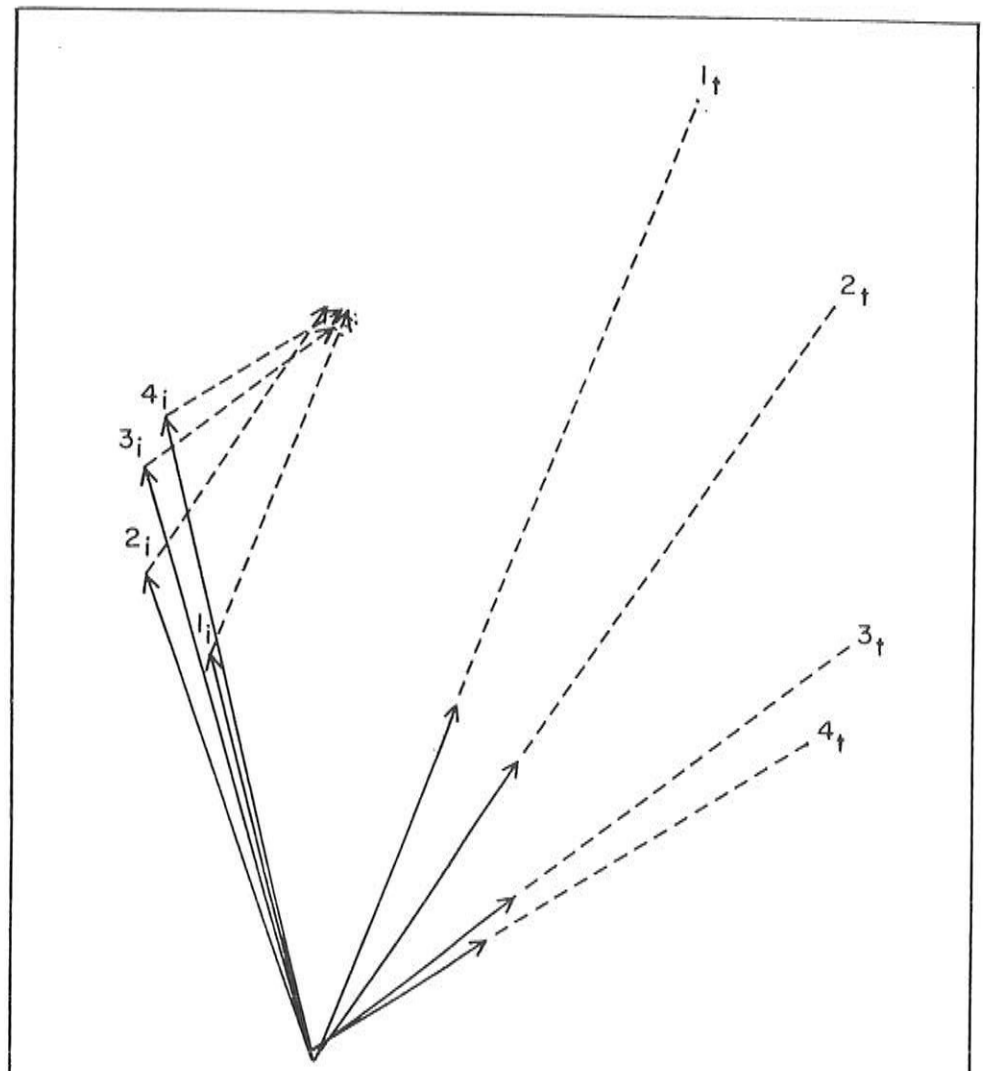
e os módulos estão relacionados por:

$$v^2 = v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos \Theta$$

onde Θ é o ângulo formado por $\vec{v}_a$ e $\vec{v}_b$. Se a energia conserva-se e as massas são iguais,

$$v^2 = v_a^2 + v_b^2.$$

Portanto, $-2v_a v_b \cos \Theta = 0$, e $\Theta = 90°$.



Escala: 1" = 3"

i = esfera incidente - esferas de rolamento $\frac{9''}{16}$

t = esfera alvo - bolinha de vidro $\frac{5''}{8}$.

Figura (b)

MATERIAL

1 Kit de colisão em duas dimensões consistindo de:
Armação para montar a régua com canaleta, de plástico.
Braço móvel (com apertador e suporte para a bola alvo).
Fio de prumo.
2 Bolas de aço de $\frac{1"}{2}$ (meia polegada).
1 Bola de vidro, $\frac{1"}{2}$.
1 Grampo de carpinteiro.
4 Fôlhas de papel carbono.
8 Fôlhas de papel transparente (papel vegental).
2 Pesos.
1 Transferidor.
1 Régua.

Fita adesiva.

III - 11. COLISÕES LENTAS

É difícil visualizar uma interação em que ocorre uma transferência de energia cinética de um corpo a outro. A exposição sôbre o assunto apresentado no texto (Seção 24-5) é um tanto abstrata; esta experiência, no entanto, demonstrará, através do movimento lento de dois carrinhos, o que ocorre em análoga interação. Aconselha-se fazer esta experiência juntamente com o estudo dêsse assunto no texto, e é interessante ter o carrinho com a mola adaptada, durante as discussões das Seções 24-5, 24-6 e 24-7.

Esta experiência é uma discussão em classe e ao mesmo tempo um exercício de laboratório, onde a matéria é ensinada diretamente. As anotações não são necessárias por ser esta uma experiência qualitativa, preparada principalmente para visualizar o processo da interação.

Enfatize a analogia das colisões lentas com as colisões entre bolinhas de aço. A diferença está apenas no tempo de interação e no tamanho da deformação durante a interação. A energia é armazenada temporàriamente nas molas e liberada novamente, quando os carrinhos se separam. No caso de bolas de bilhar, a energia é armazenada em suas distorções durante a colisão.

A colisão de dois carrinhos é inelástica. Perde-se na colisão parte da energia, por causa do atrito. Pode-se reduzir o efeito do atrito, comunicando ao carrinho uma grande velocidade inicial. Deve-se experimentar diversas velocidades iniciais.

Respostas às Perguntas

Fàcilmente se observa que, durante a interação, o carrinho incidente perde energia cinética, enquanto o carrinho que estava parado ganha energia cinética. Quando os carrinhos estão a uma separação mínima, deslocam-se vagarosamente. Pode-se pensar que a energia cinética é mínima, quando a separação é mínima, mas não se pode ter certeza, apenas, por observações qualitativas. É fácil acreditar que, de acôrdo com a exposição no texto, boa parte da energia fica armazenada nas molas, quando a separação é mínima. Isto é, os carrinhos ficam em repouso, por um instante, um em relação ao outro.

As questões respondidas no parágrafo anterior simplesmente chamam a atenção dos alunos para certos aspectos da interação descrita no texto. Respondendo a essas perguntas, os alunos executaram a principal parte da experiência. A parte da experiência que conduz à resposta das questões subseqüentes é uma extensão, em aberto, para os alunos que querem saber sôbre outros tipos de colisão, além daquele descrito na Seção 24-5.

Quando a massa total dos carrinhos é aumentada, o tempo de interação também aumenta, e a distância de separação mínima diminui para uma dada velocidade inicial. Aumentando se a velocidade de incidência, o tempo de interação parece ser constante, o que realmente deverá acontecer, se a compressão da mola fôr proporcional à fôrça. Nesta parte da experiência, não se deve permitir que a separação seja tão pequena, a ponto de haver um contato direto entre os corpos dos carrinhos.

Se os carrinhos estiverem igualmente carregados e um dêles em repouso antes da colisão, no final, o carrinho incidente ficará em repouso, enquanto o outro sairá com tôda a energia, não havendo perdas causadas pelo atrito nas molas

aparadoras. Na realidade, o carrinho incidente é levado ao repouso ràpidamente pelo atrito com a mesa, algumas vêzes, antes de terminar a interação.

MATERIAL

2 Carrinhos de dinâmica com molas aparadoras "macias".
4 Tijolos.
4 Grampos de carpinteiro.
2 Aparadores para os carrinhos.

III-12. VARIAÇÕES NA ENERGIA POTENCIAL

Esta experiência, como a III-13, "A Energia de um Pêndulo Simples", apresenta uma situação em que a energia passa de uma forma à outra, com pequena perda. Aconselha-se realizar as duas experiências, mas se o tempo disponível é limitado, faça, pelo menos, uma delas (de preferência esta) após a Seção 25-3. Aqui, a energia potencial gravitacional é transformada em energia potencial da mola distendida. Esta experiência é extremamente importante e exige algumas precauções.

Necessita-se de um suporte ràgidamente montado, de aproximadamente um metro de altura, para manter a mola e o pêso pendurados livremente na beira da mesa.

Se o período de laboratório fôr limitado, a construção gráfica da distensão da mola em função da fôrça aplicada poderá ser adiada, até os alunos efetuarem tôdas as medidas.

Respostas às Perguntas

O gráfico da distensão x da mola em função da fôrça F é pràticamente uma reta passando pela origem (dentro da escala investigada), o que leva a concluir a proporcionalidade de x com F, dentro da escala de valôres dessa experiência. Pode-se substituir o valor da inclinação $k = F/x$ da curva na função da energia potencial de uma mola linear, $U_m = \frac{1}{2}\, kx^2$, para calcular a energia potencial armazenada na mola para qualquer distensão x.

Pode-se imaginar situações em que o gráfico fôrça-distensão não seja uma reta. Nestes casos, a energia armazenada na mola pode ser determinada por "integrações gráficas" — isto é, determinando a área sob a curva, de zero a diferentes valôres de x. Uma tabela, ou gráfico, de U_m pode ser construída, como foi feito no caso anterior.

A perda na energia gravitacional entre os dois pontos extremos, $-\triangle U_g = -mg(x_2 - x_1)$, é igual ao ganho na energia potencial da mola distendida entre os mesmos pontos, $\triangle U_m = \frac{1}{2}\, k(x_2^2 - x_1^2)$, dentro de 1 ou 2 por cento. Observe que de $-\triangle U_g = \triangle U_m$ ou $-mg(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\, k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}\, k(x_2 + x_1)\,(x_2 - x_1)$; temos:

$$mg = -k\,\frac{(x_2 + x_1)}{2};$$

logo, o pêso da massa é igual em módulo à fôrça exercida pela mola, quando está distendida até o ponto médio de x_1 e x_2. Isto corresponde ao ponto onde a massa estava originalmente em repouso, antes de produzir a sua oscilação. Êste ponto é o centro de oscilação.

Estabelecendo o ponto zero, arbitràriamente, para a energia potencial gravitacional no ponto $x = 0$ (isto é, o ponto mais baixo da mola não distendida), temos para a energia potencial total

$$U = U_g + U_m = -mgx + \frac{1}{2}\, kx^2.$$

Escolhendo o zero para x no ponto $\frac{x_2 + x_1}{2} = -\frac{mg}{k}$, e definindo, assim, uma nova coordenada $x' = x + \frac{mg}{k}$, resulta $U = -\frac{1}{2}\,\frac{m^2g^2}{k} + \frac{1}{2}\, kx'^2$. Finalmente, estabelecendo o zero da energia potencial total no ponto médio da oscilação, U transforma-se em $U' = \frac{1}{2}\, kx'^2$ [Fig. (a)].

A soma das energias potenciais, quando a massa está a meio caminho dos pontos extremos,

é menor do que a energia potencial no início e fim da queda. A diferença representa a energia cinética da massa.

A variação na energia cinética pode ser investigada experimentalmente, tomando-se fotografias estroboscópicas da massa em queda, ou examinando a queda de um corpo de massa 1 kg, e registrando a sua queda na fita do marcador de tempo.

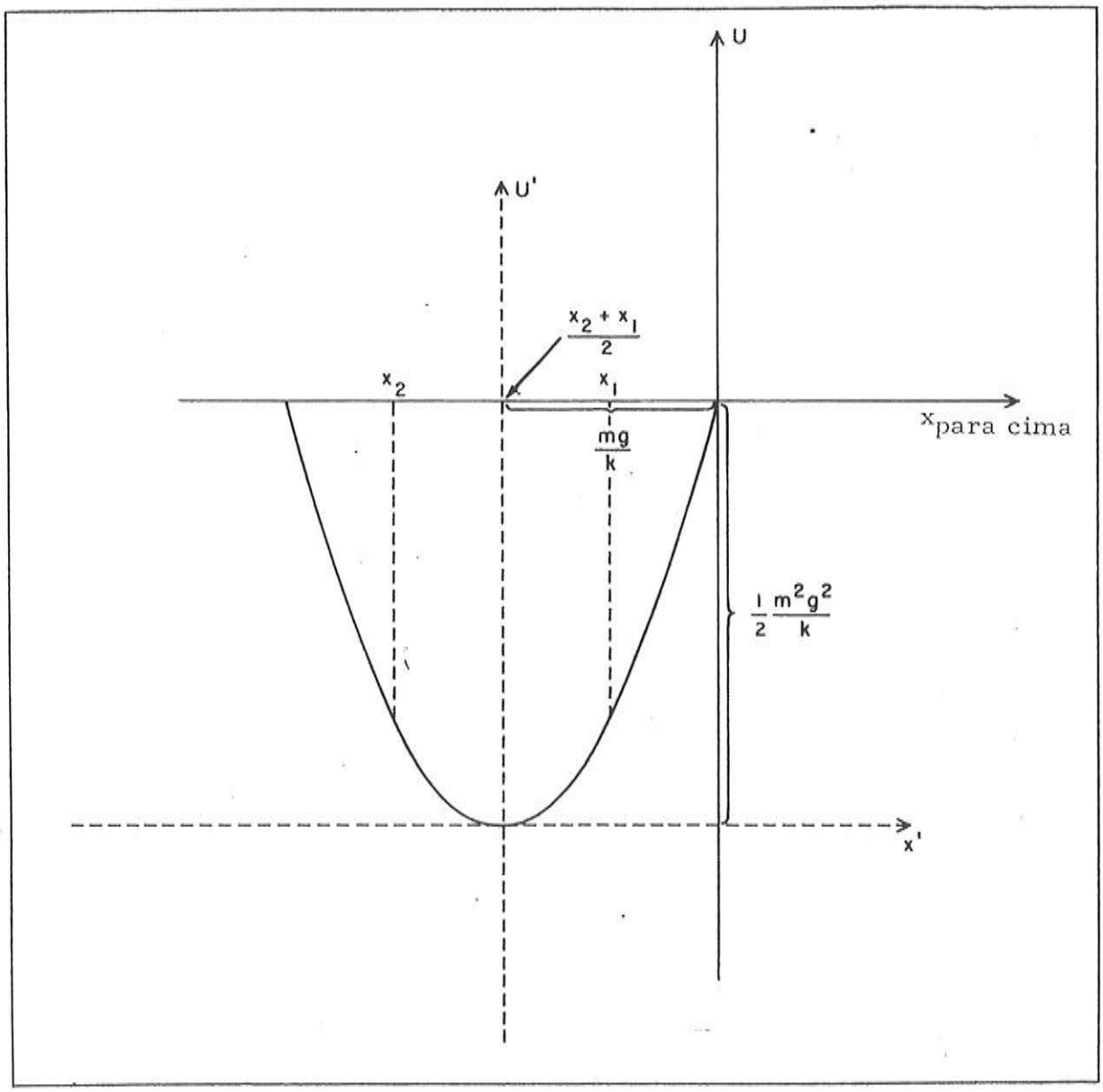


Figura (a)

MATERIAL

1 Mola de aço (2 cm de diâmetro por 15 cm de comprimento; k aproximadamente 4 nt/m).
2 Pesos (0,5 kg, 1,0 kg) com porta-pesos.
1 Suporte com base em U com haste de 1 m.
2 Fôlhas de papel milimetrado.
3 Prendedores de roupa.
Régua.
Balança.
1 Conjunto de massas aferidas, de 10 g, 50 g, 100 g e 200 g.
1 Presilha universal.

III - 13. A ENERGIA DE UM PÊNDULO SIMPLES

Esta experiência, um tanto trabalhosa, mostra como a energia potencial transforma-se em energia cinética. Anàlogamente a Experiência III-12, é melhor programar esta experiência para depois do estudo da Seção 25-3 no texto.

Deve-se dispor de um suporte bem forte, seguro por três fios de sustentação. Se fôr possível, fixe o fio do pêndulo diretamente ao fôrro, para obter maior estabilidade.

Faça os alunos praticarem um pouco, até obterem uma oscilação suave. A direção da fôrça do fio com que o experimentador puxa o tijolo deve passar pelo centro de massa do tijolo, a fim de não produzir a oscilação do mesmo. Prenda a ponta da fita do marcador no centro da base do tijolo, para diminuir os êrros provocados pela lenta rotação do tijolo durante a oscilação. Será mais fácil a análise, se o aluno marcar na fita a posição de repouso do tijolo, antes de soltar o tijolo. Se êle fizer isso, deve ter o cuidado de não mover mais o marcador de tempo. O marcador deve estar fixo, enquanto registra o movimento.

A velocidade do pêndulo em diferentes posições pode ser obtida do gráfico da distância em função do tempo ou, se o tempo de aula disponível fôr limitado, a velocidade poderá ser determinada diretamente da fita, omitindo-se o gráfico da distância.

Deve-se determinar a velocidade do pêndulo em metros por segundo, se a energia cinética fôr calculada em joules. O marcador de tempo pode ser calibrado, puxando-se a fita por 5 ou 10 segundos e contando, em seguida, os tiques.

Respostas às Perguntas

A comparação dos gráficos da energia potencial e da energia cinética mostra claramente que, se estão expressas na mesma unidade, uma delas diminui da mesma quantidade que a outra aumenta [Fig. (a)]. A soma dessas energias permanece constante dentro do êrro experimental. Um êrro sistemático pode ser introduzido, devido a uma pequena imprecisão na calibração do marcador de tempo. Na Fig. (a) isto aparece como uma pequena elevação no valor da energia total, no meio da oscilação.

A energia cinética é mínima no início e término do movimento do tijolo ao descrever o arco; é máxima, quando o tijolo está diretamente abaixo do ponto de suspensão.

Limitando a oscilação do pêndulo para 15° podemos aplicar a relação aproximada, $h = x^2/2L$, ao invés da relação exata $h(2L - h) = x^2$. Para uma oscilação maior, deve-se aplicar a segundo fórmula. Nesse caso, também há incorreções, porque a fita não marca apenas a projeção do movimento horizontal do pêndulo, mesmo que o marcador esteja colocado bem distante do pêndulo. A altura h pode ser determinada diretamente, em lugar de empregar a fórmula $h(2L - h) = x^2$. A soma das duas energias para uma oscilação de grande amplitude permanecerá constante, se tomarmos as precauções acima mencionadas.

Se os alunos já estudaram trigonometria podem também pesquisar o movimento harmônico simples, analisando o gráfico da posição em função do tempo. A fim de demonstrar, que para pequenos ângulos o movimento é harmônico simples, deve-se construir o gráfico da seguinte maneira:

Estabeleça a origem na posição de repouso do pêndulo e meça as distâncias positivas e negativas em sentidos opostos, a partir dêsse ponto. Considere o máximo deslocamento horizontal, x_m, a partir do ponto médio, como sendo $\pm$ 1. Logo, a distância x nessa nova unidade será: $d = \frac{x_m}{x}$.

O tempo de oscilação, t_{max}, é a metade de um período e, portanto, equivale a 180°. O tempo

pode ser convertido para uma escala angular, calculando-se:

$$\Theta = \frac{t_{max}}{t} \times 180^{o}.$$

O gráfico de d em função de Θ será bem semelhante ao gráfico de $d = \cos \Theta$. Isto ocorre apenas para pequenos ângulos de oscilação.

Talvez algum aluno queira investigar um movimento mais complicado do que o sinusoidal, abandonando o pêndulo de um ângulo maior do que 15º, e efetuando a necessária correção ao analisar os dados.

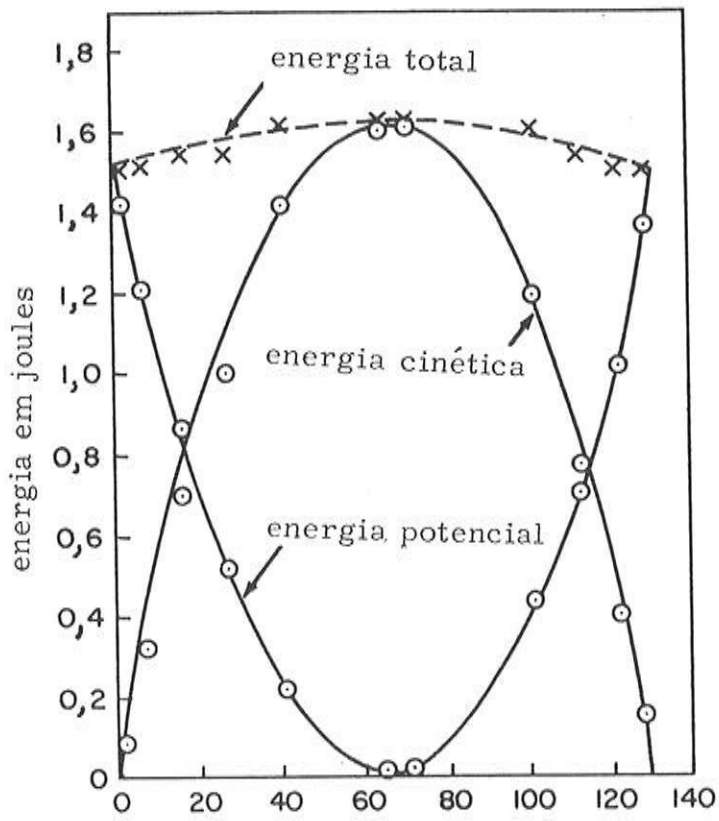


Figura (a)

MATERIAL

1 Marcador de tempo e acessórios.

1 Suporte de um metro ou mais de altura, haste de meio metro, e presilha.

4 Grampos de carpinteiro.

1 Rôlo de barbante.

1 Tijolo.
Régua.

2 Fôlhas de papel milimetrado.

III - 14. UMA COLISÃO FRONTAL

Esta experiência deve ser realizada durante o estudo do Capítulo 26. Sua finalidade é enfatizar a diferença entre a conservação da quantidade de movimento e a conservação da energia mecânica. Aqui, aproximadamente 25 por cento da energia cinética converte-se em calor, enquanto a quantidade de movimento conserva-se, dentro de um êrro de 3 a 5 por cento. A análise desta experiência toma muito tempo e pode ser considerada facultativa. Muitas con-

clusões podem ser obtidas, reestudando os resultados das Experiências III-9 e III-10. A colisão em III-9 é completamente inelástica (isto é: a máxima energia cinética, coerente com a conservação da quantidade de movimento, é transformada em calor) enquanto em III-10, é quase totalmente elástica.

Se a distância disponível é pequena para mover o carrinho incidente com velocidade constante, deve-se dar ao carrinho um rápido empurrão. Para conseguir que os dois carrinhos desenvolvam uma velocidade suficientemente elevada após a colisão, o carrinho inicialmente em movimento deve ter, pelo menos, duas vêzes a massa do carrinho estacionário.

Respostas às Perguntas

Se o carrinho incidente tiver uma massa menor do que o estacionário, retrocederá inutilizando, dêsse modo, a fita.

O tempo de interação será de alguns tiques.

As quantidades de movimento, após e antes da colisão, praticamente igualam-se (dentro de 3 a 5 por cento). Como nas experiências precedentes, certa imprecisão é introduzida pela rotação das rodas, e uma pequena parte da quantidade de movimento é transferida à mesa. A perda da energia cinética, por outro lado, não pode ser atribuida a êrros experimentais. Uma parte é transformada em calor, pelo atrito.

A quantidade de movimento foi expressa em quilograma-metros por tique.

Quando as molas aparadoras são substituídas por material mole e inelástico, há maior transformação de energia cinética em calor; entretanto, a quantidade de movimento conserva-se.

MATERIAL

2 Carrinhos de dinâmica (um dêles com a mola).

1 Marcador de tempo e acessórios.

4 Tijolos.

3 Grampos de carpinteiro.

1 Fôlha de papel milimetrado.

1 Aparador de carrinho.

Balança.

Pesos.

Massa de vidraceiro ou de modelagem.