APRENDIZAGEM VERSUS MEMORIZAÇÃO: COMO NÃO SE PRIVILEGIA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA[♦]

Maria Antonieta Teixeira de Almeida[a] [antoniet@if.ufrj.br]
Marta Feijó Barroso[a] [marta@if.ufrj.br]
Eliane B.M. Falcão[b] [elianeb@nutes.ufrj.br]

[a] Instituto de Física - UFRJ
[b] NUTES - Núcleo de Tecnologia Educacional para a Saúde - UFRJ

Resumo

Um grande número de alunos, no ensino de Física de nível superior, utiliza o recurso da memorização da solução de problemas como técnica de aprendizagem. A pesquisa das causas deste comportamento foi feita para um caso específico, o da aprendizagem da lei de conservação do momento linear para um sistema de partículas. Foram analisados a estrutura do conteúdo, os exemplos e os exercícios apresentadas para este tópico nos livros didáticos geralmente adotados nas disciplinas introdutórias de Física. Verificou-se que faltam na estrutura deste material didático conexões cognitivas necessárias para que ele faça sentido para o aprendiz, indicando que o comportamento de busca de memorização parece favorecido, e mesmo promovido, nestes textos, não favorecendo uma aprendizagem significativa.

1. INTRODUÇÃO

A teoria cognitiva da aprendizagem proposta por Ausubel et al. [1] ressalta a dimensão organizadora das informações no cérebro humano. Segundo esta teoria, a aprendizagem se daria à medida que novas informações, ou conteúdos, encontrassem seu lugar conectando-se a uma organização cognitiva previamente estabelecida. A conexão ocorreria quando o aprendiz percebesse um *significado* nos novos conteúdos. Este *significado* seria assim o relacionamento, feito pelo estudante, de novas informações com aquelas que ele já conhece. O aluno, como ressalta Novak [2], precisa estar consciente desta necessidade, precisa deliberadamente buscar significado no seu processo de aprendizagem. Mas o estudante não está sozinho neste processo, está com professores, colegas e livros. No mínimo, livros! E a qualidade do material que veicula a informação é fundamental para a busca de significado [2]. Esta qualidade é dada pela organização interna do material a ser aprendido: este material precisa fazer sentido, precisa de significado próprio. Um texto com idéias desarticuladas, seja por redação confusa, seja por omissão de elementos informativos, não seria apropriado como recurso de aprendizagem. Em resumo, não favoreceria o trabalho intelectual do aluno de produzir sentido, de relacionar tal conteúdo com seu repertório pessoal, isto é, de aprender, de reorganizar sua estrutura cognitiva.

Nessa concepção de organização, encontra-se o pressuposto da hierarquização: informações mais complexas requerem, para se estruturar, a aprendizagem de outras mais simples. Para que o estudante aprenda, ele precisa, antes de mais nada, estar diante de *um conteúdo potencialmente dotado de sentido*, isto é, seus diversos elementos devem estar relacionados de forma clara, estando então disponível para que ele próprio, o estudante, possa realizar o seu trabalho de aprender. A ausência de determinados conhecimentos poderia inviabilizar a aquisição de outros.

Este modelo teórico de aprendizagem permite a análise de um fenômeno bastante freqüente nas salas de aula de Física: a insistência dos alunos em memorizar problemas relacionados a alguns tópicos e conceitos, estabelecendo assim um hábito de estudo que, longe de promover a aprendizagem, induz a erros. De acordo com Ausubel [1], poderíamos dizer que tal hábito de memorização estaria se dando por dificuldade dos alunos em conectar o que estaria sendo ensinado com a bagagem intelectual prévia, ou que o material de ensino a eles de ensino apresentado não seria dotado intrinsecamente de sentido. Os alunos, pela insistência em memorizar, estariam expressando uma estagnação no processo de aprendizagem, ou por decisão pessoal (falta de interesse), ou por lhes faltarem elementos cognitivos necessários. A hipótese deste trabalho é que esta memorização tem como uma das causas a qualidade deficiente do material didático oferecido aos estudantes. Os livros apresentam-se deficitários na exposição dos conteúdos, sobretudo omitindo elementos informativos que compõem teorias, conceitos e exemplificações. O resultado seria uma falta de sentido experimentada pelos alunos: novas informações estariam sendo oferecidas sem condições potenciais de serem aprendidas.

À luz deste referencial, analisaremos um caso típico que ocorre com as tentativas de ensino da lei de conservação do momento linear para um sistema de partículas. Trata-se de um tópico do curso introdutório de Mecânica, em geral ensinado no primeiro ano dos cursos universitários das áreas de ciências exatas e tecnológicas. O que usualmente se observa, como resultado destas tentativas, é um leque de erros manifestados por grande parte dos alunos nas suas buscas de solucionar problemas, relacionados ao tópico, a eles proposto. No entanto, é possível dentro deste leque de erros caracterizar-se um padrão, isto é, encontrar alguns dos caminhos intelectuais percorridos pelos alunos, caminhos estes que se repetem, ou que são os mais freqüentes. Este padrão tem como característica principal a dificuldade de identificar e de justificar as situações em que ocorre a conservação, exata ou aproximada, do momento linear de um sistema de partículas.

Os livros disponíveis e utilizados nas disciplinas de Física no terceiro grau formam um conjunto pequeno, usado praticamente em toda a parte. Os mecanismos usuais de avaliação de aprendizagem envolvem provas, em sua maioria baseadas em problemas a serem resolvidos. Analisamos a estrutura de abordagem do tópico de conservação do momento linear para um sistema de partículas em alguns livros deste conjunto [3]. A estrutura é comum aos textos avaliados, sendo apresentada na seqüência

i. enunciado das leis
ii. exemplos que ilustram as aplicações destas leis

As leis são demonstradas ou mencionadas, e a seguir aplicadas a exemplos. De forma geral, os exemplos são organizados de acordo com o grau de dificuldade, com os mais simples apresentados no início. Na discussão de momento linear para um sistema de partículas, inicialmente são apresentados exemplos em que há conservação de momento linear. A seguir são analisadas as situações onde existe uma conservação apenas aproximada, como nas colisões.

O levantamento realizado nestes livros mostra dois argumentos como justificativas para a aplicação da conservação aproximada do momento linear em colisões onde a força resultante externa não é nula:

1. *As colisões ocorrem em tempos muito curtos.*
2. *As forças internas em uma colisão são muito mais intensas do que as forças externas. Por isso, o impulso devido à força resultante externa que atua no sistema é desprezível.*

São citados como exemplos de forças externas desprezíveis em uma colisão a força de atrito e a força peso. Essa afirmativa é corroborada pela comparação dessas forças com a estimativa do valor médio da força interna em colisões.

Os argumentos anteriores porém constituem-se basicamente numa modelagem dos problemas considerados. As hipóteses básicas que permitem a utilização das leis de conservação não são completamente verificadas ou discutidas, fazendo com que o material apresentado não se conecte de forma lógica à discussão da lei de conservação. Os mesmos argumentos são válidos em outras situações nas quais a lei de conservação não é válida. Portanto, do ponto de vista de aprendizagem, não fazem sentido, não satisfazendo às condições para o aprendizado significativo; mais do que isso, induzem a erro os estudantes.

O artigo foi organizado da seguinte forma: na Seção 2 fazemos a discussão da lei para a conservação de momento linear aproximada. Na Seção 3, os exemplos mais comuns, do pêndulo balístico e a colisão de uma bala com uma barra rígida, são discutidos. Na Seção 4 indicamos sugestões de elaboração do material didático para este tópico com base na avaliação anterior. Na Seção 5, apresentamos as conclusões, e nos Apêndices apresentamos material com cálculos ou justificativas para os exemplos apresentados utilizando conceitos mais apropriados, como o de conservação de momento angular.

2. A CONSERVAÇÃO APROXIMADA DO MOMENTO LINEAR

A variação no momento linear de um sistema de partículas é igual ao impulso das forças externas:

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}_{ext} \qquad (1)$$

onde $\vec{I}_{ext} = \int \vec{F}_{ext}^{res}\, dt$, e $\vec{F}_{ext}^{res}$ é a força resultante externa sobre o sistema.

Esta lei é (neste nível de ensino) demonstrada como uma conseqüência das leis da mecânica para uma partícula. Para a sua apresentação, é crucial a compreensão do que são as interações internas ao sistema e as interações externas ao sistema. A lei de conservação do momento linear para o sistema de partículas diz que "sempre que o sistema for isolado, ou quando a resultante das forças externas agindo sobre ele for nula, o momento linear total do sistema é conservado."

Um conceito que também já pode ser introduzido nesta fase, sem dificuldades, é o de força média. A força média associada a uma força que atua durante um intervalo de tempo Δt é

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \frac{\int \vec{F}\, dt}{\Delta t} . \qquad (2)$$

Da definição de impulso de uma força, pode-se fazer a relação entre o impulso e a força média num dado intervalo de tempo: o impulso associado à força $\vec{F}$ está relacionado com a força média e com o intervalo de tempo em que ela atua através da expressão:

$$\vec{I} = \left\langle \vec{F} \right\rangle \Delta t . \qquad (3)$$

Se o impulso da força resultante externa ($\vec{I}_{ext} = \left\langle \vec{F}_{res}^{ext} \right\rangle \Delta t$) for nulo, o momento linear do sistema se conserva. Se existir força resultante externa, não há conservação momento linear.

Se o impulso da força resultante externa for desprezível comparado ao momento linear inicial, dizemos que existe um conservação aproximada de momento linear para o sistema. Em termos matemáticos, isto é escrito como

$$\left|\vec{I}_{ext}\right| << \left|\vec{P}_{inicial}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\Delta P_x\right| << \left|\vec{P}_{inicial}\right|, \left|\Delta P_y\right| << \left|\vec{P}_{inicial}\right|, \left|\Delta P_z\right| << \left|\vec{P}_{inicial}\right| \tag{4}$$

A argumentação apresentada nos livros citados [3] faz a comparação entre o impulso das forças internas ao sistema e o impulso das forças externas a ele. No entanto, não é cabível esta comparação. Considerando um sistema constituído de duas partículas (1 e 2), podemos escrever para a variação do momento linear de cada uma dessas partículas

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{I}_{\text{int}}^{(1)} + \vec{I}_{ext}^{(1)} \quad , \Delta\ \vec{p}_2 = \vec{I}_{\text{int}}^{(2)} + \vec{I}_{ext}^{(2)} \tag{5}$$

A variação do momento linear total do sistema constituído por 1 e 2 é a soma das variações dos momentos lineares das duas partículas,

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{I}_{\text{int}}^{(1)} + \vec{I}_{\text{int}}^{(2)} + \vec{I}_{ext}^{(1)} + \vec{I}_{ext}^{(2)} = \vec{I}_{ext}^{(1)} + \vec{I}_{ext}^{(2)}, \tag{6}$$

uma vez que as variações no momentos internos, isto é, as variações devidas às interações internas ao sistema, se cancelam.

As equações (5) mostram que, quando se trata de analisar a variação do momento linear de uma das partículas que compõem o sistema, devemos comparar o impulso interno com o externo. Todavia, quando se trata da análise da variação do momento linear do sistema de partículas, interessa apenas o impulso externo. Assim, não cabe a comparação entre impulso externo e impulso interno nesta análise; para alterar o momento linear total do sistema de partículas, temos que provocar impulsos externos ao sistema considerado.

Para a análise da variação do momento linear, devemos comparar o impulso externo resultante com o momento linear inicial do sistema –como na equação (4)– e verificar se essa variação está dentro da barra de erro ou incerteza experimental das medidas que podem ser realizadas para o sistema modelado. É essa análise comparativa que fornece a base teórica para a verificação da validade aproximada da conservação momento linear do sistema.

3. OS EXEMPLOS APRESENTADOS

Um dos primeiros exemplos ou exercícios apresentado nos textos considerados, logo após a apresentação da lei de conservação do momento linear e de alguns exemplos de conservação exata, é chamado *problema do pêndulo balístico*. O problema corresponde a determinar a velocidade de uma bala (de arma de fogo) através da medida da altura a que se eleva um bloco pendurado por um fio a um ponto fixo, quando a bala penetra e fica dentro do bloco. Alguns dos livros o apresentam como um exemplo resolvido, outros como um exercício a resolver.

Quando há a solução deste problema, é suposto a priori que há conservação (aproximada) do momento linear. Levam-se em consideração os argumentos citados na seção anterior,

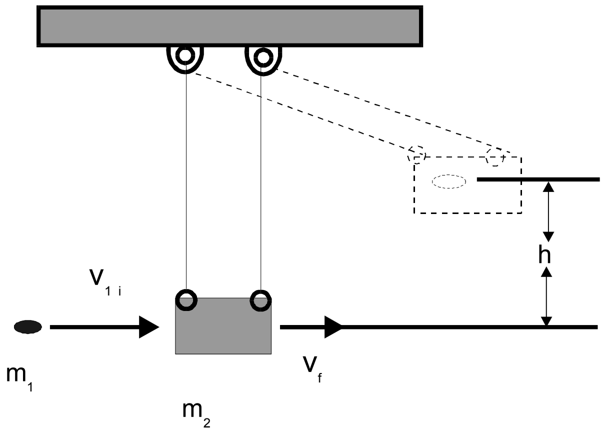
> *1. As colisões ocorrem em tempos muito curtos.*
>
> *2. As forças internas em uma colisão são muito mais intensas do que as forças externas. Por isso, o impulso devido à força resultante externa que atua no sistema é desprezível.*

Vamos analisar o problema do pêndulo balístico, e um problema bastante semelhante, em que em vez de atingir um bloco rígido (que pode ser tratado como uma partícula) preso ao teto por um fio, a bala atinge uma barra rígida. Nas duas soluções, partiremos da equação (4) como a condição básica a ser satisfeita para garantir a possibilidade de uso da conservação aproximada do momento linear do sistema. Para o problema com a barra, não será possível demostrar a equação (4) – e a conservação aproximada do momento linear não pode ser utilizada. No Apêndice 1 o problema do pêndulo balístico e da barra serão resolvidos utilizando-se a conservação do momento angular. Esta resolução confirma que há conservação aproximada do momento linear para o pêndulo balístico e não há conservação de momento linear, sequer de forma aproximada, para o sistema com a barra.

3.1 O Pêndulo Balístico – o problema

Um pêndulo balístico, como o mostrado na Figura 1, é um dispositivo que foi projetado e utilizado para medir as velocidades de projéteis antes do desenvolvimento de dispositivos eletrônicos de medição. Esse pêndulo consiste de um grande bloco de madeira de massa *M*, pendurado por fios longos. Uma bala de massa *m* é disparada para dentro do bloco, parando rapidamente. Então, o sistema *bloco+bala* desloca-se para cima, seu centro de massa elevando-se uma distância vertical *h* antes que o pêndulo pare momentaneamente ao final do seu arco. Os dados que usaremos, típicos do problema, são M = 5,4 kg, m = 9,5 g e h=6,3 cm.

Figura 1



O que se deseja determinar é a velocidade $\mathbf{\vec{v}_{1i}}$ (com módulo v_{1i}) da bala, imediatamente antes da colisão com o bloco.

3.2 O Pêndulo Balístico – a solução

A discussão desse problema começa com a análise da variação do momento linear entre o instante imediatamente anterior àquele em que a bala atinge o bloco, e o instante em que ela pára em relação ao bloco. Existem, nos livros analisados, duas versões para a solução.

A primeira versão para a solução argumenta que:

Imediatamente após a colisão, o sistema *bala+bloco* têm velocidade $\vec{v}_f$ (de módulo v_f). Aplicando a conservação do momento linear à colisão temos $m\vec{v}_{1i} = (m+M)\vec{v}_f$. Portanto o módulo da velocidade final, v_f, vale

$$v_f = \frac{m}{m+M} v_{1i} \quad . \tag{7a}$$

A segunda versão para a solução argumenta que:

A colisão da bala com o bloco dura um tempo tão curto que o pêndulo não se eleva apreciavelmente neste intervalo. Podemos tratar a colisão então como um processo unidimensional. A conservação do momento linear na direção da velocidade inicial nos dá $m v_{1i} = (m+M) v_f$, e portanto o módulo da velocidade do sistema imediatamente após a colisão é

$$v_f = \frac{m}{(m+M)} v_{1i} \,. \tag{7b}$$

As equações obtidas com os dois argumentos, (7a) e (7b), são idênticas. A partir dessa etapa, a resolução é a mesma em todos os textos.

Como o bloco e a bala permanecem unidos após o choque, a colisão é totalmente inelástica, e não há conservação de energia cinética no processo. Após a colisão, no entanto, a energia mecânica é conservada porque nenhuma das forças (peso e trações) atuando sobre o sistema tem capacidade para dissipá-la. Conseqüentemente, a energia cinética do sistema no instante em que o bloco está no ponto mais baixo de seu arco (logo ao fim da colisão) deve ser igual à energia potencial do sistema quando ele está no ponto mais alto de sua trajetória:

$$\frac{1}{2}(m+M) {v_f}^2 = (m+M) g\, h. \tag{8}$$

A eliminação de v_f entre as equações (7) e (8) fornece a relação procurada entre a velocidade do projétil e a altura atingida pelo pêndulo:

$$v_{1i} = \frac{(M+m)}{m} \sqrt{2 g h} \quad . \tag{9}$$

Com os dados citados, os valores numéricos de v_f e v_{1i} são

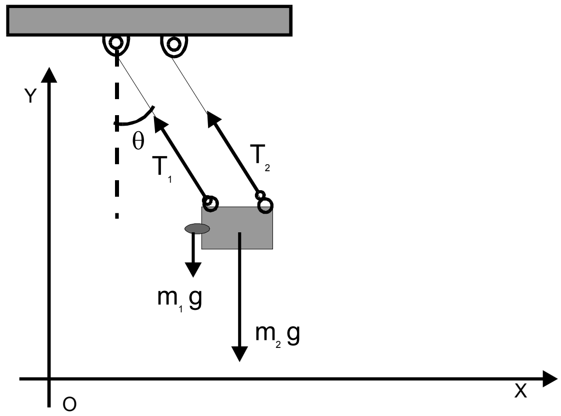
$$v_f \cong 630 \text{ m/s} \quad , \quad v_{1i} = 1{,}1 \text{ m/s}$$

3.3 O PÊNDULO BALÍSTICO – ANÁLISE DAS SOLUÇÕES

A hipótese que o momento linear do sistema se conserve durante o período em que a bala penetra o bloco ou não é justificada (na primeira versão de solução) ou tem uma justificativa incompleta (na segunda versão).

A utilização da conservação do momento linear exige uma argumentação além da usada na segunda versão: é necessário completar a justificativa aplicando a lei expressa pela equação (1). Iniciemos a nossa argumentação isolando o sistema constituído pela bala e pelo pêndulo balístico. As forças externas que atuam no sistema estão representadas na Figura 2; são as forças peso e as trações na corda, desprezando-se qualquer força de resistência.

Figura 2



A variação do momento linear do sistema bala+bloco durante a colisão, que ocorre entre os instantes $t_{inicial} = 0$ e $t_{final} = \tau$, é

$$\Delta\vec{P} = \int_0^\tau dt\left[\vec{T} + (m+M)\,\vec{g}\right] = (m+M)\vec{g}\,\tau + \int_0^\tau \vec{T}\,dt\,, \tag{10}$$

onde $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ é a resultante das trações nas cordas que sustentam o bloco.

A expressão (10) mostra que não há conservação exata de momento linear neste caso. O que existe é uma conservação *aproximada*, que precisa ser discutida para ter significado. Fazendo a decomposição das forças externas ao sistema segundo dois eixos *x* e *y* como os mostrados na Figura 2, obtemos

$$-\Delta P_x = -(m+M)v_f\cos[\theta(\tau)] + m v_{1i} = \int_0^\tau dt\,T\,sen(\theta) \tag{11a}$$

$$\Delta P_y = (m+M)\,v_f\;sen[\theta(\tau)] = -(m+M)\,g\,\tau + \int_0^\tau dt\,T\cos(\theta)\,. \tag{11b}$$

O argumento utilizado na segunda versão de solução, que "*a colisão da bala com o bloco dura um tempo tão curto que o pêndulo não se eleva apreciavelmente neste intervalo*", apenas garante que o ângulo $\theta(\tau)$ é pequeno. Mostraremos num exemplo a seguir que a validade deste argumento não assegura a conservação aproximada de momento linear.

Para pequenos ângulos as equações (11) se reduzem a

$$mv_{1i} - (m+M)\,v_f \cong \int_0^\tau dt\,T(t)\;\theta(t) \quad < \quad \theta(\tau)\int_0^\tau dt\,T(t) \tag{12a}$$

$$(m+M)\,v_f\,\theta(\tau) \cong -(m+M)\,g\,\tau + \int_0^\tau dt\,T(t) \tag{12b}$$

A velocidade do sistema no instante τ é obtida através da aplicação do princípio da conservação da energia entre os momentos final da colisão, $t = \tau$, e o instante em que o sistema atinge o ponto mais alto de sua trajetória:

$$\frac{1}{2}(m+M)\,v_f^2 + (m+M)\,g\,\ell\left[1-\cos(\theta(\tau))\right] = (m+M)\,g\,h\,.$$

A velocidade da bala imediatamente após a sua penetração completa no bloco vale

$$v_f = \sqrt{2g\,h + 2g\,\ell\left[1-\cos(\theta(\tau))\right]} \tag{13a}$$

No caso de pequenos ângulos esta velocidade se reduz a

$$v_f \cong \sqrt{2g\,h} \tag{13b}$$

Por este motivo, e com esta hipótese, a componente y da variação do momento linear se reduz a

$$\Delta P_y = (m+M)\, v_f\ sen(\theta(\tau)) \cong (m+M)\, g\, \theta(\tau)\, v_f \cong (m+M)\, g\, \sqrt{2gh}\ \theta(\tau) \qquad (14)$$

O limite superior para a componente x do momento linear pode ser obtido utilizando-se (12b) e (13b):

$$\int_0^{\tau} dt\, T(t) \quad \cong \quad (m+M)\, v_f\ \theta(\tau) + (m+M) g\, \tau \cong (m+M) \quad \left[\sqrt{2gh}\ \theta(\tau) + g\ \tau\right] \qquad (15)$$

$$mv_{1i} - (m+M)v_f < \quad \theta(\tau) \quad \int_0^{\tau} T\, dt \quad \cong \quad (m+M)\, \theta(\tau) \quad \left[\sqrt{2gh}\ \theta(\tau) + g\tau\right]. \qquad (16)$$

Podemos estimar, com os dados do problema, as variações nas componentes do momento linear no caso em que $\theta(\tau)$= 0,01 rad e τ = 0,001s:

$$\Delta P_y = 0{,}1\ N.s \quad , \quad |\Delta\ P_x| = 0{,}002\ N.s$$

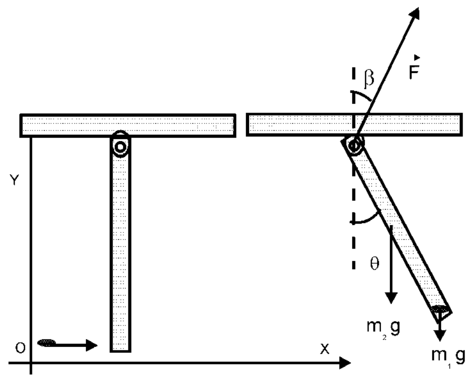
Esses valores são pequenos comparados ao momento inicial da bala, que é da ordem de 6,0 N.s.

3.4 UM CONTRA-EXEMPLO

Consideremos agora um exemplo muito similar ao discutido. O fio e o bloco são substituídos por uma barra de massa M. Um enunciado típico deste problema seria o apresentado a seguir.

"Uma barra de massa M está pendurada em um pino e pode girar livremente sem atrito. Ela é atingida por uma bala com massa m e velocidade inicial $\vec{v}_{1i}$, como indicado na Figura 3. A bala fica encravada na barra, e o centro de massa da barra atinge uma altura máxima H. A bala penetra rapidamente na barra e ela quase não se eleva durante a colisão. Calcule a velocidade inicial da bala".

Figura 3



A solução deste problema pode ser feita nas mesmas linhas do problema do pêndulo balístico. O sistema barra+bala tem, como forças externas atuantes, as forças peso e sustentação $\vec{F}$ no pino, desprezando atritos. A direção da força de sustentação no pino não é conhecida por nós, a priori, como no caso da tração da corda.

Nesse caso, a aplicação da lei (1) ao sistema fornece, para cada uma das componentes da variação do momento angular do sistema bala+barra,

$$-\Delta P_x = -\left(m\omega\ell + M\omega\frac{\ell}{2}\right)cos\big(\theta(\tau)\big) + m\ell v_{1i} = \int_0^\tau dt\ F\ sen\big(\beta(t)\big) \qquad (17a)$$

$$\Delta P_y = \left(m\omega\ell + M\omega\frac{\ell}{2}\right)sen\big(\theta(\tau)\big) = -\,(m{+}M)\ g\ \tau + \int_0^\tau dt\ F\ cos\big(\beta(t)\big). \qquad (17b)$$

onde novamente τ é o instante no qual a bala e a barra ficam em repouso relativo, e ω é a velocidade angular da barra neste instante.

Não há conservação de momento linear neste problema. A resultante das forças externas sobre o sistema não é nula. Vamos verificar se há conservação aproximada do momento linear.

A altura máxima atingida pelo centro de massa da barra é H. Podemos calcular o ângulo máximo que a barra faz com a vertical:

$$\ell - \frac{\ell}{2}\cos(\theta_{\max}) = H \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_{\max}) = \frac{2(\ell - H)}{\ell}.$$

Conseqüentemente, a altura máxima atingida pela bala encravada é

$$h = \ell - \ell\cos(\theta_{\max}) = 2H - \ell\ .$$

A conservação da energia fornece uma relação entre a velocidade angular de rotação ω e a altura máxima H:

$$\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\ell(1-\cos(\theta(\tau)) + Mg\left(\ell - \frac{\ell}{2}\cos(\theta(\tau))\right) = mgh + MgH\ , \qquad (18)$$

onde $I = \frac{1}{3}M\ell^2$ é o momento de inércia da barra em relação ao ponto de sustentação. A equação (18), para valores pequenos de $\theta(\tau)$, se reduz a

$$mgh + MgH \cong \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\ .$$

Nesse caso a velocidade angular da barra se transforma em

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(mh + MH)}{m\ell^2 + I}}\ . \qquad (19)$$

Portanto, para pequenos ângulos, a componente do momento linear na direção vertical (y) é proporcional a $\theta(\tau)$, e pode ser desprezível.

$$\Delta P_y = (m\omega\ell + \frac{1}{2}M\omega\ell)\ sen\big(\theta(\tau)\big) \cong (m + \frac{1}{2}M)\ \ell\ \sqrt{\frac{2g(mh+MH)}{m\ell^2 + I}}\ \theta(\tau) \cong 0\ . \qquad (20)$$

A força que o pino exerce sobre a barra durante a colisão não tem a direção da barra. Isso significa que o ângulo β que esta força faz com a vertical não é igual ao ângulo θ, e portanto não precisa ser pequeno. Conseqüentemente, nesse caso, a manipulação das equações (20) e (17) não permitirá que seja obtido um limite para a variação da componente horizontal do momento linear como função dos parâmetros do sistema, do ângulo θ e do tempo de colisão. *Apesar do sistema praticamente não se mover durante a colisão, não é possível verificar a conservação aproximada do momento angular utilizando-se a equação (1). Na realidade, a resolução desse problema através da utilização da lei de conservação do momento angular (conforme indicamos no Apêndice 1) mostra que nesse caso não há conservação aproximada de momento linear.*

4. SUGESTÕES PARA UMA ELABORAÇÃO DIDÁTICA POTENCIALMENTE DOTADA DE SENTIDO

Dentro do referencial teórico da teoria da aprendizagem significativa, observa-se da discussão do tópico de lei de conservação do momento linear que a condição de aprendizagem – a necessidade que o material didático faça sentido, tenha significado próprio, não está sempre presente nos textos analisados. O material disponível nos livros induz ao recurso da memorização, ao fazer uma utilização de exemplos e justificativas que não são razoáveis nem sequer inteiramente corretas, não fazendo sentido e não permitindo que o aprendiz perceba um significado nestes conteúdos.

Consideramos que uma estratégia de aprendizagem da lei de conservação de momento linear não pode omitir as passagens onde se faz a verificação da validade das hipóteses necessárias à aplicação da lei. No problema do pêndulo balístico a aplicação da lei não é simples porque a força externa (tensão) não tem uma expressão empírica que limite o seu valor.

A preocupação com a aprendizagem nos leva a indicar a existência de outros exemplos cuja modelagem permite a utilização absolutamente correta e simples da lei de conservação exata e aproximada do momento linear. Nestes casos, as forças externas ao sistema envolvidas estão relacionadas com interações que têm uma representação funcional estabelecida ou limitada, como nos casos das forças peso, de atrito estático e cinético, e a força elástica.

Os problemas sugeridos, no caso da conservação exata, são a penetração de uma bala num bloco apoiado horizontalmente numa mesa sem atrito; a penetração de uma bala num bloco ligado por uma mola a uma parede rígida, ou a outro corpo, também numa mesa sem atrito. No caso da conservação aproximada, temos a explosão de uma granada, pois neste caso a forca peso é limitada e pode-se ter a condição (4) válida. Também podemos considerar o atrito entre o bloco e a superfície nos exemplos citados antes.

Os enunciados e as resoluções destes exemplos estão no Apêndice 2. O exemplo do pêndulo balístico, presente em quase todos os textos, deveria ser apresentado no contexto da discussão do momento angular – neste caso, a força de tensão, que é uma força de vínculo, desaparece da resolução. Para fazer o caso do pêndulo balístico, é necessária a discussão da justificativa do uso da lei de conservação – e se esta discussão não é possível o exemplo não deve ser apresentado. A ausência de sentido na sua apresentação sem uma discussão apropriada pode ser uma causa da opção dos estudantes pelas técnicas de memorização.

5. CONCLUSÕES

O papel do professor, num contexto de ensino, em particular no ensino superior, seria intervir deliberada e objetivamente de forma a estabelecer condições de ensino-aprendizagem, que se traduziriam por identificar toda uma hierarquia de elementos cognitivos necessários à aprendizagem do tópico. A partir desta identificação, freqüentes diagnósticos seriam realizados buscando identificar e sanar nos alunos as possíveis falhas de tais elementos cognitivos. Esta seria uma estratégia de trabalho docente tecnicamente apropriada.

No tópico da apresentação das leis de conservação do momento linear de um sistema de partículas, as hipóteses que permitem a utilização destas leis nos exemplos ilustrativos escolhidos devem ser verificadas. A não verificação de forma explícita da validade destas hipóteses pode representar o fracasso de uma estratégia de trabalho docente que vise uma aprendizagem significativa. Os textos disponíveis para esta discussão todos, ao não apresentarem de forma clara esta discussão, induzem ao erro e à utilização da técnica de memorização de problemas como técnica de aprendizagem por parte dos estudantes.

APÊNDICE 1

Os problemas apresentados na análise da conservação aproximada do momento linear dos problemas do pêndulo balístico e da barra ficam mais transparentes quando se utiliza a lei que fornece a variação do momento angular e as condições de validade da lei de conservação do momento angular,

$$\Delta \vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau} \vec{\tau}_{ext}^{(i)}\, dt\,, \tag{A-1}$$

$\vec{\tau}_{ext}^{(i)} = \vec{r} \; x \; \vec{F}_{ext}^{(i)}$ é o torque da força externa $\vec{F}_{ext}^{(i)}$ sobre a partícula *i* em relação ao ponto O . Ou seja, todas as vezes em que a soma dos torques das forças externas que agem sobre o sistema se anula, o momento angular do sistema é conservado, em relação ao ponto O.

Solução do problema do pêndulo balístico

A aplicação da equação (A.1) ao pêndulo balístico fornece:

$$(m+M)\, v_f\, \ell - m v_{1i}\, \ell = -(m+M)\; g\; \ell \int_{t=0}^{\tau} sen\left[\theta(t)\right] dt\;. \tag{A-2}$$

No caso em que a colisão ocorre em um intervalo de tempo muito curto, e o sistema praticamente não se move durante a colisão, escrevemos que

$$\left|(m+M) v_f\, \ell - m_1 v_{1i}\, \ell\right| \cong (m+M)\, g\, \theta(\tau)\, \ell \quad \Rightarrow \quad \left|(m+M)\, v_f - m_1 v_{1i}\right| << m_1 v_{1i}\,. \tag{A-3}$$

Esta expressão mostra que, no caso do pêndulo balístico, se a colisão ocorre num tempo curto e o sistema praticamente não se move durante a colisão, há conservação aproximada do momento angular e também do momento linear.

Solução do problema da barra presa ao teto e atingida por uma bala:

A aplicação equação (A-1) à barra fornece:

$$(m\omega\, \ell^2 + \frac{M\ell^2\omega}{3}) - m v_{1i}\, \ell = -(m+M)\, g\ell \int_{t=0}^{\tau} sen\left[\theta(t)\right] dt\,. \tag{A-4}$$

Se a colisão ocorre em um tempo muito curto τ e o sistema praticamente não se move durante a colisão temos

$\Delta \vec{p} = \vec{I}_{ext}$ **BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ 15/05/02□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ**

-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□BÖ-□imediatamente após a colisão é

$$\omega \cong \frac{mv_{1i}}{m\ell + \frac{M}{3}\ell} - \frac{(m+M)\,g\,\theta(\tau)\,\tau}{m + \frac{M}{3}} \qquad \text{(A-6)}$$

Para pequenos ângulos $\theta(\tau)$, a variação no módulo da componente x do momento linear do sistema em τ é

$$\Delta P_x \cong -(m\omega\ell + \frac{1}{2}M\omega\ell) + mv_{1i} \cong -\frac{Mmv_{1i}}{(6m+2M)} + \frac{3(m+M)(2m+M)}{2(3m+M)} g\,\theta(\tau)\ell\tau \,. \qquad \text{(A-6)}$$

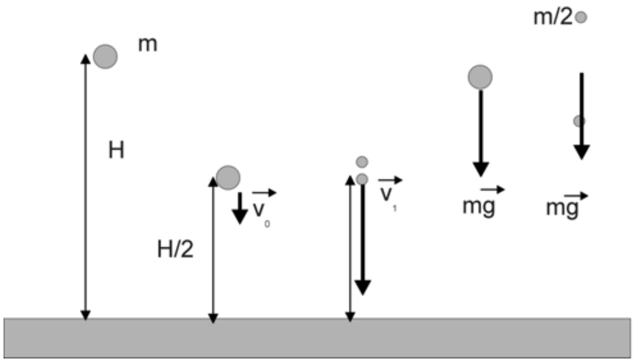
Uma comparação entre as expressões (A-5) e (A-6) mostra que nesse caso não não existe a conservação aproximada da componente x do momento linear do sistema, apesar de existir conservação aproximada do momento angular.

APÊNDICE 2

Apresentamos aqui algumas sugestões de exemplos que consideramos serem adequados ao processo de aprendizagem significativa do tópico de conserva
ção de momento linear. Na solução, apresentamos apenas a parte relativa à aplica
ção da lei de conservação aproximada, em particular com a discussão da verificação da validade da conservação.

Exemplo proposto 1 - explosão de uma granada

"Uma granada com massa m=300g é largada de um edifício com altura H=16m. Quando ela está a uma altura de 8m do solo ela explode, dividindo-se em dois pedaços com massas iguais. Imediatamente após a explosão, uma das partes tem velocidade inicial vertical e para baixo com módulo v_1=20m/s. Calcule o tempo que cada uma das partes da granada leva para atingir o solo".

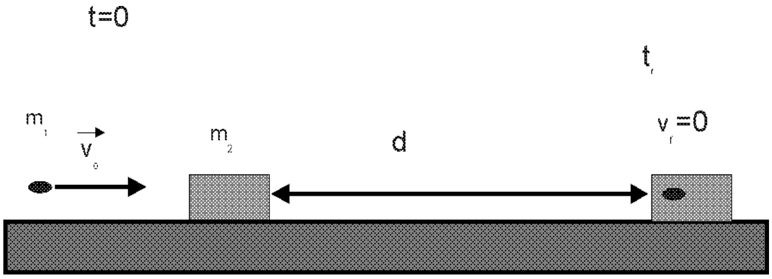


Solução:

O cálculo do tempo de queda de cada um dos pedaços da granada depende da componente vertical da velocidade de cada um dos pedaços imediatamente após a explosão. A velocidade do pedaço 1 é dada no problema; só é necessário o cálculo da velocidade do pedaço 2. A única força externa agindo sobre a granada durante a explosão é a força peso. O módulo da velocidade e do momento linear da granada no momento da explosão são respectivamente iguais a $v_o = \sqrt{2gH} \cong 13m/s$ e $P_o = mv_o \cong 3{,}9N/s$. O módulo do impulso da força peso é $I_{externo} = mg\tau = 2{,}9\tau$ (τ é o tempo de explosão). Como o tempo de explosão da granada é pequeno ($\tau < 0.01s$) o impulso externo é desprezível em relação ao momento linear P_o. Portanto é possível se aplicar a conservação aproximada do momento linear para se obter a velocidade v_2 do pedaço 2 da granada imediatamente após a explosão.

Exemplo proposto 2 - colisão de uma bala com um bloco numa superfície com atrito

"Um bloco de massa m_2 está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal com atrito. Uma bala com massa m_1 e velocidade inicial $\vec{v}_o$ colide com o bloco ficando retida no mesmo. Após a colisão, o bloco e a bala percorrem uma distância *d* e param. Supondo os coeficientes de atrito estático e o cinético entre o bloco e o plano respectivamente iguais a 0,3 e 0,2, a massa do bloco m_2 = 5,4 kg, a massa da bala m_1= 9,5g e a distância d=0,3m, calcule a velocidade inicial da bala."

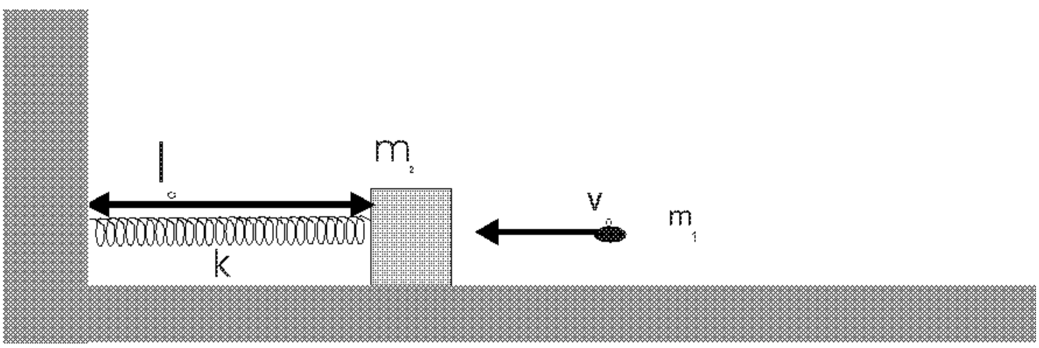


Solução parcial:

O conhecimento da distância *d* permite obter a componente horizontal da velocidade do sistema formado pelo bloco e pela massa imediatamente após a colisão. Como o bloco é muito mais pesado do que a bala e o tempo de colisão pequeno é razoável se supor que o bloco praticamente não se movimenta durante a colisão. A força resultante externa que atua no sistema formado pela bala e pelo bloco durante a colisão é $\vec{F}_{externa} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N} + \vec{fa}$. A variação da componente horizontal do momento linear da do sistema é produzida apenas pela força de atrito. Durante a colisão a força de atrito é menor ou no máximo igual a força de atrito estática máxima, isto é, $fa \le \mu_{est}(m_1 + m_2)g$. Portanto, o impulso da força de atrito é $I(fa) \le \mu_{est}(m_1 + m_2)g\tau = 17\tau$. O impulso horizontal da bala imediatamente antes da colisão é $P_{ox} = m_1 v_o = 0{,}3\, v_o$. Como o tempo de colisão da bala com o bloco é pequeno ($\tau < 0{,}01$ s) e a velocidade estimada da bala é grande ($v_o > 100$ m/s), é possível considerar-se que há conservação aproximada da componente horizontal do momento linear durante a colisão, e calcular a velocidade inicial da bala.

Exemplo proposto 3 - colisão de uma bala com um bloco ligado a uma mola

"Um bloco de massa *M*=5,4kg ligado a uma mola de constante elástica *k*=100N/m está inicialmente em repouso apoiado sobre um um plano horizontal sem atrito. Uma bala com massa *m*=300g e velocidade inicial $\vec{v}_o$ (v_o=500m/s) colide com o bloco ficando retida no mesmo. Calcule a velocidade do sistema imediatamente após a colisão."



Solução parcial:

A força resultante externa que atua no sistema formado pelo bloco e pela bala durante a colisão é $\vec{F}_{externa} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{el}$. Como a massa do bloco é muito maior do que a massa da bala, é razoável supor que o bloco se desloca muito pouco durante a colisão. A variação da componente horizontal do momento linear do sistema é igual ao impulso da força elástica da mola. O módulo do impulso da força da mola é $I(F_{el}) = k\ \Delta x\ \tau = 100\ \tau$ (Δx é o deslocamento do bloco e τ é o tempo de colisão). A componente horizontal do momento linear inicial do sistema é $P_{ox} = m\mathrm{v}_{o} = 1{,}50$ N.s. Como o tempo de colisão é pequeno $(\tau < 0{,}01s)$ e o deslocamento do sistema também é pequeno durante a colisão, é possível considerar que há conservação aproximada de momento linear.

Referências:

[1] AUSUBEL, D. P., NOVAK, J.D., HANESIAN, H. (1998), *Educational Psyychology: a Cognitive View*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

MOREIRA, Marco Antonio (1999), *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo, EPU – Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

POZO, Juan Ignacio (1998), *Teorias Cognitivas da Aprendizagem*, 3ª edição. Porto Alegre, Artmed – Editora Artes Médicas Sul Ltda.

[2] NOVAK, J. D. (1998), *Learning, Creating and Using Knowledge – Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, New Jersey

[3] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., Fundamentos da Física vol 1, 4a edição. Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos S.A.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., KRANE, K.S. (1996), Física vol. 1, 4ª edição. Rio de Janeiro, LTC - Livros Técnicos e Científicos S.A.

TIPLER, P.A. (1982), Física vol. 1, 2ª edição. Rio de Janeiro, Editora Guanabara.

NUSSENZVEIG, H.M. (1996), *Curso de Física Básica vol 1 - Mecânica*, 3ª edição. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda.

ALONSO, M., FINN, E.J. (1972), *Física um Curso Universitário vol. 1 - Mecânica*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda.

[4] MOREIRA, Marco Antonio (1999), *Aprendizagem Significativa*. Brasília, Editora Universidade de Brasília.